

# Ein dreidimensionales barotropes Modell der küstennahen Zirkulationen mit Anwendungen auf die Nordsee

Von Jürgen Sündermann

## Summary

*Based on HANSEN'S hydrodynamical-numerical method a threedimensional model of wind and tidally generated processes in a homogeneous sea is developed. The model includes an arbitrary depth distribution and the simulation of a boundary layer near the bottom. Some numerical examples demonstrate the applicability for practical purposes.*

## 1. Einführung

Mathematische Modelle für die quantitative Beschreibung der Bewegungsvorgänge in homogenen Ästuarien, Küstengewässern und Randmeeren erfreuen sich heute einer weiten Verbreitung. Dabei werden durchweg die vertikal integrierten hydrodynamischen Differentialgleichungen zugrunde gelegt, so daß eine Berechnung der Vertikalstruktur der Strömungen nicht erfolgt. Für viele Zwecke – so für die Untersuchung von Gezeitenvorgängen oder der großräumigen, windbedingten Zirkulation – hat sich dieses Vorgehen als hinreichend erwiesen.

Andererseits sind vertikal gemittelte Stromgeschwindigkeiten wenig aussagefähig, wenn es um die Betrachtung vertikal strukturierter Ausbreitungs- und Transportprozesse geht, wie etwa den Feststofftransport am Boden. Aus den mittleren Horizontalgeschwindigkeiten läßt sich nur dann eine Aussage über die Vertikalverteilung ableiten, wenn die tatsächliche Geschwindigkeit nur wenig von der mittleren abweicht, wie es bei Gezeitenströmen häufig der Fall ist.

In Küstennähe kann indessen die tatsächliche Geschwindigkeitsverteilung erheblich von einer mittleren abweichen. Man findet häufig den typischen Stromaufbau bei einer winderzeugten Strömung: Strömung in Windrichtung an der Oberfläche, entgegengerichteter Kompensationsstrom am Boden.

Obwohl in diesem Falle die mittlere Geschwindigkeit 0 ist, tritt doch eine beträchtliche Zirkulation auf, die mit Transportvorgängen verbunden sein kann. Ein solcher Prozeß kann durch die vertikal integrierten Gleichungen nicht wiedergegeben werden und erfordert die Entwicklung eines dreidimensionalen Modells.

Vertikal strukturierte Modelle sind, besonders in der physikalischen Ozeanographie, seit einigen Jahren in Gebrauch (siehe z. B. FRIEDRICH [1]). Sie sind aber für die wesentlich anders liegenden baroklinen Verhältnisse der Tiefsee entwickelt worden, so daß sie nicht ohne weiteres auf die flachen Küstengewässer übertragen werden können. Es ist daher ein eigenes, dreidimensionales Modell entwickelt worden, das gegenwärtig auf die Nordsee angewandt wird. Dieses wird im folgenden vorgestellt.

## 2. Das Modell

Das mathematische Modell stützt sich auf die folgenden Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + f v + \frac{\partial}{\partial z} (A_V \frac{\partial u}{\partial z})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial y} - f u + \frac{\partial}{\partial z} (A_V \frac{\partial v}{\partial z})$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u_s \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v_s \frac{\partial \zeta}{\partial y} - w_s = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Dabei ist  $\zeta$  der Wasserstand;  $u, v, w$  sind die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors in einem Cartesischen System mit den Koordinaten  $x, y, z$ ;  $f$  ist der Coriolisparameter,  $g$  die Erdbeschleunigung und  $A_V$  der Koeffizient des vertikalen, turbulenten Impulsaustausches. Der Index  $s$  bezieht sich auf die Oberfläche.

Die ersten beiden Gleichungen ergeben sich aus den NAVIERSTOKESSCHEN Bewegungsgleichungen bei Annahme einer hydrostatischen Druckverteilung mit Hilfe der BOUSSINESQ-Approximation für den turbulenten REYNOLDS-stress. Die dritte Gleichung verkörpert die kinematische Grenzflächenbedingung an der Oberfläche. Die letzte Gleichung stellt die Kontinuitätsgleichung für ein inkompressibles Medium dar.

In einigen Fällen wurde anstelle der kinematischen Grenzflächenbedingung auch die vertikal integrierte Kontinuitätsgleichung benutzt. Der turbulente, horizontale Impulsaustausch wurde nur dann berücksichtigt, wenn dies aus Gründen der numerischen Stabilität und Stationarität nötig war. Dieses System hyperbolischer partieller Differentialgleichungen ist nichtlinear und daher speziell auf die Flachwasserdynamik zugeschnitten.

Hinzugefügt werden müssen die folgenden Randbedingungen:

$$A_V \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_s = \tau_s(x), A_V \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_s = \tau_s(y) \text{ an der Oberfläche,}$$

wo  $\tau_s(x), \tau_s(y)$  die Komponenten der tangentialen Schubkraft des Windes an der Wasseroberfläche bedeuten.

Die Normalkomponente des Geschwindigkeitsvektors verschwindet an festen Berandungen (Küste, Boden).

Die Tangentialkomponente des Geschwindigkeitsvektors verschwindet an festen Berandungen (Haftbedingung).

Vorgegebene Wasserstände oder Strömungsgeschwindigkeiten an den seitlichen, offenen Rändern.

Als Anfangsbedingung wird ein Ruhezustand angenommen.

Die Diskretisierung erfolgt mit Hilfe eines kubischen Gitters, das der Struktur der zugrundeliegenden Differentialgleichungen besonders gut angepaßt ist, siehe Abbildung 1. Es ist verwandt zu denjenigen von HANSEN [3] und LEENDERTSE [4].

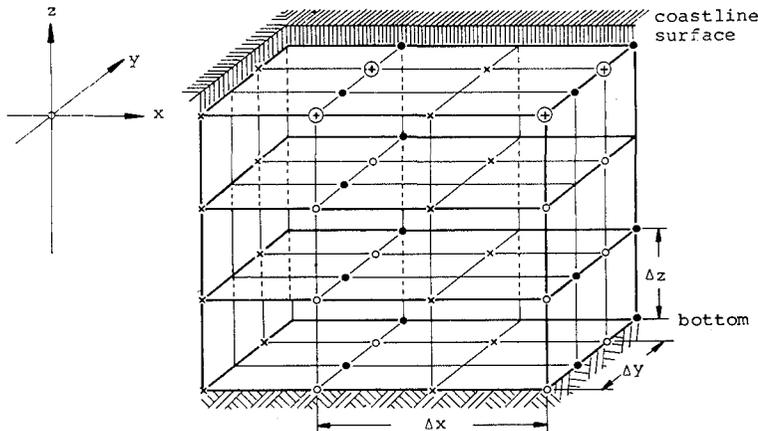


Abb. 1. Dreidimensionales Rechengitter. Die Unbekannten werden in den folgenden Punkten berechnet

+ζ    x u    • v    o w    ⊕ ζ und w

Die horizontalen Gitterabstände  $\Delta x$  und  $\Delta y$  sind durchweg gleich und äquidistant gewählt worden. Das ist zwar nicht prinzipiell notwendig, vereinfacht aber die diskretisierten Gleichungen.

Der vertikale Gitterabstand  $\Delta z$  muß demgegenüber unbedingt variabel gehalten werden, da einerseits infolge des bei dreidimensionalen Modellen enorm steigenden Speicherbedarfs eine beliebige Verfeinerung des Gitternetzes nicht möglich ist, andererseits aber an Grenzschichten (Oberfläche, Boden) eine relativ feine Diskretisierung erwünscht ist. Aus dem gleichen Grunde ist es weiterhin wünschenswert, zur Erfassung der freien Oberfläche und einer sehr differenzierten Tiefenstruktur die oberflächen- und bodennahen Gitterelemente variabel zu dimensionieren.

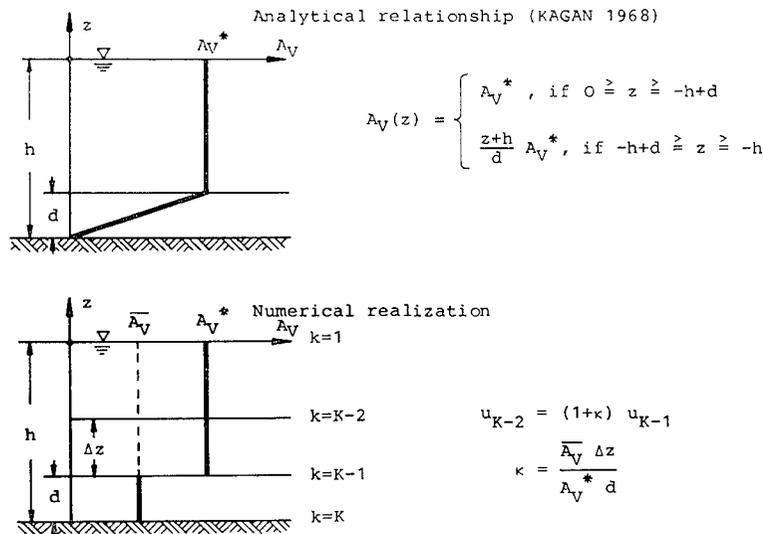


Abb. 2. Die Abhängigkeit des Austauschkoeffizienten  $A_V$  von der Wassertiefe  $z$

Um die in der Natur beobachteten Vertikalprofile der Geschwindigkeit zu reproduzieren, ist es notwendig, bei der Modellierung des vertikalen Impulsaustausches eine bodennahe Grenzschicht zu berücksichtigen, in der der Austauschkoefizient von der Tiefe abhängt. Dabei wurde die von KAGAN [5] angegebene Abhängigkeit zugrunde gelegt (Abb. 2, oberes Bild).

Ihre numerische Realisierung läuft darauf hinaus, daß in den bodennahen Gitterelementen ein geringerer Austauschkoefizient gewählt wird als in der darüber tragenden Wassersäule. Diese Beziehung läßt sich mit Hilfe einer dimensionslosen Größe  $\kappa$  parametrisieren, die Werte von 0,2 bis 0,3 annimmt (Abb. 2, unteres Bild).

Es zeigt sich, daß die beste Approximation des empirischen Potenzgesetzes für den Wert  $\kappa = 0,3$  erreicht wird. Zum Vergleich ist auch das für einen konstanten Austauschkoefizienten erhaltene Profil betrachtet worden; es zeichnet sich durch einen stärker linearen Verlauf aus.

Die numerische Lösung der Differentialgleichungen wurde mit Hilfe eines Differenzenverfahrens erhalten, wobei zunächst das explizite Schema von HANSEN in der Horizontalen und in der Vertikalen benutzt wurde. Dabei zeigte sich, daß bei den einzuhaltenden Stabilitätsschranken weniger das klassische Kriterium von COURANT - FRIEDRICHS - LEWY

$$\Delta t \leq \sqrt{\frac{\Delta x}{gh}}$$

als vielmehr eine neu einzuhaltende Bedingung für die Wahl des vertikalen Gitterabstandes

$$\Delta^2 z \geq 2 A_V \Delta t$$

zu starken Einschränkungen bei der Anwendbarkeit des Modells führt. Wählt man z. B.  $A_V = 1000 \text{ cm}^2/\text{sec}$  und  $\Delta t = 300 \text{ sec}$ , dann erhält man die Bedingung, daß der vertikale Gitterabstand  $\Delta z \geq 7,75 \text{ m}$  gewählt werden muß. Das ist für Grenzschichtbetrachtungen nicht akzeptabel.

Um diesen Mißstand zu beheben, ist daher für die Berechnung der Geschwindigkeitskomponenten  $u$  und  $v$  in der Vertikalen die bekannte implizite Prozedur von CRANK und NICOLSON angewandt worden, die eine beliebige Wahl des Gitterabstandes  $\Delta z$  zuläßt. Das Verfahren besteht darin, den vertikalen Impulsaustausch so zu diskretisieren, daß er durch ein gemischtes Mittel aus Werten zum neuen und zum alten Zeitschritt gebildet wird. Diese Prozedur wirkt so stabilisierend, daß auch das COURANT-Kriterium geringfügig überschritten werden kann. Führt auch diese Bedingung bei einer vorgegebenen räumlichen Diskretisierung zu einem unangemessenen Rechenaufwand, so müssen die Bewegungsgleichungen auch in der horizontalen Richtung implizit gelöst werden. Das geschieht am ökonomischsten durch eine Art „alternating direction method“, indem die Bewegungsgleichungen und die integrierte Kontinuitätsgleichung kombiniert werden.

### 3. Einige Ergebnisse für schematische Modelle

Das eben beschriebene Modell ist zunächst auf gezeiten- und windbedingte dreidimensionale Bewegungsvorgänge in schematischen Kanälen und Becken angewandt worden. Den folgenden Beispielen liegt entweder ein rund 100 km langer Kanal konstanter Tiefe (50 m) oder ein Becken mit 100 km Länge, 50 km Breite und 50 m Tiefe zugrunde. Die Modelle besitzen einen offenen Rand, wenn Gezeitenwellen einlaufen (Amplitude 100 cm),

sie sind geschlossen im Falle winderzeugter Bewegungen (Windgeschwindigkeit: 20 m/sec). Es wird mit  $A_V = 10^8 \text{ cm}^2/\text{sec}$  und  $f = 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$  gerechnet.

Die Abbildung 3 zeigt zunächst einige typische Vertikalprofile für einen mittleren Punkt in einem 50 m tiefen Kanal. In der oberen Abbildung ist der Gezeitenstrom für

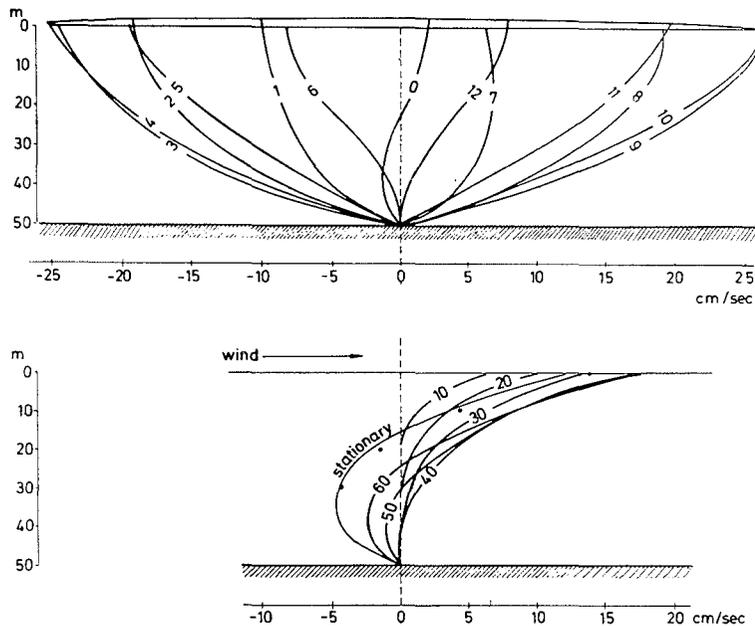


Abb. 3. Berechnete Vertikalprofile der Geschwindigkeit in einem Kanal konstanter Tiefe

verschiedene Gezeitenphasen (ausgedrückt in Stunden) dargestellt. Man sieht deutlich, wie das Kentern des Stromes zuerst in der Tiefe einsetzt. Die maximalen Geschwindigkeiten liegen i. a. an der Oberfläche.

Die untere Abbildung zeigt die zeitliche Entwicklung der Geschwindigkeitsverteilung bei stationärem Wind. Die Zahlenangaben bedeuten dabei die Zeit der Einwirkung des Windes in Minuten. Der Gegenstrom am Boden bildet sich erst nach 40 Minuten aus. Die Punkte markieren die analytische Lösung für den stationären linearen Fall.

Im weiteren wurden für einen konstanten Nordwind die stationären Strömungsfelder in verschiedenen Tiefen berechnet, nämlich an der Oberfläche und in 10, 20, 30, 40 und 50 m Wassertiefe. Es wurde angenommen, daß auch am Boden eine von Null verschiedene Geschwindigkeit möglich ist, die eine Bodenreibung, entsprechend einem quadratischen Gesetz, hervorruft. Man kann deutlich eine Abnahme und eine Rechtsdrehung des Geschwindigkeitsvektors mit der Tiefe feststellen.

Dieser Umstand legt einen Vergleich mit der EKMANschen Triftstromtheorie nahe.

Betrachtet man für einen Punkt in der Mitte des Beckens die Geschwindigkeitsvektoren in verschiedenen Tiefen, so zeigt sich, daß ihre Verbindungslinien die bekannte EKMAN-Spirale ergeben. Die EKMANsche Reibungstiefe beträgt übrigens

$$D = \pi \sqrt{\frac{2A_V}{f}} \approx 40,7 \text{ m}$$

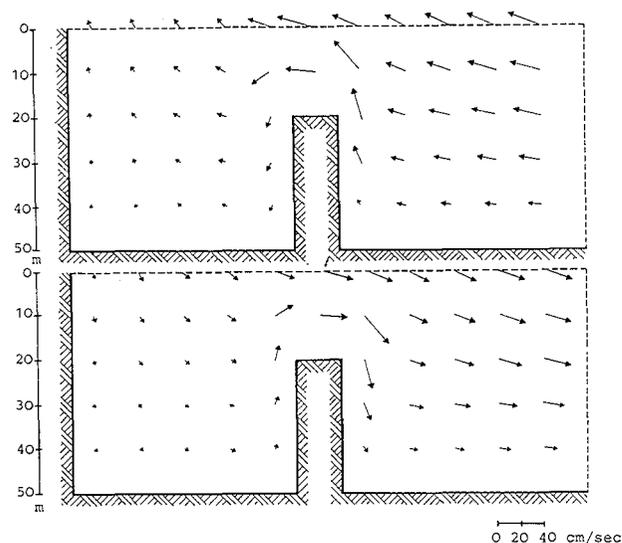


Abb. 4. Gezeitenenergie erzeugte Zirkulation in einem offenen Kanal mit einer Querschwelle für zwei Gezeitenphasen (Längsschnitt)

in guter Übereinstimmung mit der Rechnung; darin ist 40 m diejenige Tiefe, in der sich die Richtung des Oberflächenstroms genau um  $180^\circ$  gedreht hat.

Die Rechnung ermöglicht schließlich noch einen Vergleich mit der instationären EKMANSchen Theorie. Danach spielt sich der rechtsabgelenkte Oberflächenvektor in Form einer CORNUSchen Spirale auf die  $45^\circ$ -Richtung ein. Die Übereinstimmung der beiden Hodographen ist bemerkenswert.

Wir wenden uns jetzt Gezeitenvorgängen in schematischen Seegebieten zu. Die Abbildung 4 zeigt dazu einen Längsschnitt durch das gezeitenbedingte Strömungsfeld in einem Kanal zu zwei um eine halbe Periode getrennten Gezeitenphasen. Die Gezeit wird durch die Randbedingung am rechten Rand in das Modell gesteuert.

Aus der Abbildung wird ersichtlich, daß auch im Falle einer variablen Tiefenverteilung – es handelt sich hier zunächst nur um eine submarine Schwelle – sinnvolle vertikale Geschwindigkeitsverteilungen berechnet werden.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß mit den vorgelegten Ergebnissen für schematische dreidimensionale Gebiete das zugrundeliegende numerische Verfahren seine Eignung zur Behandlung hydrodynamischer Fragen hinreichend erwiesen hat. Die Annahme einfacher geometrischer Formen erscheint aus Gründen der leichteren Fehlererkennung und des geringeren Rechenaufwandes in der Testphase eines neuen Modells unbedingt geboten. Andererseits bilden die Einführung einer variablen Tiefenverteilung und die Einbeziehung einer bodennahen Grenzschicht bereits den Beginn des Überganges zu natürlichen Gegebenheiten, wie sie im nun folgenden Nordseemodell vorliegen.

#### 4. Das Nordseemodell

Ausgangspunkt für die Diskretisierung war das seit Jahren im Institut für Meereskunde Hamburg verwendete Horizontalmodell mit 37 km Gitterabstand. Dieses Modell

wurde nun – wie oben gezeigt – durch die Hinzunahme von weiteren 10 Rechenebenen in der Vertikalen zu einem dreidimensionalen Modell erweitert. Die einzelnen Rechenebenen wurden an der Oberfläche, in 3, 6, 10, 25, 50, 150, 220 und 300 m Tiefe sowie 3 und 1 m über dem Boden und im Boden selbst angeordnet. Dort, wo infolge geringer Wassertiefen

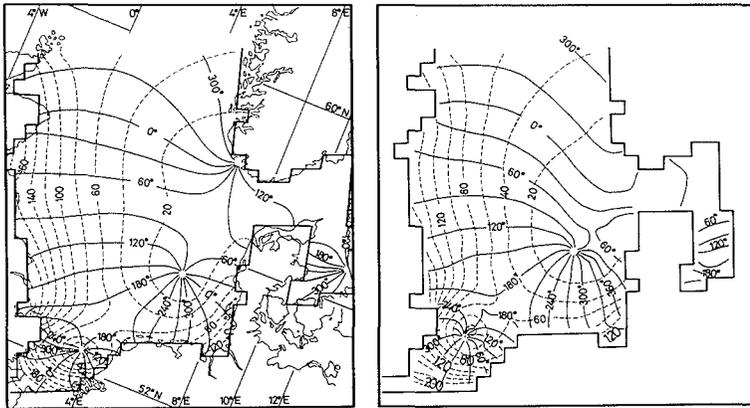


Abb. 5.  $M_2$ -Gezeit in der Nordsee. Linien gleicher Phase, bezogen auf Greenwich (—), und gleicher Amplitude in cm (---) für ein zweidimensionales (linkes) und ein dreidimensionales Modell mit 11 Rechenebenen (rechtes Bild)

bestimmte Rechenebenen sinnlos sind, werden diese nicht betrachtet, so daß in den flachen Gebieten der südlichen Nordsee i. a. nur 6–7 Rechenebenen anzutreffen sind.

Das Modell, das von P. SCHÄFER [6] erstellt worden ist, befindet sich gegenwärtig in der Testphase. Die nächsten 3 Abbildungen zeigen erste Ergebnisse, die für die  $M_2$ -Gezeit erhalten worden sind.

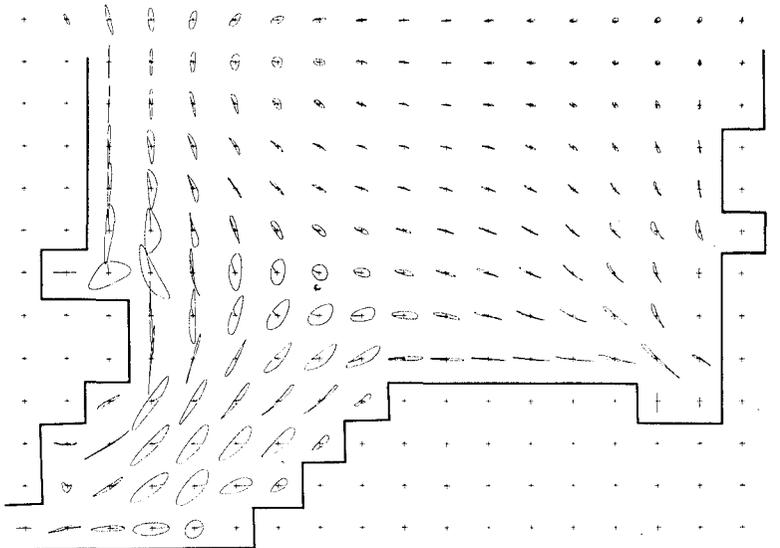


Abb. 6.  $M_2$ -Gezeit in der Nordsee. Stromfiguren in 10 m Tiefe (südlicher Teil)

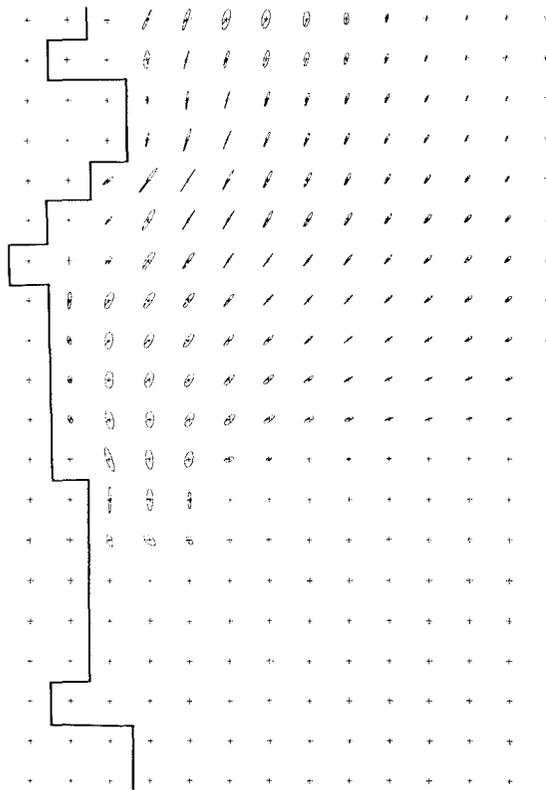
Abb. 7.  $M_2$ -Gezeit in der Nordsee. Stromfiguren in 50 m Tiefe (westlicher Teil)

Abb. 5 zeigt die in diesem dreidimensionalen Modell berechneten Linien gleicher Amplituden (in cm) und gleicher Phasen (in Stunden gegenüber dem Monddurchgang in Greenwich). Zum Vergleich ist das bekannte Resultat eines vertikal integrierten Modells danebengestellt. Die Unterschiede sind kaum zu erkennen.

Demgegenüber zeigen die Gezeitenströme in den einzelnen Tiefen teilweise eine bemerkenswerte Variation und damit Abweichungen von mittleren Werten. Im Bereich der mittelenglischen Küste geschieht es sogar, daß mit der Tiefe der Drehsinn der Stromfigur wechselt.

Die Abbildungen 6 und 7 zeigen abschließend für die südliche Nordsee die berechneten Stromfiguren für die Tiefenhorizonte 10 m und 50 m.

Derartige Aufschlüsse über das dreidimensionale Bewegungsfeld der Nordsee erweitern unsere Kenntnisse über die Dynamik dieses Meeresgebietes ganz beträchtlich. Sie eröffnen die Möglichkeit zur Ankopplung von Transportmodellen, die sich mit der Ausbreitung von eingebrachten Substanzen und der Sandwanderung beschäftigen. Es ist geplant, auch die Bewegungsvorgänge in natürlichen Buchten und Ästuarien auf diese Weise zu untersuchen.

#### Schriftenverzeichnis

- [1] FRIEDRICH, H.: Preliminary results from a numerical multilayer model for the circulation in the North Atlantic. Deutsche Hydrographische Zeitschrift 23, 4, 1970.

- [2] SÜNDERMANN, J.: Die hydrodynamisch-numerische Berechnung der Vertikalstruktur von Bewegungsvorgängen in Kanälen und Becken. Mitt. Inst. Meereskd. Univ. Hamb. 19, 1971.
- [3] HANSEN, W.: Hydrodynamical methods applied to oceanographic problems. Mitt. Inst. Meereskd. Univ. Hamb. 1, 1962.
- [4] LEENDERTSE, J. J.: Aspects of the computational model for longperiod water wave propagation. RAND Memorandum 5294, Delft, 1967.
- [5] KAGAN, B. A.: Hydrodynamical models of ocean tides (in Russian). Gidrometeorizdat, Leningrad, 1968.
- [6] SCHÄFER, P.: Ein dreidimensionales diagnostisches Nordseemodell zur Untersuchung großräumiger barokliner Bewegungsvorgänge. Dissertation, Universität Hamburg, 1975.