

# Numerische Modellierung von Strömungen und Salzausbreitung in Ästuarien

Von Karsten Fischer

## Zusammenfassung

Es wird ein numerisches Modell für Strömungen und Salzausbreitung in Ästuarien vorgestellt, wobei ein klassisches Verfahren zur Lösung der Bewegungsgleichungen und ein neues Verfahren zur Lösung der Transportgleichung angewandt werden. Die Auswirkungen der baroklinen Kräfte (welche durch Dichteunterschiede verursacht werden) auf die Strömungen werden in einem zweidimensionalen  $x$ - $z$ -Modell untersucht, und es wird eine gute Übereinstimmung zwischen numerischer Lösung, exakter Lösung und experimentellen Ergebnissen für den Fall einer stationären Salzzunge gefunden; außerdem wird eine stationäre Strömungsverteilung für ein durchmischtes Ästuar berechnet.

## Summary

*A numerical model for calculating flow velocities and salt dispersion in estuaries is presented, combining a classical solution scheme for the dynamic equations with a new solution scheme for the transport equation. The effects of baroclinic forces (caused by density differences) on the dynamics are studied in a two-dimensional  $x$ - $z$  model, and a good comparison found between numerical solution, exact solution and experimental results for a stationary salt wedge; furthermore, a stationary solution for the flow in a well-mixed estuary is calculated.*

## Inhalt

|  |   |
|--|---|
| 1. Einführung . . . . .  | 1 |
| 2. Numerisches Verfahren . . . . .   | 2 |
| 3. Halbanalytische Vergleichslösung für die stationäre Salzzunge . . . . . | 3 |
| 4. Numerische Ergebnisse . . . . .   | 4 |
| 5. Schlußfolgerungen . . . . .   | 6 |
| 6. Würdigungen . . . . .   | 6 |
| 7. Schriftenverzeichnis . . . . .  | 7 |

## 1. Einführung

In der Brackwasserzone von Ästuarien werden die Vertikalprofile der Strömungsgeschwindigkeit im allgemeinen stark beeinflusst durch die baroklinen Kräfte, so daß am Boden eine stromauf gerichtete Gegenströmung entsteht. Solche Gegenströmungen treten nicht nur bei geschichteter Strömung auf, sondern auch in durchmischten Ästuarien (IPPEN, 1966, Kap. 13), und sie können große wasserbauliche Probleme hervorbringen, wie z. B. Gebiete starker Versandung oder Eindringen von Salzwasser. Sie sind eine direkte Folge der Einleitung von Süßwasserflüssen in das salzhaltige Meer.

Für die modellmäßige Bearbeitung derartiger Strömungsverhältnisse gibt es zwei Möglichkeiten: a) das hydraulische Modell mit variabler Dichte (Salz-Süßwasser, Wärme)

und b) das mathematische Modell mit vertikaler Strukturierung. In der vorliegenden Arbeit wird für das mathematische Modell die Frage untersucht, wie gut die baroklinen Wechselwirkungen mittels numerischer Verfahren wiedergegeben werden. Als Testbeispiel wird das Salzzungenproblem behandelt, weil hierbei die baroklinen Kräfte maßgeblich und analytische Vergleichslösungen möglich sind. Hydraulische Modelluntersuchungen von Salzzungen (IPPEN, 1966, Kap. 11) haben gute Erfolge gezeigt, während mathematische Behandlungen überwiegend analytische Ergebnisse für stark vereinfachte Problemstellungen (Stationarität, geometrisch einfache Ränder) ergaben (LEE, 1974; RATTRAY/MITSUDA, 1974; RIGTER, 1975). Bei der numerischen Behandlung sind solche Vereinfachungen nicht notwendig.

Die Hauptschwierigkeit beim numerischen Modell tritt bei der Lösung der Transportgleichung auf. Die bekannten Verfahren zur Lösung dieser Gleichung (wie z. B. Differenzenverfahren mit symmetrischen oder stromauf gerichteten räumlichen Differenzen, LAX-WENDROFF, ADI, LEAPFROG, oder GALERKIN-Finite-Elemente) bringen unsinnige Ergebnisse, wenn der Transport eines scharfen Dichtesprunges berechnet werden soll wie beim Salzzungenproblem. Numerische Diffusion, Massenverluste, Verletzungen des 2. Hauptsatzes der Thermodynamik oder sogar instabile Lösungen treten auf. Diese numerischen Fehler können beträchtlich verringert werden durch die Verwendung von Differenzenverfahren höherer Ordnung (FROMM, 1968); aber damit steigt der Rechenaufwand, und die Formulierung der Randbedingungen wird kompliziert. Eine andere Möglichkeit ist die Verwendung von beweglichen Differenzengittern; hierbei wird jedoch durch scheinende und kreisende Strömungen von Zeit zu Zeit eine Rückinterpolation auf ein festes Differenzengitter notwendig, so daß der Vorteil des beweglichen Gitters nur teilweise erhalten bleibt, während der numerische und programmiertechnische Aufwand sehr hoch ist. Fehler in der Lösung der Transportgleichung können das gesamte numerische Modell in Frage stellen, weil eine fehlerhafte Dichteverteilung über die dadurch verursachten fehlerhaften baroklinen Kräfte auf die Lösung der Bewegungsgleichung einwirkt. Die Frage ist, ob die numerische Verbreiterung von Dichtesprüngen noch eine hinreichend genaue Lösung der Bewegungsgleichung zuläßt.

Die vorliegende Arbeit beschreibt ein neues Lösungsverfahren für die Transportgleichung, wodurch die obengenannten numerischen Fehler wesentlich reduziert werden. Die numerische Lösung wird mit einer halbanalytischen Lösung verglichen, um die Qualität des numerischen Verfahrens zu überprüfen. Ein weiterer Vergleich mit experimentellen Daten stellt den Bezug zur physikalischen Realität her. Eine weitere Rechnung zeigt die Strömungsverhältnisse in einem durchmischten Ästuar.

## 2. Numerisches Verfahren

Betrachtet wird ein vertikaler Längsschnitt durch ein idealisiertes Ästuar, wobei die x-Achse in Richtung auf den landseitigen Süßwasserzufluß zeigt, während die z-Achse entgegen der Erdanziehung nach oben gerichtet ist. Die seitliche (y-)Abhängigkeit wird vernachlässigt. Der Koordinatenursprung liegt am seeseitigen Ende des Ästuars in Höhe des ungestörten Wasserspiegels. Folgende Gleichungen liegen dem Modell zugrunde:

die Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - A \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

die Gleichung für den hydrostatischen Druck

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g = 0 \quad (2)$$

die Kontinuitätsgleichung für inkompressible Strömung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

und die Transportgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

Hierbei sind  $u$  und  $w$  die Geschwindigkeitskomponenten in  $x$ - bzw.  $z$ -Richtung,  $t$  die Zeit,  $p$  der Druck,  $g$  die Gravitationsbeschleunigung,  $\rho$  die Dichte und  $A$  der Koeffizient der vertikalen turbulenten Reibung. Die Vernachlässigung von konvektiven Termen in (1) und Diffusionstermen in (4) ermöglicht eine halbanalytische Vergleichslösung und wird durch die Übereinstimmung mit experimentellen Ergebnissen später gerechtfertigt.

Die dynamischen Gleichungen (1-3) wurden mit dem Verfahren von SÜNDERMANN (1971) gelöst. Für die Transportgleichung wurde ein neues Verfahren entwickelt (FISCHER, 1977). Ausgangspunkt dieses Verfahrens ist die Darstellung der Dichte  $\rho$  in einem Differenzgitter mittels Hermite-Interpolationsfunktionen. Als zeitabhängige Variable in jedem Gitterpunkt werden die Dichtewerte und ihre räumlichen Gradienten behandelt, für die jeweils eine Transportgleichung gelöst wird. Das Verfahren liefert bei kleinen Zeitschritten vergleichbare, z. T. sogar bessere Ergebnisse als Differenzenverfahren höherer Ordnung, ohne deren numerischen und programmiertechnischen Aufwand zu benötigen.

### 3. Halbanalytische Vergleichslösung für die stationäre Salzzunge

Bei der stationären Betrachtung entfällt in (1) die partielle Ableitung nach der Zeit  $t$ . Damit läßt sich für die Salzzunge und die darüberliegende Süßwasserschicht jeweils eine quadratische  $z$ -Abhängigkeit für die Geschwindigkeit  $u$  durch Integration berechnen. Die freien Koeffizienten werden durch folgende Bedingungen festgelegt:

- Die Geschwindigkeit  $u$  am Boden ist Null,
- die Geschwindigkeit  $u$  ist an der Grenzfläche zwischen Süß- und Salzwasser stetig,
- der Durchfluß in  $x$ -Richtung durch jeden Querschnitt der Salzzunge ist Null,
- der Durchfluß in  $x$ -Richtung durch jeden Querschnitt der Süßwasserschicht ist gleich einer vorgegebenen Konstanten  $\alpha$ .

Aus dem damit bestimmten Geschwindigkeitsprofil lassen sich durch zwei weitere Bedingungen die Höhe des Wasserspiegels  $h(x)$  sowie die Tiefe der Grenzfläche  $t(x)$ , jeweils gemessen von der ungestörten Wasseroberfläche aus, bestimmen:

- Die tangentialen Reibungskräfte an der Wasseroberfläche sind Null und
- die tangentialen Reibungskräfte an der Grenzfläche sind stetig.

Aus diesen Bedingungen erhält man folgendes System von Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{1}{c} \frac{\partial h}{\partial x} \left( \frac{3}{2} \frac{h+t}{a-t} + 1-c \right) \quad (5)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = - \frac{12 Q A}{g (h+t)^2 (4h+3a+t)} \quad (6)$$

mit der Konzentration  $c = \frac{\rho - \rho^0}{\rho}$  ( $\rho^0$  = Dichte des Süßwassers,  $\rho$  = Dichte des Salzwassers) und der konstanten Wassertiefe  $a$ . Dieses Gleichungssystem wurde numerisch gelöst; die Lösung wird im vorliegenden Artikel als halbanalytisch oder exakt bezeichnet.

#### 4. Numerische Ergebnisse

Als Randbedingungen des numerischen Ästuarmodells wurden Wasserstand und vertikale Dichteprofile an den offenen Rändern fest vorgegeben. Das Modell besaß eine Längenausdehnung von 36 km, in 12 Abschnitte unterteilt, sowie eine Wassertiefe von 13,7 m. Die Konzentration des Salzwassers betrug 3 ‰. Der Wasserstand am seeseitigen Ende wurde auf  $h = 0$  festgehalten, am landseitigen Ende auf  $h = 4,7$  cm. Der hierdurch verursachte Süßwasserzufluß und die am seeseitigen Ende vorgegebene Salzwasserschicht von 6,8 m Dicke führten innerhalb von ca. 4 Wochen Modellzeit zur Ausbildung einer stationären Salzzunge, die in Abb. 1 dargestellt ist. Die „exakte“ Lösung (durchgezogene

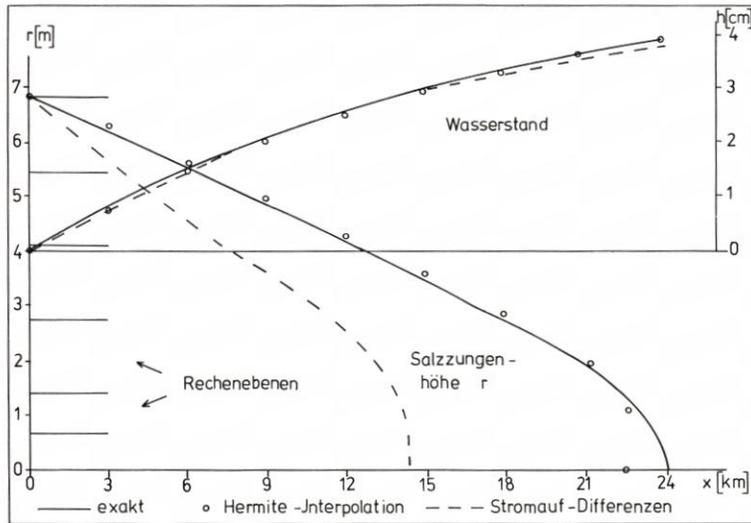


Abb. 1. Stationäre Salzzungenprofile und Wasserstände — halbanalytische Lösung, ○○○ Transport mittels Hermite-Interpolation, --- Transport mittels stromauf gerichteter Differenzen.

Linie) ist die halbanalytische; mit Kreisen ist die numerische Lösung nach dem hier vorgestellten neuen Verfahren zur Behandlung der Transportgleichung dargestellt. Bis auf die Spitze der Salzzunge (wo sich die Grobheit des Differenzennetzes bemerkbar macht) ist eine sehr gute Übereinstimmung vorhanden. Zum Vergleich ist eine weitere numerische Lösung (gestrichelt) eingezeichnet, bei der die Transportgleichung mittels stromauf gerichteter Differenzen gelöst wurde. Die starke numerische Diffusion dieses Verfahrens führt zu einer beträchtlichen Verkürzung der Salzzunge. Im Verlauf des Wasserstandes lassen sich keine gravierenden Unterschiede zwischen den drei Verfahren feststellen, wie aus dem oberen Teil von Abb. 1 zu sehen ist.

Zum Vergleich mit experimentellen Daten wurden die Ergebnisse von KEULEGAN (IPPEN, 1966, Kap. 11) herangezogen. In Abb. 2 ist die halbanalytische Lösung (durch-

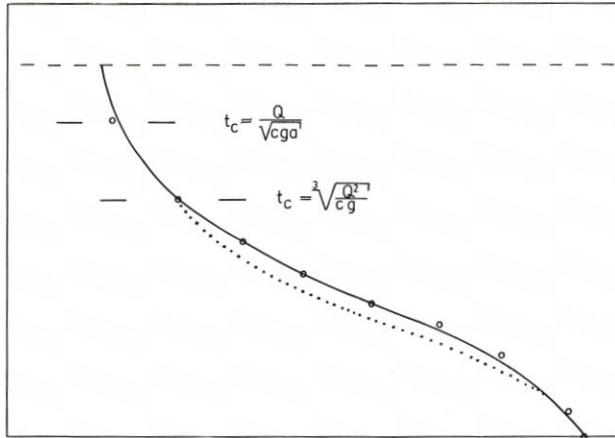


Abb. 2. Vergleich von halbanalytischer Salzzunge (durchgezogene Linie) mit experimentellen Daten.  
 Punktiert: Keulegans Salzzunge, kritische Strömung an der Ästuarmündung  
 Kreise: Keulegans Salzzunge, an halbanalytische Kurve angepaßt  
 Gestrichelt: Wasseroberfläche

gezogene Linie) dargestellt. Zum Vergleich mit KEULEGANS Kurve ist eine Festlegung des seeseitigen Endes des Ästuars notwendig; üblicherweise wird dieser Ort dadurch festgelegt, daß in der Süßwasserschicht kritische Strömung eintritt. Die entsprechende Dicke der Süßwasserschicht beträgt

$$t_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{cg}} \tag{7}$$

Die entsprechende experimentelle Kurve in Abb. 2 ist punktiert dargestellt – die Übereinstimmung mit der halbanalytischen Kurve ist nicht besonders gut. Dabei ist jedoch

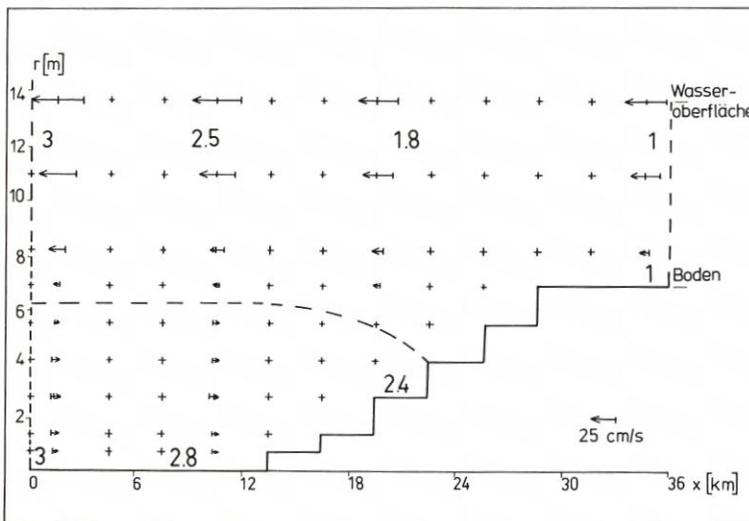


Abb. 3. Strömungsgeschwindigkeiten (Pfeile) und Salzgehalt (Zahlen) in einem durchmischten Ästuar, stationärer Zustand. Die gestrichelte Linie trennt die Gebiete stromauf und stromab gerichteter Geschwindigkeiten.

zu beachten, daß (7) ein homogenes Geschwindigkeitsprofil voraussetzt, was im vorliegenden Fall nicht zutrifft und auch experimentell nicht sehr fundiert ist (IPPEN, 1966, Kap. 11). Wird diese Bedingung fallengelassen und statt dessen eine freie Anpassung der Kurven vorgenommen, so zeigen die Kreise in Abb. 2 eine sehr gute Übereinstimmung; die entsprechende kritische Tiefe in diesem Falle ist etwa

$$t_c \approx \frac{Q}{\sqrt{cga}} \quad (8)$$

Somit ist gezeigt, daß das vorliegende numerische Modell eine gute Beschreibung der baroklinen Wechselwirkungen in einem geschichteten Ästuar zu leisten vermag.

Für ein durchmishtes Ästuar sind geringere Schwierigkeiten bei der Lösung der Transportgleichung vorhanden, weil es keine scharfen Dichtesprünge gibt. Eine entsprechende Rechnung ist in Abb. 3 dargestellt. Hierbei wurde die Transportgleichung (4) um einen horizontalen und einen vertikalen Diffusionsterm erweitert. An den offenen Rändern wurden vollständig durchmischte Dichteprofile vorgegeben (Zahlen geben Konzentrationswerte an). Im stationären Zustand ist im Inneren des Ästuars eine partielle Schichtung entstanden. Auf Grund des longitudinalen Dichtegefälles sowie des ansteigenden Bodens gibt es eine stromauf gerichtete Bodenströmung, deren Bereich in der unteren linken Ecke gestrichelt abgegrenzt ist. Weitere Beispielrechnungen und Details sind der Diplomarbeit von WITTORF (1975) zu entnehmen.

## 5. S c h l u ß f o l g e r u n g e n

Das vorgestellte numerische Modell für Strömungen und Salzausbreitung in Ästuarien wurde mit Hilfe einiger vereinfachter Beispielrechnungen auf seine Anwendbarkeit geprüft. Dabei zeigte sich, daß für den Fall einer stationären Salzzunge Ergebnisse erzielt wurden, die mit der exakten Lösung und auch mit experimentellen Daten sehr gut übereinstimmen. Insbesondere das Problem der numerischen Diffusion konnte mit einer neuen Methode zur Lösung der Transportgleichung bewältigt werden. Damit ist nachgewiesen, daß das vorgestellte numerische Modell auf Ästuarien von beliebigem Schichtungsgrad anwendbar ist. Die charakteristische, durch barokline Kräfte verursachte Gegenströmung in Bodennähe wurde im geschichteten Ästuar ebenso wie im durchmischten Ästuar gefunden; sie wird offenbar hauptsächlich durch einen longitudinalen Salzgehaltsgradienten verursacht. Diese für den Sedimenttransport außerordentlich bedeutsame Strömung kann weder aus Messungen von Oberflächengeschwindigkeiten noch aus hydraulischen Modellen mit konstanter Wasserdichte oder aus mathematischen, vertikal gemittelten Modellen ermittelt werden. Auch in durchmischten Ästuarien sind daher vertikal gemittelte mathematische Modelle oder homogene hydraulische Modelle nur begrenzt anwendbar.

## 6. W ü r d i g u n g e n

Die vorliegende Arbeit wurde aus Mitteln der Deutschen Forschungsgemeinschaft, Sonderforschungsbereich 79 (Wasserforschung im Küstenbereich), finanziert. Der größte Teil der Programmierarbeiten wurde von W. P. WITTORF verrichtet. J. SÜNDERMANN unterstützte die Arbeit mit Computerprogrammen und hilfreichen Ratschlägen.

## 7. Schriftenverzeichnis

- FISCHER, K.: Convective Difference Schemes and Hermite Interpolation. Proc. Int. Symp. on Innovative Numerical Analysis in Applied Engineering Science, Versailles, 1977.
- FROMM, J. E.: A Method für Reducing Dispersion in Convective Difference Schemes. J. of Comp. Phys., Vol. 3, p. 176-189, 1968.
- IPPEN, A. T.: Estuary and Coastline Hydrodynamics. McGraw-Hill, New York, 1966.
- LEE, F. A.: Hydrodynamical Stability of Salt Wedge. Proc. ASCE Hydraul. Div., Vol. 100, p. 17-23, 1974.
- RATTRAY, M. und MITSUDA, E.: Theoretical Analysis of Conditions in a Salt Wedge. Est. and Coast. Mar. Sc., Vol. 2, p. 375-394, 1974.
- RIGTER, B. P.: Minimum Length of Salt Intrusion in Estuaries, Proc. ASCE Hydraul. Div., Vol. 101, p. 765, 1975.
- SÜNDERMANN, J.: Die hydrodynamisch-numerische Berechnung der Vertikalstruktur von Bewegungsvorgängen in Kanälen und Becken. Mitt. Inst. Meereskunde Univ. Hamburg, 19, 1971.
- WITTORF, W. P.: Ein baroklines 2-Phasen-Modell für Flachwasserwellen. Diplomarbeit, Techn. Univ. Hannover, 1975.