

Verformung von Tidewellen im Flachwasserbereich

Von Hans-Werner Partenscky und Claude Marche

Summary

Several mathematical models have been lately presented which describe the tidal wave propagation within an estuary. The existing models derived from the method for damped co-oscillating tides are based on sinusoidal wave profiles.

Meanwhile, a tidal wave which moves upstream, generally exhibits a progressive deformation which tends to unbalance the length of time between flood and ebb tides. The actual profile is therefore no longer sinusoidal.

Our investigation uses the potential method, and takes into account the wave amplitude which is usually neglected compared with the water depth.

Finally, the velocity potential is obtained explicitly, using a double iterative method. Tidal elevation, particle velocities and trajectories are given by the same computer programmed algorithm.

Our study shows that 1) the phenomenon can be clearly visualized on the theoretical curves and 2) the magnitude of this deformation is inversely proportional to the water depth, becoming significant when the ratio η/h reaches the critical value of $1/10$.

Damping and geometrical effects are also considered and the theory was applied to the St. Lawrence Estuary. A partial positive reflection of the incoming tidal wave is assumed at the narrow section near Quebec, whereas a complete negative reflection is assumed at the entrance to Lake St. Peter. The calculated and observed wave profiles, velocity distributions, and phase shifts are in good agreement.

I. Einleitung

In den vergangenen Jahren wurde eine Reihe von ein- und zweidimensionalen mathematischen Modellen für die Beschreibung der Tidebewegung in Ästuarien entwickelt. Die von A. T. IPPEN und D. R. F. HARLEMAN entwickelten eindimensionalen mathematischen Modelle für das Delaware-Ästuar und die Bay of Fundy (1) sowie auch das vom Verfasser entwickelte Modell für den St.-Lorenz-Strom (2, 3), basieren auf der Methode der gedämpften kooszillierenden Tidebewegung, wobei ein sinusförmiges Wellenprofil vorausgesetzt ist.

Beim Einlaufen einer Tidewelle in ein Tideästuar verformt sich jedoch die Tidewelle stetig, so daß das wirkliche Wellenprofil, insbesondere bei Erreichen flacherer Ästuarbereiche, nicht mehr sinusförmig ist. In der folgenden Ableitung wird der Versuch unternommen, diese Verformung des Wellenprofils mathematisch zu erfassen, wobei insbesondere der Einfluß der Wassertiefe berücksichtigt wird.

II. Verformung einer Tidewelle in einem Rechteckkanal geringer Tiefe

1. Ursprünglich einlaufende Tidewelle

Das Geschwindigkeitspotential einer harmonischen Welle kleiner Amplitude, die sich in der positiven x-Richtung fortbewegt, ergibt sich als Lösung der allgemeinen Laplaceschen Differentialgleichung

$$\nabla^2 \phi_1 = 0$$

wobei der Index 1 für die ursprüngliche Welle verwendet ist.

Die für die Theorie von Oberflächenwellen kleiner Amplituden (Theorie 1. Ordnung von B. AIRY) gültigen Bedingungen werden als erfüllt vorausgesetzt. Im Gegensatz zu AIRYS Annahmen wird die freie Oberfläche jedoch nicht bei $z = 0$ angesetzt, sondern als veränderliche Größe $z = \eta_1$ in der nachfolgenden Ableitung behandelt.

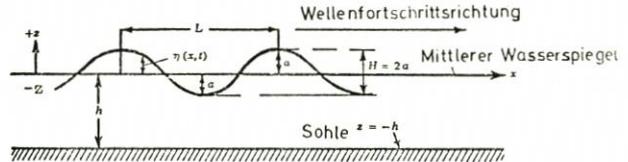


Abb. 1.
Definitions-Schema

Die Grenzbedingungen für die Lösung der Laplaceschen Gleichung ergeben sich dann wie folgt:

$$-\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right)^2 \right] + g \eta_1 = 0$$

Für $z = \eta_1$:

$$-\frac{\partial \eta_1}{\partial t} + \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta_1}{\partial x} - \frac{\partial \phi_1}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

Für $z = -h$:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial z} = 0$$

Bei Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung können die Grenzbedingungen in vereinfachter Form geschrieben werden:

$$-\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + g \eta_1 = 0$$

Für $z = \eta_1$:

$$-\frac{\partial \eta_1}{\partial t} - \frac{\partial \phi_1}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

Für $z = -h$:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial z} = 0$$

Die Grenzbedingungen nach (2) unterscheiden sich von den in der AIRYSchen Theorie üblichen Grenzbedingungen durch einen zusätzlichen Grad der Annäherung. Dies läßt den Schluß zu, daß die gesuchte Lösung für das Geschwindigkeitspotential in erster Annäherung in der folgenden Form geschrieben werden kann:

$$\phi_1 = \frac{ag}{\sigma} \frac{\cosh G_1 (h+z)}{\cosh G_1 h} \cos(G_1 x - \sigma t) = \frac{A_1 g}{\sigma} \cos(G_1 x - \sigma t) \quad (3)$$

Die Lösung nach Gleichung (3) erfüllt die Grenzbedingungen (2), wenn

$$\sigma^2 = g G_1 \tanh G_1 (h + \eta_1) \quad (4)$$

ist. In den vorstehenden Gleichungen ist a die Amplitude der Tidewelle und η_1 die momentane Auslenkung des Wasserspiegels von der Ruhelage ($z = 0$).

Dabei gilt:

$$\eta_1 = \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \quad \text{und} \quad G_1 = \frac{2\pi}{L_1} = \text{veränderliche Wellenzahl}$$

Gleichung (4) gibt die Beziehung zwischen der Kreisfrequenz σ und G_1 an, wobei η_1 eine mit Zeit und Ort veränderliche Größe ist.

Die dritte Gleichung, die für die Lösung des Gleichungssystems (3) und (4) notwendig ist, ergibt sich aus der durch Naturbeobachtungen vollauf bestätigten Annahme, daß $\sigma = 2\pi/T = \text{konstant}$ ist.

Damit wird Gleichung (4) eine implizite Funktion von G_1 und die numerische Lösung des Gleichungssystems (3) und (4) wird mit Hilfe eines Computer-Programms möglich.

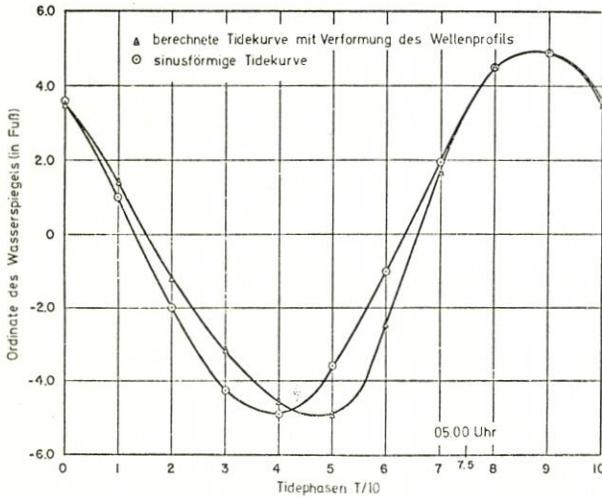


Abb. 2.
Verformung einer Tidewelle
in einem Rechteckkanal

Die Verformung der Tidewelle ist klar ersichtlich, wenn das Wellenprofil, das sich durch die numerische Lösung des vorgegebenen Gleichungssystems ergibt, mit der Sinusform des ursprünglichen Wellenprofils verglichen wird.

Abbildung 2 zeigt die Art der Wellenverformung, der eine Tidewelle von 5 Fuß (= 1,53 m) Amplitude unterworfen ist bei Fortschreiten in einem Kanal mit einer mittleren Wassertiefe von 15 Fuß (= 4,46 m).

Dabei wird besonders sichtbar, daß der Anteil der Tideperiode für die Ebbephase $6/10$ der gesamten Tideperiode gegenüber $4/10$ für die Flutphase beträgt.

Die numerische Auswertung ähnlicher Beispiele mit verschiedenen Wassertiefen ergab, daß eine wesentliche Verformung des Tidewellenprofils erst bei Verhältniswerten von Tideamplitude zu Wassertiefe von

$$\eta/h > 0,10$$

auftritt.

2. Reflektierte Wellen

Die Anwendung der analogen Ansätze auf das Geschwindigkeitspotential einer am Querschnitt $x = B$ reflektierten Tidewelle im gleichen Rechteckkanal ergibt die folgende Gleichung:

$$\phi_2 = \frac{a_2 g}{\sigma} \frac{\cosh G_2 (h+z)}{\cosh G_2 h} \cos(G_2 x - \sigma t + \delta) = \frac{A_2 g}{\sigma} \cos(G_2 x - \sigma t + \delta) \quad (5)$$

wobei Index 2 für die charakteristischen Werte der reflektierten Welle benutzt wird.

Darin bedeuten:

$$G_2 = \frac{2\pi}{L_2} \quad \text{und} \quad \sigma^2 = g G_2 \cdot \tanh G_2 (h + \eta_2)$$

und außerdem für den Phasenwinkel zwischen der einlaufenden und reflektierten Welle:

$$\delta = 2n\pi - 2G_2 B.$$

3. Überlagerung der einlaufenden und reflektierten Welle

Das Geschwindigkeitspotential der resultierenden Welle ist durch die algebraische Summe der in Gleichung (3) und (5) gegebenen Geschwindigkeitspotentiale gegeben:

$$\Phi = \phi_1 + K_r \phi_2 \quad (6)$$

wobei K_r der Reflektionskoeffizient für die einlaufende Welle an der Stelle $x = B$ ist.

4. Berücksichtigung von Geometrie und Dämpfung des Tideästuars

Die Verallgemeinerung dieser Theorie im Hinblick auf eine praktische Anwendung erfordert die zusätzliche Berücksichtigung der Geometrie des Ästuars sowie der durch Reibung und Ungleichförmigkeiten des Querschnittes verursachten Dämpfung der Tidewelle.

Bei Berücksichtigung des GREENSchen Gesetzes für die reflektionslose Weiterleitung der Tideenergie bei sich der Breite und Tiefe nach in Fortschrittsrichtung der Welle veränderndem Querschnitt ergibt sich für den allgemeinsten Fall die folgende Gleichung:

$$\eta = a \left(\frac{b_B}{b_x} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{h_B}{h_x} \right)^{\frac{1}{4}} \left[A_1 e^{-\mu(x-B)} \sin(G_1 x - \sigma t) - K_r A_2 e^{\mu(x-B)} \sin(G_2 x - \sigma t + \delta) \right] \quad (7)$$

mit der zusätzlichen Bedingung, daß

$$\sigma^2 = g G_1 \tanh G_1 (h + \eta_1) = g G_2 \tanh G_2 (h + \eta_2) \quad (8)$$

wobei h = mittlere Wassertiefe des jeweiligen Querschnittes

b = Oberflächenbreite des Querschnittes

μ = Dämpfungskoeffizient infolge Reibung und Ungleichförmigkeit des Querschnittes

B = Lage des Reflektionsquerschnittes in bezug auf den Koordinaten-Ursprung

A_1 und A_2 = Faktoren gemäß Gleichung (3) und (5) sind.

Gleichung (7) ist die allgemeinste Form für das Wellenprofil für ein beliebiges Ästuar, wobei vorausgesetzt wird, daß das GREENSche Gesetz erfüllt ist.

5. Geschwindigkeitskomponenten der Wasserteilchen

Nach der Definition des Geschwindigkeitspotentials ergeben sich die Horizontal- und Vertikalkomponenten der Geschwindigkeit eines Flüssigkeitselementes infolge der Wellenbewegung in einem Rechteckgerinne durch die partiellen Ableitungen des Geschwindigkeitspotentials nach den entsprechenden Richtungen:

$$u = - \frac{\partial \phi_1}{\partial x} = - \frac{ag G_1}{\sigma} \frac{\cosh G_1 (h+z)}{\cosh G_1 h} \sin(G_1 x - \sigma t) \quad (9)$$

$$\text{und } v = - \frac{\partial \phi_1}{\partial z} = - \frac{ag G_1}{\sigma} \frac{\sinh G_1 (h+z)}{\cosh G_1 h} \cos(G_1 x - \sigma t) \quad (10)$$

Dabei wird der Wert von G_1 aus der impliziten Gleichung (4) auf numerischem Wege bestimmt. In Abbildung 3 wurde die zeitliche Änderung der Horizontalkomponente u für eine vorgegebene Tidewelle über eine Wellenperiode dargestellt. Bemerkenswert sind da-

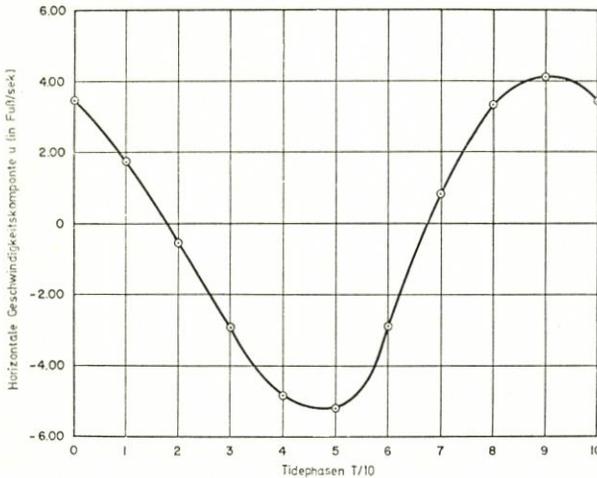


Abb. 3. Variation der horizontalen Geschwindigkeitskomponente über eine Periode

bei die unterschiedlichen Extremwerte der Geschwindigkeit für den Ebbe- und Flutstrom. Wie die Darstellung zeigt, liegen die Höchstwerte der horizontalen Geschwindigkeit beim Ebbestrom über denen des Flutstromes.

Aus der Kontinuitätsbedingung für inkompressible Flüssigkeiten folgt, daß die Flut- und Ebbestromdauer unterschiedlich sein muß. Dieses Ergebnis deckt sich mit dem mathematischen Ergebnis (vgl. Beispiel in Abbildung 2) sowie auch mit den Beobachtungen in der Natur.

6. Bahnlinien der Wasserteilchen

Ein weiteres Ergebnis der vorstehenden Ableitungen bezieht sich auf die Orbitalbewegungen der Flüssigkeitselemente. Letztere lassen sich aus nachstehender Differentialgleichung bestimmen:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dz}{v} = dt \tag{11}$$

Bei der Integration des vorstehenden Gleichungssystems wird die Bewegung des Einzelteilchens nur als Funktion der Zeit aufgefaßt. Die Integration des Gleichungssystems (11) erfolgt auf numerischem Wege und ergibt die folgenden Ausdrücke:

$$x_{t_n} = \sum_{n=1}^n \int_{(n-1)\frac{T}{m}}^{n\frac{T}{m}} U(x_{n-1}, t_{n-1}) dt + x_0 \tag{12}$$

$$z_{t_n} = \sum_{n=1}^n \int_{(n-1)\frac{T}{m}}^{n\frac{T}{m}} W(x_{n-1}, t_{n-1}) dt + z_0 \tag{13}$$

Darin bedeuten:

- x_{t_n} bzw. z_{t_n} die momentanen Horizontal- bzw. Vertikalverschiebungen des Wasserteilchens aus seiner Ruhelage nach Ablauf des Zeitintervalls t_n ,
- und T/m den Zeitschritt der numerischen Integration (als Bruchteil der Wellenperiode T).

Abbildung 4 zeigt die sich aus diesen Ansätzen ergebende Bahnlinie eines Wasserteilchens für eine Tidewelle im Flachwasserbereich. Die nach AIRYS Theorie übliche ellipsenförmige Bahn ist in Richtung der Lotrechten nach unten verformt.

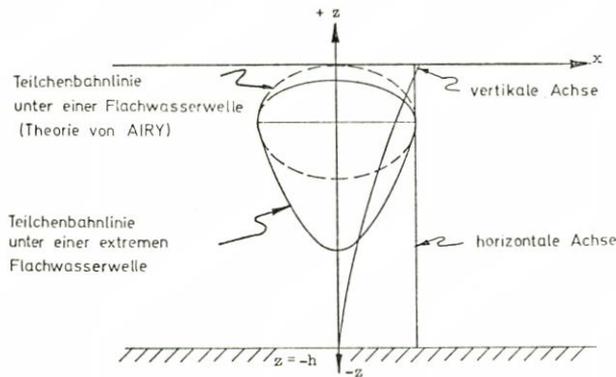


Abb. 4

Diese Deformation der Bahnlinien kann leicht mit Hilfe der Kontinuitätsbedingung erklärt werden, wenn man die unterschiedlichen Geschwindigkeitswerte für den Ebbe- und Flutstrom in Betracht zieht (vgl. Abbildung 3).

Die für verschiedene Wassertiefen berechneten Bahnlinien zeigen, daß auch bei der „quasi-elliptischen“ Orbitalbewegung der Wasserteilchen im Flachwasserbereich die hori-

zontale Achse der verformten Ellipse für jede Wassertiefe konstant bleibt, während der Wert der „vertikalen Achse“ mit der Tiefe abnimmt (Abbildung 4).

III. Anwendung des mathematischen Modells auf das Ästuar des St.-Lorenz-Stromes

1. Grundwerte des Ästuars

Das Ästuar des St.-Lorenz-Stromes umfaßt zwei Bereiche mit verschiedenen geometrischen Grundwerten. Der erste Teil umfaßt das Ästuar selbst zwischen seiner Ozeanmündung und der Engstelle bei Quebec City. Dieser Bereich ist gekennzeichnet durch relativ große Wassertiefe und trichterförmig sich nach oberstrom verengende Grundrißform.

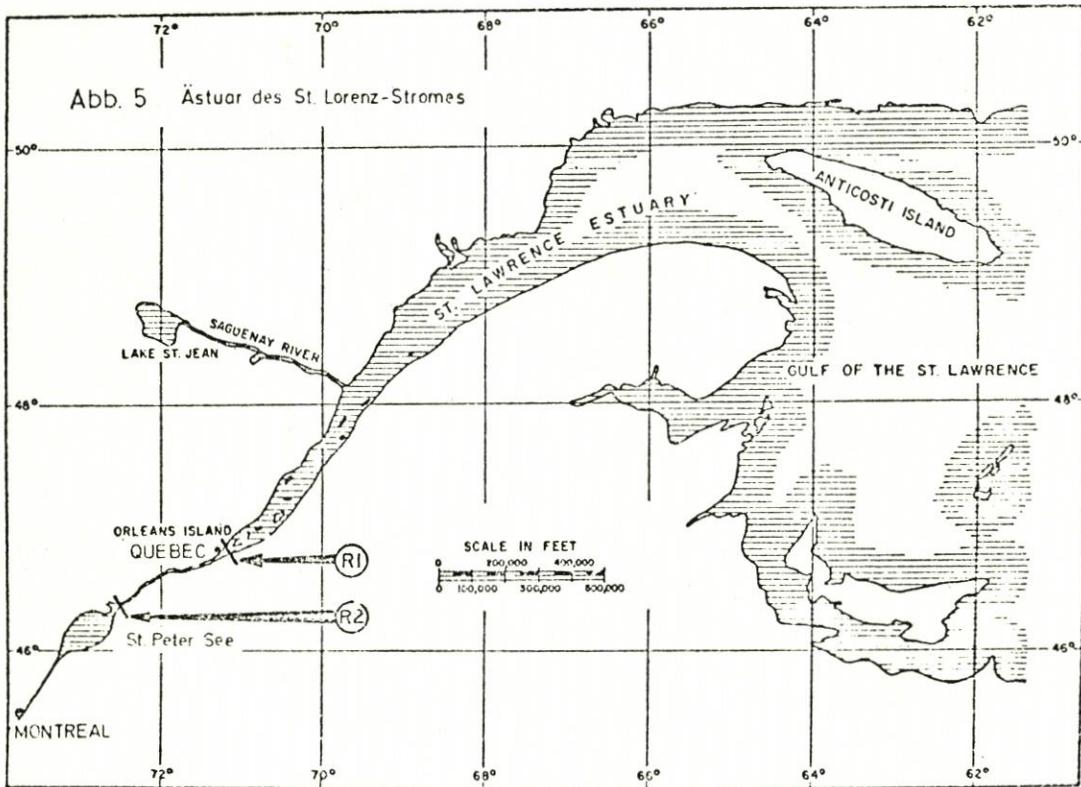


Abb. 5

Der zweite Teil ist durch etwa konstante Oberflächenbreite und sehr viel geringere Wassertiefe gekennzeichnet. Er wird nach oberstrom hin durch die Erweiterung des Flusses begrenzt, die unter dem Namen Lake St. Peter bekannt ist (Abbildung 5).

Diese beiden unterschiedlichen Bereiche des Ästuars rechtfertigen die Annahme, daß die einlaufende Tidewelle zunächst an der Engstelle bei Quebec (Querschnitt R 1) teilweise positiv reflektiert wird, während der Rest der Tideenergie an der plötzlichen Erweiterung

des Stromes am Lake St. Peter (Querschnitt R 2) einer vollständigen negativen Reflektion unterworfen ist.

2. Ergebnisse der Berechnung

Die Anwendung des im Vorstehenden entwickelten mathematischen Modells erlaubt die Vorhersage der Tidebewegung für einen beliebigen Querschnitt des Ästuars, das heißt, die Ermittlung der Tidekurven $\eta = f(t)$. Darüber hinaus ist es möglich, für einen gegebenen

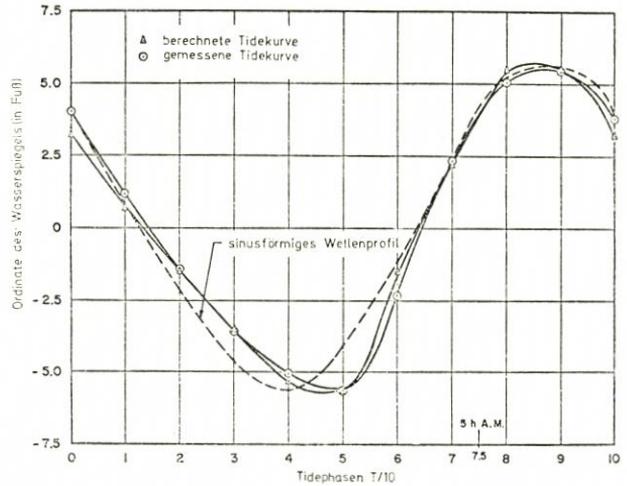


Abb. 6.
Vergleich der für die Tidestation bei Neville berechneten und gemessenen Tidekurve

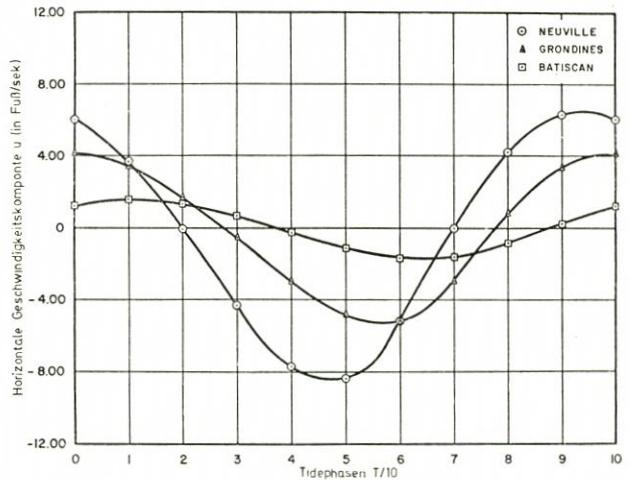


Abb. 7.
Variation der horizontalen Geschwindigkeitskomponenten bei Neville, Grondines und Batiscan

Zeitpunkt t die Tidewellenlinien $\eta = f(x)$ zu bestimmen. In Abbildung 6 wurde eine für die Station Neville mit Hilfe des mathematischen Modells berechnete Tidekurve der für mittlere Tideverhältnisse an gleicher Stelle gemessenen Tidekurve gegenübergestellt.

Die gemessenen und berechneten Tidekurven zeigen deutlich die Abweichung vom reinen Sinusprofil. Für die tieferen Bereiche des Ästuars konnte eine derartige Verformung der Tidekurven dagegen nicht nachgewiesen werden.

In Abbildung 7 wurde die Variation der horizontalen Geschwindigkeitskomponente $u = f(t)$ für drei verschiedene Tidestationen (Neuville, Grondines und Batiscan) des oberen Ästuars dargestellt. Dabei zeigte sich ein von der maximalen Geschwindigkeit abhängiger Unterschied zwischen den Extremwerten für Ebbe- und Flutstrom.

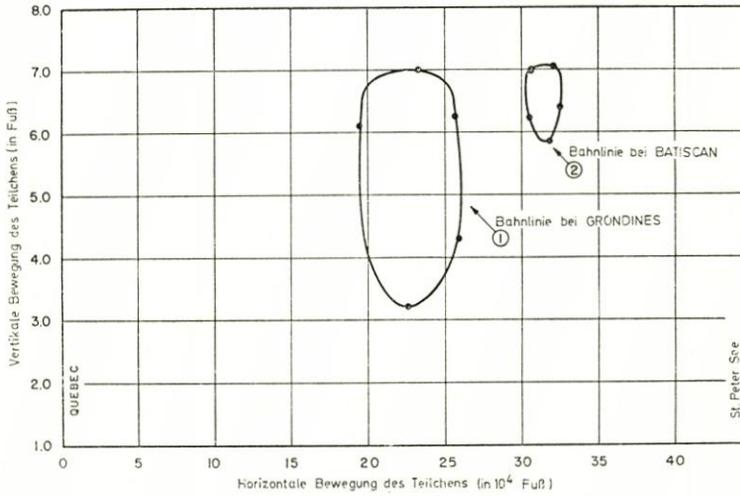


Abb. 8. Bahnlinien der Flüssigkeitselemente bei Grondines und Batiscan

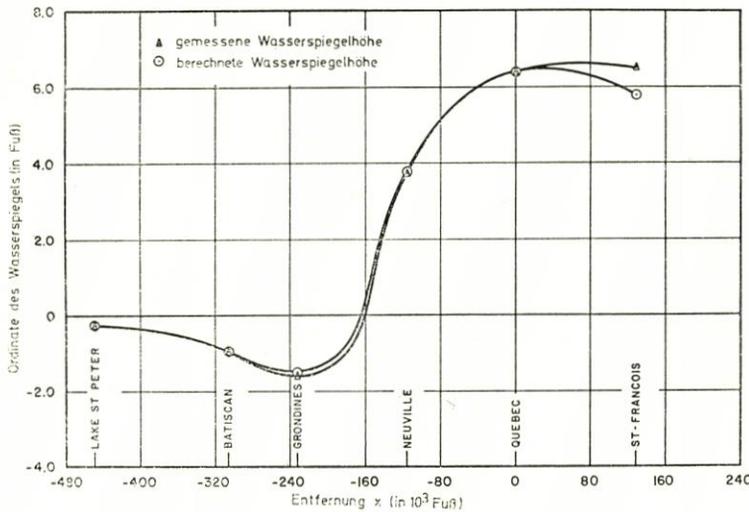


Abb. 9. Berechnete und gemessene Tidewellenlinie zwischen St. François und St. Peter See (6. 5. 1963, 5.00 Uhr)

Abbildung 8 zeigt die Bahnlinie eines Wasserteilchens in einer Höhe von 7 Fuß über der Sohle für den Querschnitt von Grondines. Zum Vergleich wurde die Bahnlinie eines weiteren nach oberstrom im Querschnitt von Batiscan befindlichen Teilchens dargestellt. Dabei zeigt sich deutlich der Einfluß der Wellendämpfung im weiter nach oberstrom gelegenen Querschnitt.

Abbildung 9 zeigt die mit Hilfe des mathematischen Ansatzes errechnete Tidewellenlinie im Vergleich zu der aus den verschiedenen Pegelaufzeichnungen ermittelten tatsächlichen Tidewellenlinien.

Der Verlauf der Tidewellen für die im flachen Bereich des oberwasserseitigen Ästuarbereiches gelegenen Pegelstation zeigt deutlich die erwartete Verformung des Wellenprofils.

Vergleichende Berechnungen für den wesentlich tieferen Bereich des Ästuars zeigten einen nahezu sinusförmigen Verlauf der Tidewellen sowohl für die berechnete Tidekurve als auch für die an den verschiedenen Pegeln gemessenen Kurven.

I V. Zusammenfassung der Ergebnisse

Das im Vorstehenden entwickelte Modell zeigte damit eine gute Übereinstimmung mit dem aus Naturmessungen bekannten Verlauf der Tidewelle am Beispiel des St.-Lorenz-Stromes. Gegenüber den bisher verwendeten mathematischen Modellen gleicher Art gibt das neu entwickelte Modell die Möglichkeit, insbesondere in flachen Bereichen eines Ästuars die Verformung der Tidewelle vorzuberechnen.

Nicht berücksichtigt wurde dabei der Einfluß des Oberwassers im Tideästuar, durch den eine zusätzliche Verformung des Tidewellenprofils im Prinzip zu erwarten ist. Bei dem gewählten Beispiel des St.-Lorenz-Stromes ist jedoch dieser Einfluß nahezu unbedeutend, während er bei deutschen Tideflüssen einen nicht unwesentlichen Einfluß auf die Verformung des Tidewellenprofils haben wird. Eine Erweiterung des hier dargelegten mathematischen Modells unter Einschließung des Oberwassereinflusses ist deshalb vorgesehen.

V. Schriftenverzeichnis

- (1) A. T. IPPEN und D. R. F. HARLEMAN: "Estuary and Coastline Hydrodynamics", McGraw-Hill, New York 1965.
- (2) H. W. PARTENSKY und R. VINCENT: "Tidal Motion in the St. Lawrence Estuary", Xth Conference on Coastal Engineering, Tokio, Sept. 1966.
- (3) H. W. PARTENSKY und J. C. WARMOES: "A Study of the St. Lawrence River tides estuary using a linearized mathematical model", Ecole Polytechnique, Montreal.
- (4) H. W. PARTENSKY und J. C. WARMOES: "Damped co-oscillating tides with negative reflection at the end of the estuary", IAHR, Kyoto 1969.
- (5) H. W. PARTENSKY und J. C. MARCHE: "Deformation of Tidal Waves in Shallow Estuaries", XIV. Conference on Coastal Engineering, Vancouver July 1972.