

# Numerische Wasserstandsmodelle zur Berechnung von Flachwasserwellen in Gerinnen und Ästuarien

Von Udo Meißner

## Zusammenfassung

Zur Berechnung von langperiodischen Strömungsvorgängen wird ein Konzept für hybride finite Elemente entwickelt, das zu Berechnungsmodellen führt, die nur den Wasserstand als unbekannte Zustandsgröße für das Gesamtsystem beinhalten. Diese H-Modelle zeichnen sich aus durch hohe Flexibilität bei der Kopplung von Gerinne- und Ästuarmodellen sowie durch reduzierten Rechenaufwand.

## Summary

*The concept of hybrid finite elements for the analysis of long-period water-wave problems is presented, resulting in numerical models which include only the water depth parameters as unknowns of the assembled flow system. These H-models show a high flexibility in coupling of one- and two-dimensional models and a reduction of the computational effort.*

## Inhalt

1. Einführung . . . . .	43
2. Grundgleichungen . . . . .	44
3. Methode der gewichteten Residuen . . . . .	46
4. Stabilität . . . . .	49
5. Zeitintegrationen . . . . .	52
5.1 Integration der Bewegungsgleichung . . . . .	52
5.2 Integration der Kontinuitätsgleichung . . . . .	53
6. Beispielrechnung . . . . .	55
7. Schriftenverzeichnis . . . . .	57

## 1. Einführung

Finite-Element-Modelle für Flachwasserwellen wurden zuerst von GROTKOP (1973) sowie TAYLOR und DAVIS (1974) vorgestellt; später folgten weitere Autoren. Diese Modelle werden im folgenden als gemischte Modelle bezeichnet, da sie sowohl den Wasserstand als auch die Geschwindigkeitskomponenten als unbekannte Parameter in den Knotenpunkten des Elementnetzes im Gesamtsystem mitführen.

Mit dem Konzept hybrider Elemente wird es möglich, den numerischen Rechenaufwand zu reduzieren und praktische Aufgabenstellungen wirtschaftlicher zu lösen, da für jeden Knotenpunkt des Gesamtsystems nur der Wasserstand als einzige Unbekannte zu ermitteln ist. Darüber hinaus zeigen diese Modelle eine außerordentlich hohe Flexibilität für die Kopplung von Gerinne- und Ästuarmodellen sowie für die Berücksichtigung von trockenfallenden Wattgebieten – Vorteile, die von HERRLING (1977) ausführlich dargelegt werden.

## 2. Grundgleichungen

Die grundlegenden partiellen Differentialgleichungen, die die ein- und zweidimensionalen Strömungsvorgänge in vertikal integrierter Form mathematisch beschreiben, sind bei HOLZ und WITTHUM (1976) zusammengestellt. Im folgenden werden diese Gleichungen entsprechend Abb. 1 in einer Wasserstands-Durchflußmengenformulierung benutzt, die zur korrekten Einhaltung von Stetigkeitsanforderungen notwendig ist.

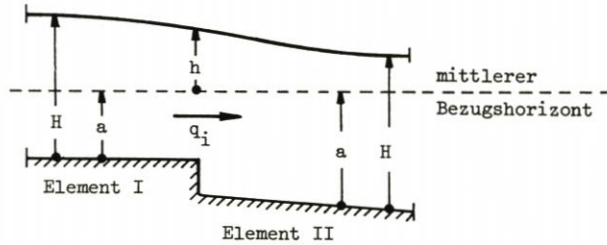


Abb. 1

## Bewegungsgleichung (2-dim.)

$$\dot{q}^i + (v^i q^j)_{,j} - \Omega \epsilon^{ik} \epsilon_{kj} q^j + \lambda \frac{|v^j|}{H} q^i + \frac{1}{2} g e^{ij} (H^2)_{,j} + e^{ij} k_{,j} H = \mu |w^j| w^i \quad (1)$$

$$\text{Durchfluß} \quad q^i = v^i H \quad (2)$$

$$\text{zeitliche Ableitung} \quad \dot{q}^i = q^i_{,t}$$

$H$  = totale Wassertiefe

$v^i$  = mittlere Geschwindigkeitskomponenten in zwei Richtungen

$\Omega$  = Coriolis-Beiwert

$\lambda$  = globaler Reibungsbeiwert

$g$  = Erdbeschleunigung

$w^i$  = Windkomponenten, die über den Scherparameter  $\mu$  an der Wasseroberfläche angreifen

$e^{ij}$  = Metriktensor,  $\epsilon^{ij} = \epsilon$ -Tensor

$$k_{,j} = \frac{1}{\rho} p_{,j} - g a_{,j} \quad (3)$$

mit dem atmosphärischen Druck  $p$  auf der Wasseroberfläche, der Dichte  $\rho$  des Wassers und der Tiefe  $a$ , bezogen auf einen mittleren Bezugshorizont.

## Kontinuitätsgleichung (2-dim.)

$$\dot{h} + q^j_{,j} = 0 \quad (4)$$

Im Finite-Element-Konzept werden diese Gleichungen getrennt für jedes Element mit den Rand- und Übergangsbedingungen angesetzt.

$$\begin{aligned} H &= \bar{H} & h_{II} &= h_{II} \\ q^i &= \bar{q}^i & q^i_{II} &= q^i_{II} \end{aligned} \quad (5)$$

wobei  $\bar{H}$  und  $\bar{q}^i$  am Rande vorgegebene Größen darstellen. Das numerische Verfahren soll in diskreten Zeitabständen  $\Delta t$  die Zustandsgrößen  $h$  und  $q^i$  liefern.

Unter der Annahme, daß die zeitlichen Veränderungen  $\Delta H$  und  $\Delta q^i$  innerhalb eines jeden Zeitschrittes  $\Delta t$  hinreichend klein sind,

$$H_{t_1} = H_{t_0} + \Delta H \quad q^i_{t_1} = q^i_{t_0} + \Delta q^i$$

können die nichtlinearen Terme der Bewegungsgleichung (1) durch eine TAYLOR-Reihenentwicklung linearisiert werden:

$$(v^i q^j)|_j = \hat{v}^j q^i|_j + \hat{v}^i q^j|_j - \hat{v}^i \hat{v}^j H_{,j} \quad (H^2)_{,j} \approx 2 \hat{H} H_{,j}$$

wobei  $\hat{H}$  und  $\hat{q}^i$  mittlere Größen zum Zeitpunkt  $t_0$  darstellen (Abb. 2).

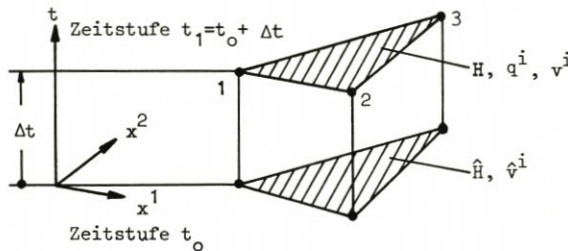


Abb. 2

Die Langsamkeit des Bewegungsablaufs gestattet es, wie üblich nur die linearisierte Bewegungsgleichung in zeitlicher Hinsicht zu integrieren:

linearisierte Bewegungsgleichung (2-dim.)

$$\begin{aligned} M^i &= \dot{q}^i + \hat{v}^j q^i|_j + \hat{v}^i q^j|_j - \Omega e^{ik} \epsilon_{kj} q^j + R q^i + (e^{ij} g \hat{H} - \hat{v}^i \hat{v}^j) H_{,j} + \\ &+ e^{ij} k_{,j} H - \mu |w^j| w^i = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{mit } R = \lambda \frac{|\hat{v}^j|}{\hat{H}}$$

wobei  $k_{,j}$  und der globale Reibungsparameter  $R$  innerhalb eines jeden Elements als konstant betrachtet werden.

Für den eindimensionalen Fall der Gerinneströmung vereinfachen sich (6) und (4) zu der

linearisierten Bewegungsgleichung (1-dim.)

$$\begin{aligned} M^1 &= \dot{q}^1 + 2 \hat{v}^1 q^1|_1 + R q^1 + b (g \hat{H} - \hat{v}^1 \hat{v}^1) H_{,1} + k_{,1} b H = 0 \\ \text{mit } R &= \lambda \frac{|\hat{v}^1|}{\hat{H}} \quad \text{und zu der} \end{aligned} \quad (7)$$

Kontinuitätsgleichung (1-dim.)

$$b \dot{H} + q^1|_1 = 0 \quad (8)$$

worin  $b$  die Breite des Gerinnes darstellt und die Durchflußmenge durch

$$q^1 = v^1 b H \quad (9)$$

definiert ist.

3. Methode der gewichteten Residuen

Im Gegensatz zu Differenzenverfahren, die von der direkten Diskretisierung der Differentialgleichungen ausgehen, basiert die Methode der finiten Elemente auf einem integralen Fehlerabgleich zwischen der exakten und der konstruierten Näherungslösung für die Differentialgleichungen. Für diesen Fehlerabgleich steht die Methode der gewichteten Residuen zur Verfügung, wobei im vorliegenden Fall die Integration in Ortsrichtung von der zeitlichen Integration getrennt wird. Für (6) bzw. (7) ergibt sich damit die

gewichtete Bewegungsgleichung

$$\iint \delta W^k e_{kj} M^j dA = 0 \quad (10)$$

und für (4) bzw. (8) die

gewichtete Kontinuitätsgleichung

$$\int_A \delta W (b \dot{H} + q^j|_j) dA - \int_{S_w} \delta W q^j n_j ds + \int_{S_q} \delta W \bar{q}^j n_j ds = 0 \quad (11)$$

worin  $\delta W^k$ ,  $\delta W$  die Gewichtsfunktionen,  $n_j$  der nach außen gerichtete Normalenvektor auf dem Rande der finiten Elemente sind und das Randintegral  $S_q$  nur auf denjenigen Rändern auszuwerten ist, für die Wassermengen  $\bar{q}^j$  als Randbedingungen vorgeschrieben sind.

Das Randintegral  $S_w$  ist für die Konzeption des H-Modells von grundlegender Bedeutung, da es Übergangsbedingungen für die Wassermengen liefert, die von Element zu Element im Gegensatz zu den gemischten Modellen nicht mehr stetig miteinander verknüpft werden. Verknüpft man z. B. zwei Elemente I und II über eine gemeinsame Seite I-K miteinander, so folgt aus (11)

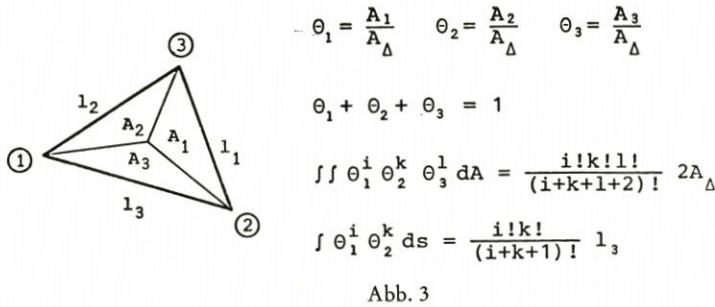
$$\int_{I}^{\circledast K} \delta W (q_I^j - q_{II}^j) n_{jI} ds = 0$$

wenn die Stetigkeit der Gewichtsfunktion gegeben ist. Daraus ergibt sich als natürliche Übergangsbedingung für die Wassermengen:

$$q_I^j = q_{II}^j$$

Als finite Elemente werden für den zweidimensionalen Fall Dreiecke verwendet. Sowohl im ein- als auch im zweidimensionalen Fall ist es zweckmäßig, natürliche Koordinaten, wie in Abb. 3 dargestellt, zu benutzen.

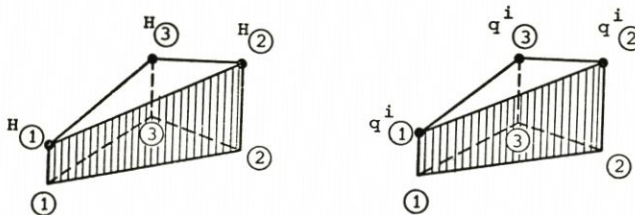




Die Näherungsfunktionen für die Zustandsgrößen sind entsprechend Abb. 4 lineare Ansatzfunktionen.

$$H = H_{(1)} \theta_1 + H_{(2)} \theta_2 + H_{(3)} \theta_3$$

$$q^i = q_{(1)}^i \theta_1 + q_{(2)}^i \theta_2 + q_{(3)}^i \theta_3 \tag{12}$$



Für die Integration von (10) und (11) wurde von vielen Autoren stets das GALERKIN-Verfahren verwendet, bei dem die Gewichtsfunktionen als erste Variation der Ansatzfunktionen zu nehmen sind und das Randintegral  $S_w$  über alle Seiten des Elements zu erstrecken ist:

#### Gewichtsfunktionen nach Galerkin

$$\delta w^k = \delta q^k$$

$$= \delta q_{(1)}^k \theta_1 + \delta q_{(2)}^k \theta_2 + \delta q_{(3)}^k \theta_3$$

$$\delta w = \delta H$$

$$= \delta H_{(1)} \theta_1 + \delta H_{(2)} \theta_2 + \delta H_{(3)} \theta_3 \tag{13}$$

Wie die durchgeführten Beispielrechnungen zeigen, ist dieses Verfahren anwendbar, jedoch ergeben sich erhebliche Nachteile, die seine Brauchbarkeit in Frage stellen. Es erzeugt, wie am Falle der ungedämpften Schwingung zu erkennen ist, eine erhebliche numerische Dämpfung, die im allgemeinen unerwünscht ist.

Dieser Nachteil konnte von GÄRTNER (1976) durch den Gebrauch von konstanten Gewichtsfunktionen (Abb. 5) beseitigt werden, was zu einer verallgemeinerten Kollokationsmethode führte.

Gewichtsfunktionen der Teilgebietskollokation

$$\begin{aligned} \delta w^k &= \delta q_{\text{I}}^k \\ \delta W &= \delta H_{\text{I}} \end{aligned} \tag{14}$$

Für die Gleichung des Knotens I ist dabei das Randintegral  $S_w$  nur auf den direkt anschließenden Rändern (Abb. 5) auszuwerten.

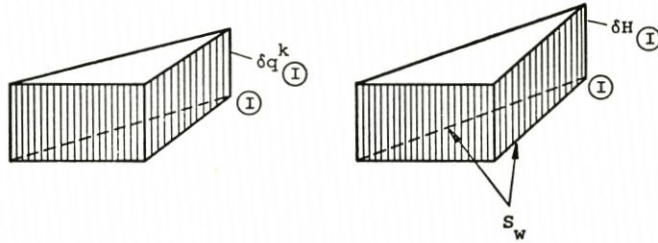


Abb. 5

Gleichung (11) läßt sich anschaulich deuten, wenn man entsprechend Abb. 6 die Gleichung eines Elementes I für den Knoten 3 aufschreibt.

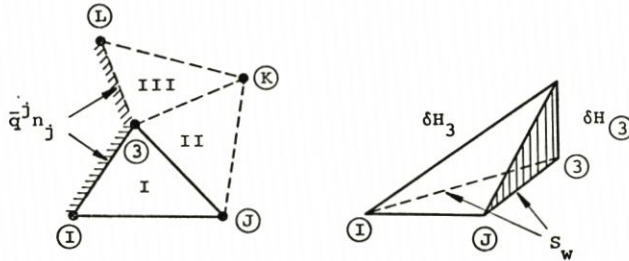


Abb. 6

Nach Anwendung des GAUSSschen Integralsatzes ergibt sich

$$\iint_A \delta H_{\text{I}} H_{\text{I}} dA + \int_{\text{I}}^{\text{J}} \delta H_{\text{I}} q^j n_j ds = - \delta H_{\text{I}} \bar{Q}_{\text{I}} \tag{15}$$

Legt man die konstante Gewichtsfunktion  $\delta H_{\text{I}}$  über alle Elemente, die sich entsprechend Abb. 6 an den gemeinsamen Knoten 3 anschließen, und faßt man die (15) entsprechenden Gleichungen der Elemente I, II, III zusammen, so erhält man schließlich

$$\begin{aligned} & \iint_A \delta H_{\text{I}} \dot{H}_{\text{I}} dA + \iint_A \delta H_{\text{II}} \dot{H}_{\text{II}} dA + \iint_A \delta H_{\text{III}} \dot{H}_{\text{III}} dA + \int_{\text{I}}^{\text{J}} \delta H_{\text{I}} q^j n_j ds + \\ & + \int_{\text{I}}^{\text{K}} \delta H_{\text{II}} q^j n_j ds + \int_{\text{I}}^{\text{L}} \delta H_{\text{III}} q^j n_j ds = - H_{\text{I}} \bar{Q}_{\text{I}} \end{aligned}$$

Die physikalische Bedeutung dieser Gleichung für den Knoten 3 ist erkennbar: Das zeitliche Speichervermögen des Gebietes und die Zu- und Ausflüsse längs des Randes I-J-K-L werden in gewichteter Art gleichgesetzt dem Zufluß  $-\bar{Q}_{\text{I}}$ , der sich als Resultierende aus den gleichmäßig verteilten, vorgegebenen Randzuflüssen  $q^j$  längs I-3-L ergibt.

Setzt man die Näherungsfunktionen (12) und die Gewichtsfunktionen (13) bzw. (14) in (10) und (11) ein, so folgen nach Durchführung der Integration die

Bewegungsgleichung in Matrizenform

$$\dot{\underline{q}} - \underline{m}_q \underline{q} = \underline{m}_H \underline{H} + \underline{r}_w \quad (16)$$

und die

Kontinuitätsgleichung in Matrizenform

$$\underline{\delta H}^T (\underline{n} \dot{\underline{H}} - \underline{s} \underline{q} - \underline{r}_q) = 0 \quad (17)$$

mit dem Wasserstandsvektor

$$\underline{H}^T = [H_1 \ H_2 \ H_3] \quad (18)$$

und dem Durchflußvektor

$$\underline{q}^T = [q_1^i \ q_2^i \ q_3^i] \quad (19)$$

Die Matrix  $n$  ist symmetrisch und nicht negativ definit; die Matrizen  $m_q$  und  $s$  sind unsymmetrisch.

Für gemischte Modelle werden beide Gleichungen zu der

Elementgleichung des gemischten Modells

$$\underline{n}_z \dot{\underline{z}} - \underline{m}_z \underline{z} = \underline{r}_z \quad (20)$$

mit dem Zustandsvektor

$$\underline{z}^T = [q_1^i \ H_1 \ ; \ q_2^i \ H_2 \ ; \ q_3^i \ H_3] \quad (21)$$

zusammengefaßt. Nach dem Zusammenbau aller Elementgleichungen der Einzelemente hat noch die zeitliche Integration für das Gesamtsystem zu erfolgen.

Bei den H-Modellen der hybriden Vorgehensweise wird zunächst für jedes Einzelement die Bewegungsgleichung (16) getrennt integriert und deren Lösung eingesetzt in die Kontinuitätsgleichung (17). Auf diese Weise entstehen Elementgleichungen, die nur noch von den Wasserständen (18) allein abhängen. Um die Konvergenz dieser Vorgehensweise zu sichern, ist es wesentlich, die Stabilität der Integrationen auf der Elementebene zu untersuchen, die, wie später gezeigt wird, von den Eigenwerten der Matrix  $m_q$  abhängig ist. Für den ein- und den zweidimensionalen Fall läßt sich leicht explizit nachweisen, daß die Eigenwerte  $\lambda$  der  $(2 \times 2)$ - bzw.  $(6 \times 6)$ -Matrix  $m_q$

$$\lambda = -R - i\Omega \quad (22)$$

nur von dem Reibungsparameter  $R$  und dem Coriolisparameter  $\Omega$  abhängen.

#### 4. Stabilität

Die Stabilität des numerischen Verfahrens ist verbunden mit der Frage, wie sich das numerische Modell gegenüber kleinen Störungen verhält, die im Ablauf der Berechnung stets zwangsläufig auftreten, wie in Form von Rundungs- und Approximationsfehlern.

Ein Verfahren muß als instabil bezeichnet werden, wenn sich derartige Fehler von Zeitschritt zu Zeitschritt aufschaukeln und damit letztlich die richtige Lösung zerstören. Eine künstliche Dämpfung, die aus dem Rechenverfahren herrührt und als numerische Dämpfung bezeichnet wird, kann daher bis zu einem gewissen Grade erwünscht sein. Sie darf jedoch nicht so groß sein, daß z. B. bei einer ungedämpften Schwingung die richtige Lösung in kurzer Zeit verschwindet. Obwohl die Bewegungsgleichung (1) nichtlinear ist, ist es wichtig, die Stabilität des mit (6) bzw. (7) linearisierten Systems sicherzustellen, denn wenn sich das linearisierte System stabil verhält, so ist auch ein stabiles Verhalten des nichtlinearen Systems zu erwarten, wenn auch nur im Sinne der TAYLOREntwicklung in einer kleinen, begrenzten Umgebung. Ohne die Stabilität des linearisierten numerischen Modells kann die Stabilität des nichtlinearen Schwingungssystems jedoch nicht sichergestellt werden.

Die Untersuchung des Stabilitätsverhaltens des Finite-Element-Systems erfolgt entsprechend der Vorgehensweise von BATHE und WILSON (1973) an der homogenen Systemgleichung

$$\underline{N} \dot{\underline{z}} - \underline{M} \underline{z} = \underline{0} \quad (23)$$

wobei der Vektor  $\underline{z}$  die  $n$  Unbekannten der Knotenpunkte enthält,  $\underline{N}$  eine symmetrische, positiv definite  $(n \times n)$ -Matrix und  $\underline{M}$  eine unsymmetrische Matrix ist.

Mit dem Lösungsansatz

$$\underline{z} = e^{\lambda t} \underline{\phi}$$

erhält man das allgemeine Eigenwertproblem

$$(\underline{N} \lambda - \underline{M}) \underline{\phi} = \underline{0} \quad (24)$$

für das  $n$  Eigenwerte

$$\underline{\Lambda} = \text{diag} [\lambda_1 \dots \lambda_I \dots \lambda_n]$$

bestimmt werden können mit den zugehörigen  $n$  orthonormierten Rechts- und Linkseigenvektoren

$$\underline{\phi}_R = [\underline{\phi}_{R1} \dots \underline{\phi}_{RI} \dots \underline{\phi}_{Rn}] \quad \underline{\phi}_L = [\underline{\phi}_{L1} \dots \underline{\phi}_{LI} \dots \underline{\phi}_{Ln}]$$

Setzt man die Lösung  $\underline{z}$  aus den Rechtseigenvektoren zusammen

$$\underline{z} = \underline{\phi}_R \underline{q}$$

mit den generalisierten Koordinaten

$$\underline{q}^T = [q_1 \dots q_I \dots q_n]$$

so entkoppelt sich (23) zu

$$\underline{I} \dot{\underline{q}} - \underline{\Lambda} \underline{q} = \underline{0} \quad (25)$$

mit

$$\underline{I} = \underline{\phi}_L \underline{N} \underline{\phi}_R \quad \underline{\Lambda} = \underline{\phi}_L \underline{M} \underline{\phi}_R$$

Somit können die Stabilität und das numerische Dämpfungsverhalten eines Zeitintegrationsverfahrens an Stelle von (23) an einer einzigen algebraischen Gleichung von (25)

$$\dot{q}_I - \lambda_I q_I = 0 \quad (26)$$

untersucht werden, wenn eine Aussage über die Eigenwerte  $\lambda_I$  möglich ist. Denn (26) und die Matrixgleichung (23) sind völlig gleichwertig.



Für die H-Modelle wurden zwei Verfahren für die zeitliche Integration der Gleichungen vom Typ (23) ausgewählt und erprobt:

a) die Matrizenfunktion

$$\underline{z} = e^{\underline{A}t} \underline{z}_{t=t_0} \quad \underline{A} = \underline{N}^{-1} \underline{M} \quad (27)$$

b) das CRANK-NICHOLSON-Verfahren

$$(\underline{N} - \underline{M} \theta t) \underline{z} = [\underline{N} + \underline{M} (1-\theta) t] \underline{z}_{t=t_0} \quad (28)$$

Wendet man die Methode a) auf (26) an, so ergibt sich

$$q_I = e^{\lambda_I t} q_{I t=t_0}$$

und man erkennt unmittelbar, daß das Verfahren uneingeschränkt stabil ist, wenn der Realteil  $\alpha_I$  des Eigenwerts

$$\lambda_I = \alpha_I + i \beta_I \quad (29)$$

nicht positiv ist. Denn dann bleibt

$$e^{\lambda_I t} = e^{\alpha_I t} e^{i \beta t}$$

stets beschränkt

$$\rho = e^{\alpha_I t} \stackrel{!}{\leq} 1 \quad \text{für} \quad \alpha_I \leq 0 \quad (30)$$

und der Betrag von  $q_I$  kann von Zeitschritt zu Zeitschritt nicht wachsen. Dies bedeutet, daß für die Größenwahl des Zeitschrittes keinerlei Einschränkung beachtet werden muß, wie das z. B. bei expliziten Integrationsverfahren aufgrund der COURANT-FRIEDRICHS-LEWY-Bedingungen zu erfolgen hat.

Wendet man das CRANK-NICHOLSON-Verfahren b) auf (26) an, so folgt

$$q_I = \frac{1 + \lambda_I (1-\theta) t}{1 - \lambda_I \theta t} q_{I t=t_0}$$

und mit (29)

$$\rho^2 = \frac{[1 + \alpha_I (1-\theta) t]^2 + [\beta_I (1-\theta) t]^2}{(1 - \alpha_I \theta t)^2 + (\beta_I \theta t)^2} \quad (31)$$

Aus der Stabilitätsforderung

$$\rho^2 \stackrel{!}{\leq} 1$$

ergibt sich, daß dieses Verfahren nur uneingeschränkt stabil ist, wenn

$$\theta \geq \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \alpha_I \leq 0 \quad (32)$$

eingehalten ist, denn aus (31) wird

$$\theta - \frac{1}{2} \stackrel{!}{\geq} \frac{\alpha_I}{t (\alpha_I^2 + \beta_I^2)}$$

Da die Stabilität in beiden Fällen von einem negativen Realteil der Eigenwerte abhängt, ist es von fundamentaler Bedeutung, dessen Vorzeichen herauszufinden, insbesondere für das gesamte zusammengebaute Finite-Elementsystem, das aus einer großen Zahl

von Gleichungen bestehen kann. Mit (24) läßt sich jeder Eigenwert bestimmen durch den RAYLEIGH-Quotienten

$$\lambda = \frac{\underline{\phi}_R^* \underline{M} \underline{\phi}_R}{\underline{\phi}_R^* \underline{N} \underline{\phi}_R}$$

mit dem komplexen Eigenvektor

$$\underline{\phi}_R = \underline{u} + i \underline{v}$$

und seiner konjugiert transponierten Form

$$\underline{\phi}_R^* = \underline{u}^T - i \underline{v}^T$$

Da die Matrix N symmetrisch und positiv definit ist, kann der Realteil untersucht werden anhand von

$$\alpha = \frac{\underline{u}^T \underline{M} \underline{u} + \underline{v}^T \underline{M} \underline{v}}{\underline{\phi}_R^* \underline{N} \underline{\phi}_R} \quad (33)$$

mit stets positivem Nenner; an späterer Stelle wird davon noch Gebrauch gemacht werden.

## 5. Zeitintegrationen

Für die hybriden H-Modelle wird die zeitliche Integration der Gleichungen auf zwei Ebenen durchgeführt:

- Die Bewegungsgleichung (16) wird für jedes Element getrennt integriert auf der Elementebene und
- die Kontinuitätsgleichung (17) wird für das Gesamtsystem aus allen Elementen zusammengebaut und dann integriert.

### 5.1 Integration der Bewegungsgleichung

Wie bereits oben angeführt, wurden zwei verschiedene Integrationsverfahren erprobt, deren Anwendung für jedes Element auf die Matrixgleichung

$$\underline{a}_{t1} = \underline{Q}_0 \underline{a}_{t0} + \underline{Q}_{H1} \underline{h}_{t1} + \underline{Q}_{H0} \underline{h}_{t0} + \underline{Q}_{w1} \underline{r}_{wt1} + \underline{Q}_{w0} \underline{r}_{wt0} \quad (34)$$

führt, aus der die Durchflußmengen  $q$  zum Zeitpunkt  $t_1 = t_0 + \Delta t$  in Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen zum Zeitpunkt  $t_0$  berechnet werden können, sobald die Wasserstände zur Zeit  $t_1$  bestimmt sind.

Wendet man die Matrizenfunktion (27) auf (16) an, so ergeben sich die Matrizen

$$\begin{aligned} \underline{Q}_0 &= e^{\underline{m}_q \Delta t} \\ \underline{Q}_{H1} &= \underline{Q}_{w1} \underline{m}_H & \underline{Q}_{H0} &= \underline{Q} \\ \underline{Q}_{w1} &= \int_0^{\Delta t} e^{\underline{m}_q (\Delta t - \tau)} d\tau & \underline{Q}_{w0} &= \underline{Q} \end{aligned}$$

wobei sich die Matrizenfunktion aufgrund des CAYLEY-HAMILTON-Theorems für den ein- und den zweidimensionalen Fall aus zwei bzw. aus sechs Polynomgliedern explizit bestimmen läßt:

$$\underline{Q}_0 = c_0 \underline{I} + c_1 \underline{m}_q \Delta t \quad (35)$$

$$+ c_2 \underline{m}_q^2 \Delta t^2 + c_3 \underline{m}_q^3 \Delta t^3 + c_4 \underline{m}_q^4 \Delta t^4 + c_5 \underline{m}_q^5 \Delta t^5$$

$$\underline{Q}_{w1} = c_0 \underline{I} \Delta t + c_1 \underline{m}_q \frac{\Delta t^2}{2} \quad (36)$$

$$+ c_2 \underline{m}_q^2 \frac{\Delta t^3}{3} + c_3 \underline{m}_q^3 \frac{\Delta t^4}{4} + c_4 \underline{m}_q^4 \frac{\Delta t^5}{5} + c_5 \underline{m}_q^5 \frac{\Delta t^6}{6}$$

Darin sind die Funktionen  $c_i$  mit Hilfe der Eigenwerte (22) bestimmbar aus zwei bzw. sechs Gleichungen der Form

$$e^{\lambda \Delta t} = Q_0(\lambda \Delta t)$$

und ihren Ableitungen

$$\frac{\partial^I e^{\lambda \Delta t}}{\partial (\lambda \Delta t)^I} = \frac{\partial^I Q_0(\lambda \Delta t)}{\partial (\lambda \Delta t)^I}$$

Wendet man das CRANK-NICHOLSON-Verfahren (28) auf (16) an, so erhält man statt dessen

$$\underline{Q}_0 = \underline{Q}^{-1} [ \underline{I} + (1-\theta) \Delta t \underline{m}_q ]$$

$$\underline{Q}_{H1} = \underline{Q}_{w1} \underline{m}_H \quad \underline{Q}_{H0} = \underline{Q}_{w0} \underline{m}_H$$

$$\underline{Q}_{w1} = \underline{Q}^{-1} \theta \Delta t \quad \underline{Q}_{w0} = \underline{Q}^{-1} (1-\theta) \Delta t \quad (37)$$

mit

$$\underline{Q}^{-1} = (\underline{I} - \theta \Delta t \underline{m}_q)^{-1}$$

Wegen des nicht positiven Realteils der Eigenwerte (22) der Matrix  $\underline{m}_q$  sind beide numerischen Modelle wegen (30) bzw. (32) uneingeschränkt stabil. Wie die Beispielrechnungen zeigen, ist das Verhalten selbst für den extremen Fall der ungedämpften Schwingung ohne physikalischen Reibungsansatz R nicht instabil.

## 5.2 Integration der Kontinuitätsgleichung

Die integrierte Bewegungsgleichung (34) kann nun in die Kontinuitätsgleichung (17) eingesetzt werden, und man erhält damit eine Elementgleichung, die nur noch die Wasserstände in den Knotenpunkten mitführt:

$$\underline{\delta H}^T (\underline{n} \dot{\underline{H}} - \underline{m} \underline{H} - \underline{s}_H - \underline{s}_q - \underline{s}_w) = 0 \quad (38)$$

$$\underline{m} = \underline{s} \underline{Q}_{H1} \quad \underline{s}_H = \underline{s} \underline{Q}_{H0} \underline{H}_{t0} \quad (39)$$

$$\underline{s}_q = \underline{r}_q + \underline{s} \underline{Q}_0 \underline{q}_{t0} \quad \underline{s}_w = \underline{s} (\underline{Q}_{w1} \underline{r}_{wt1} + \underline{Q}_{w0} \underline{r}_{wt0})$$

Um beim Zusammenbau der Elemente die Stetigkeit der Wasseroberfläche zu gewährleisten (vgl. Abb. 1), wird der Vektor H aufgeteilt in zwei Anteile

$$\underline{H} = \underline{a} + \underline{h} \quad \underline{\delta H} = \underline{\delta h} \quad \dot{\underline{H}} = \dot{\underline{h}}$$

wobei a die Wassertiefen bis zum allgemeinen Bezugshorizont enthält, die von Element zu Element wechseln können, und h nur noch die unbekannt, stetigen Knotengrößen

umfaßt. Gleichung (38) wird damit umgeformt zur Kontinuitätssystemgleichung des H-Modells

$$\delta h^T (\underline{n} \dot{h} - \underline{m} \dot{h} - \underline{r}) = 0 \quad (40)$$

mit

$$\underline{r} = \underline{s}_H + \underline{s}_G + \underline{s}_W + \underline{m} a$$

die für alle Elemente des Gesamtsystems zusammenzubauen ist:

$$\delta Z_T^T (N \dot{Z}_T - M Z_T - R) = 0 \quad (41)$$

In dieser Gleichung enthält der Zustandsvektor  $Z_T$  die Wasserstände  $h_I$  aller Knotenpunkte  $I$  des Gesamtsystems. Die symmetrische, positiv definite Matrix  $N$  und die unsymmetrische Matrix  $M$  sind Bandmatrizen. Die vorgegebenen Wasserstands-Randbedingungen können in üblicher Weise in (41) berücksichtigt werden, indem  $Z_T$  in einen unbekanntem und einen bekannten Teil aufgeteilt wird

$$\underline{Z}_T = \underline{z} + \bar{\underline{z}} \quad \delta \underline{Z}_T = \delta \underline{z}$$

womit man schließlich die endgültige Matrizenbeziehung des Gesamtsystems erhält, die noch in zeitlicher Hinsicht zu integrieren ist:

$$\bar{N} \dot{\underline{z}} - \bar{M} \underline{z} = \bar{R} \quad (42)$$

Für diese Zeitintegration kann jedes bewährte Verfahren verwendet werden. Für die durchgeführten Tests des eindimensionalen H-Modells wurde hier wiederum die Matrizenfunktion (27) benutzt, da mit ihr eine exakte Integration von (42) vollzogen werden kann, die zusätzliche Integrationsfehler bei der grundsätzlichen Untersuchung des hybriden Konzeptes ausschließt:

$$\underline{z}_{t_1} = e^{\underline{A}\Delta t} \underline{z}_{t_0} + \int_0^{\Delta t} e^{\underline{A}(\Delta t-\tau)} d\tau \bar{R} \quad \underline{A} = \bar{N}^{-1}\bar{M} \quad (43)$$

Dabei sind die e-Funktion in eine TAYLOR-Reihe zu entwickeln, vgl. HOLZ (1976), und für große Zeitschritte das Konzept von LAPIDUS und LUUS (1967) zu verwirklichen, um die Konvergenz der Reihenentwicklung sicherzustellen.

Wie bereits mit (30) gezeigt wurde, ist dieses Verfahren uneingeschränkt stabil, wenn alle Realteile der Eigenwerte von (42) nicht positiv sind. Dieser Beweis läßt sich mit (33) durchführen, indem man den Zusammenbau der Matrix  $M$  betrachtet

$$\delta Z_T^T M Z_T = \sum_{i=1}^m \delta h^T \underline{m} \underline{h}$$

bei dem (40) über alle Elemente summiert wird. Für jeden beliebigen Eigenvektor

$$\underline{u}^T = [x \ y]$$

hat daraus folgend für jedes Einzelement mit (39) zu gelten

$$\underline{u}^T \underline{m} \underline{u} \stackrel{!}{\leq} 0 \quad (44)$$

damit die Realteile der Eigenwerte von (42) nicht positiv werden.

Für die hybriden Gerinnemodelle mit strömendem Abfluß, deren numerische Ergebnisse präsentiert werden, konnte die Eigenschaft (44) bei Verwendung der Teilgebietskollokation grundsätzlich nachgewiesen werden. Bei Verwendung des GALERKIN-Verfahrens ist jedoch das Auftreten von Instabilitäten nicht auszuschließen, sobald (3) von Null verschieden ist.



Abschließend soll daher unterstrichen werden, wie stark die Integrationsmethode in Ortsrichtung das zeitliche Verhalten des numerischen Modells über die Eigenwerte bzw. die Grundswingungsformen beeinflusst und daß größte Sorgfalt bei der Auswahl geeigneter Verfahren geboten ist.

## 6. Beispielrechnungen

Die Untersuchung des numerischen Verhaltens der hybriden eindimensionalen H-Modelle – der Abschluß für die zweidimensionalen Modelle steht noch aus – wurde mit Hilfe eines horizontalen Gerinnes von 5000 m Länge mit der in Abb. 7 gezeigten Elemententeilung durchgeführt.

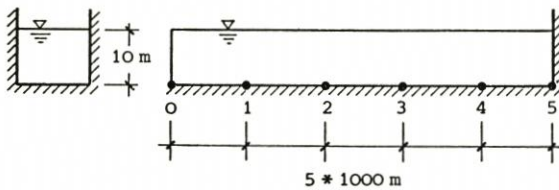


Abb. 7

Berechnet wurde das ungedämpfte dynamische Verhalten des Systems unter einer impulsförmigen Anregung im Punkte 0, wo der Ruhewasserstand von 10,0 m plötzlich auf 10,1 m angehoben wurde. Obwohl es sich um ein sehr einfaches System handelt, muß dieser Test jedoch als sehr kritisch für jedes numerische Verfahren bewertet werden, da ohne die physikalische Dämpfung unter der impulsförmigen Anregung verdeckte Schwächen der Verfahren sehr deutlich erkannt werden können.

Auf den Abbildungen 8 bis 10 sind die Ergebnisse für die verschiedenen H-Modelle einem der bisher üblichen gemischten Modelle gegenübergestellt, das auf dem GALERKIN-Verfahren basiert und das ebenfalls die Matrizenfunktion als Zeitintegration benutzt und sowohl die Wasserstände als auch die Geschwindigkeiten in den Knoten als Unbekannte mitführt. Aufgezeichnet sind jeweils die zeitlichen Veränderungen des Wasserstandes im Punkte 5 sowie der Durchflußmengen im Punkte 0, wo der Wasserstand nach der Anhebung konstant auf 10,1 m gehalten wurde.

Alle H-Modelle zeigen sehr deutlich ein stabiles Verhalten, wie es auch theoretisch nachgewiesen wurde, wohingegen das gemischte Modell, deutlich abzulesen in Abb. 10, eine instabile Tendenz zeigt, die auch zu erwarten war, da es den geschilderten Stabilitätsüberlegungen nicht standhält.

Aus den Abbildungen 8 und 9 (Zeitschritt  $\Delta t = 20$  sec) ist abzulesen, daß das H-Modell, basierend auf der Teilgebietskollokation mit der CRANK-NICHOLSON-Integration ( $\Theta = 0,5$ ), die besten Ergebnisse liefert. Die übrigen H-Modelle zeigen deutlich einen unerwünschten Dämpfungseffekt, der allein durch die numerischen Integrationsverfahren verursacht ist. Wie groß dieser Einfluß zu sein vermag, zeigt sich besonders in Abb. 10, deren Ergebnisse mit einem Zeitschritt  $\Delta t = 100$  sec nach der COURANT-FRIEDRICHS-LEWY-Bedingung berechnet wurden. Die Amplituden des H-Modells, basierend auf der Teilgebietskollokation, bleiben nahezu konstant, während die Ortsintegration nach dem GALERKIN-Verfahren das zeitliche Verhalten total verändert: Das H-Modell wird damit

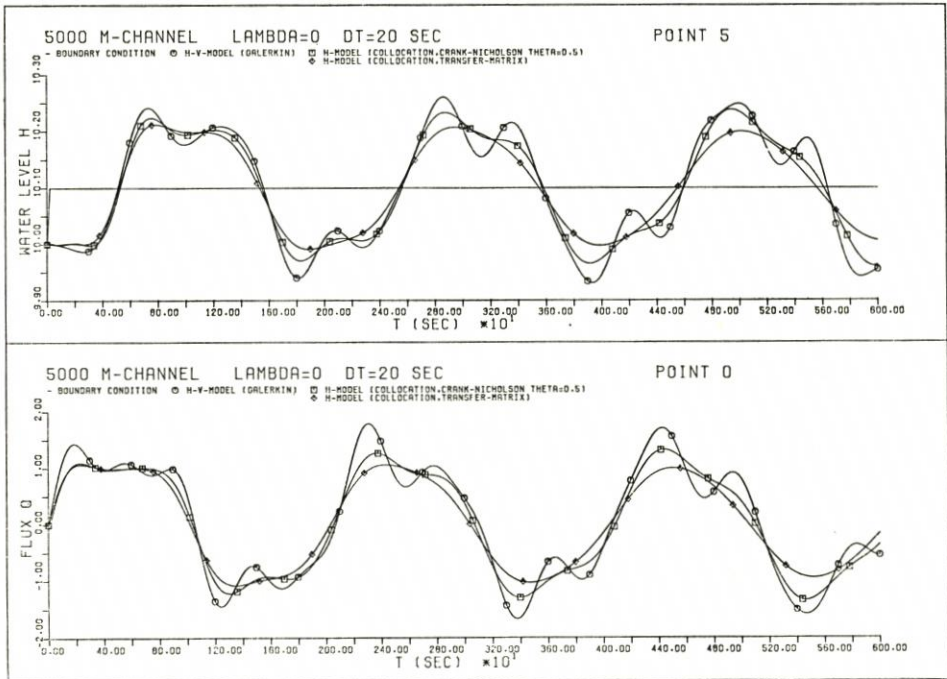


Abb. 8

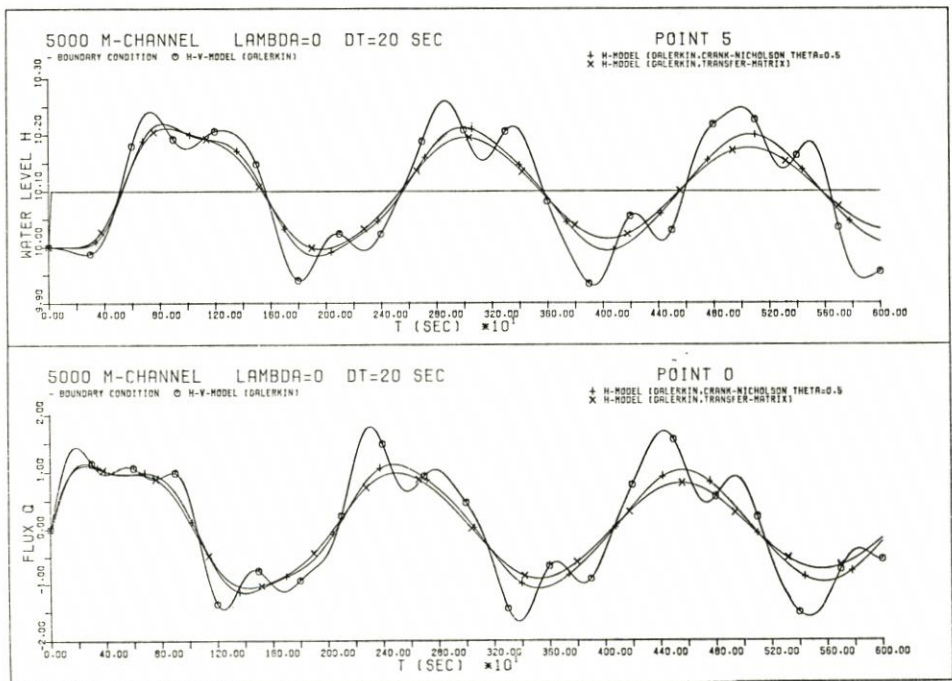


Abb. 9

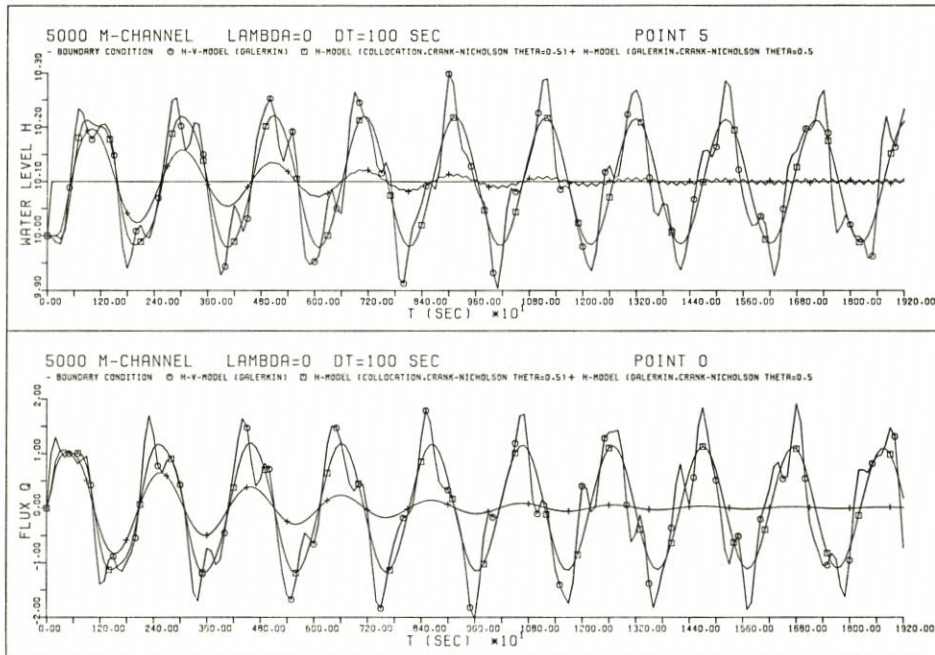


Abb. 10

zurück in die Ruhelage gedämpft, während das gemischte Modell Instabilitäten aufweist, die durch das System laufen.

Aufgrund dieser Ergebnisse lassen sich zusammenfassend folgende Aussagen treffen:

- Die H-Modelle produzieren Ergebnisse von hoher Genauigkeit bei gegenüber den gemischten Modellen verringertem Rechenaufwand.
- Sie verhalten sich uneingeschränkt stabil und unterliegen damit keiner Zeitschritt-begrenzung.
- Die im allgemeinen unerwünschte numerische Dämpfung, die in speziellen Fällen auch numerische Diffusion hervorruft, scheint mit der Teilgebietsskollokation erfolgreich bekämpft zu sein (vgl. GÄRTNER, 1976).
- Die H-Modelle weisen eine sehr große Flexibilität auf, die es ermöglicht, leicht ein- und zweidimensionale Strömungsmodelle über die Wasserstandsparameter zu koppeln, was bei gemischten Modellen im allgemeinen zu Schwierigkeiten führt.

## 7. Schriftenverzeichnis

- BATHE, K. J. and WILSON, E. L.: Stability and Accuracy Analysis of Direct Integration Methods. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 1, 283-291.
- GÄRTNER, S.: Zur Berechnung von Flachwasserwellen und instationären Transportprozessen mit der Methode der finiten Elemente. Dissertation Techn. Univ. Hannover, 1976, u. VDI-Verlag, Fortschritt-Berichte, Reihe 4, 1977.
- GROTKOP, G.: Finite Element Analysis of Long-Period Water Waves. *Computer Meth. in Appl. Mech. and Eng.* 2, 1973, 147-157.
- HOLZ, K. P.: High-Order Time Integration Scheme for Open Channel Flow. *Computer Meth. in Appl. Mech. and Eng.* 8, 1976, 117-124.

- HOLZ, K. P. and WITHUM, D.: Finite Elements for Time-dependent Flows through Porous Media and for Long-Period Water-Wave Propagation. US-German Symposium MIT 1976.
- HERRLING, B.: Eine hybride Formulierung in Wasserständen zur Berechnung von vertikal integrierten Flachwasserwellen mit der Methode der finiten Elemente. Dissertation Techn. Univ. Hannover, 1977 (in Vorbereitung).
- LAPIDUS, L. and LUUS, R.: Optimal Control of Engineering Processes. Blaisdell Publishing Company, London, 1967.
- TAYLOR, C. and DAVIS, J. M.: A Finite Element Model of Tides in Estuaries. Finite Element Methods in Flow Problems, UAH Press, Huntsville, USA, 1974, S. 371-377.