

Analytische Lösungen der Transportgleichung für die Seegangenergie bei geneigtem Meeresboden

Von Jürgen Sellschopp

Zusammenfassung

Die Transportgleichung für die Seegangenergie ist eine quasilineare partielle Differentialgleichung. Ihre Lösungen werden im allgemeinen numerisch entweder mit Hilfe eines Differenzschemas oder durch gleichzeitige Integration der charakteristischen Gleichungen berechnet. Die Bahnen, auf denen die Energie transportiert wird, sind nur in den Fällen großer oder überall gleicher Wassertiefe gerade Linien.

In dieser Arbeit werden analytische Lösungen der Bahngleichungen für Seegebiete angegeben, bei denen der Meeresboden eine geneigte Ebene ist. Der Meeresboden darf auch aus Ebenen verschiedener Neigung zusammengesetzt sein.

Die Seegangenergie an einem Punkt erhält man durch Integration der Quellfunktion längs der Bahnen, die durch den Punkt verlaufen. Im allgemeinen muß man diese Integration numerisch ausführen. In dem Fall aber, daß keine Seegangsanfachung stattfindet und die Dissipation lediglich auf laminarer Reibung beruht, läßt sich auch diese Integration analytisch ausführen.

Wo analytische Lösungen der Transportgleichung des Seegangs möglich sind, haben sie gegenüber den numerischen Lösungen den Vorteil, daß man erheblich an Rechenzeit eines elektronischen Rechners sparen kann und daß man Gewähr für größtmögliche Genauigkeit hat, ohne Erwägungen über geeignete numerische Integrationsverfahren und -schrittweiten anstellen zu müssen. Besonders vorteilhaft ist die Verwendung der analytischen Lösung bei der Modellrechnung für künstliche Bodenstrukturen in der Nähe der Küste.

Summary

The energy transport equation of ocean surface waves is generally solved numerically by means of a difference scheme or by simultaneous integration of the characteristic equations. The paths along which energy is transmitted are straight lines only in the case of great water depth or plane bottom.

In this text, analytical results for the wave paths on slopes are given. The bottom may also consist of several inclined plains.

The wave energy at a location results from integration of the source function along those paths which run through the location. Generally the integration has to be carried out numerically. However, if no wave generation occurs and the only dissipation term is laminar friction, the source function can be integrated analytically, too.

Analytical results of the transport equation, if they exist, have the advantage, that – compared with numerical solutions – they save a lot of computer time and are a guarantee of accuracy. They should be used especially in model computations for man-made, near-shore, bottom structures.

Inhalt

Zusammenfassung	72
1. Einleitung und Aufgabenstellung	73
2. Die Transportgleichung der Seegangenergie	73
3. Erste Integrationen	74

4. Seegangsspektren im flachen Wasser	76
5. Bemerkungen zur Kaustik der Seegangswellen	80
6. Vollständige Berechnung der Wellenbahnen	81
7. Lösungen für den Fall laminarer Reibung	82
8. Der Seegang hinter einem durchbrochenen Damm	83
9. Ein Beispiel für die Zusammensetzung von Lösungen	86
10. Diskussion	89
Schriftenverzeichnis	89

1. Einleitung und Aufgabenstellung

Diese Arbeit behandelt ein spezielles Problem der Seegangsverlagerung, nämlich das Verhalten des Seegangs über einem Meeresboden mit parallelen Konturen, wo die Wassertiefe so gering ist, daß durch sie die Geschwindigkeit der Seegangswellen beeinflusst wird.

Die Beeinflussung der Wellengeschwindigkeit durch die Wassertiefe macht die Seegangsberechnung in flacheren Seegebieten weitaus komplizierter als im tiefen Ozean. Die Lösung der auftretenden Differentialgleichung geschieht bisher in der Praxis stets auf dem Wege der numerischen Integration mit Hilfe eines elektronischen Rechners.

Für die Beschreibung des Seezustandes genügt oft schon die Angabe der mittleren Wellenhöhe, der Hauptrichtung der Wellen und der mittleren Wellenperiode. Bei der Seegangsberechnung kommt man dagegen mit der Verwendung dieser Mittelwerte nicht aus. Hier muß man das ganze Gemisch kurzer und langer Wellen, die in die verschiedensten Richtungen laufen, berücksichtigen, damit am Ende der Rechnung realistische Ergebnisse für die gesuchten Seegangswerte herauskommen. Warum das so ist, wird besonders in dem Kapitel über Kaustiken deutlich werden.

Da es nun notwendig ist, für jeden Anteil des Seegangs, nämlich für Wellen unterschiedlicher Periode und Richtung, das Fortschreiten auf der Meeresoberfläche und die Änderung der Wellenamplitude zu berechnen, wäre es von Vorteil, für diese Vorgänge geschlossene mathematische Formeln zu besitzen, anstatt genötigt zu sein, für jeden Anteil numerische Integrationen ausführen zu müssen. Im folgenden wird gezeigt, daß man in den Fällen, wo der Meeresboden parallele Tiefenlinien hat, solche geschlossenen Ausdrücke angeben kann.

2. Die Transportgleichung der Seegangsenergie

Die gegenseitige Beeinflussung der verschiedenen Seegangsanteile kann in diesem Zusammenhang vernachlässigt werden.

Für jede Einzelwelle gilt die Dispersionsgleichung für Oberflächenwellen unter Einfluß der Gravitation.

$$(2.1) \quad \sigma^2 = gk \tanh kh$$

σ ist die Kreisfrequenz, k die Wellenzahl, h die Wassertiefe und g die Erdbeschleunigung. Die Energie der Welle wandert mit der Gruppengeschwindigkeit.

$$(2.2) \quad v = \frac{d\sigma}{dk} = \frac{\sigma}{2k} \left[1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right]$$

Der Winkel zwischen der Laufrichtung der Einzelwelle und der positiven x -Achse sei θ . Anstelle der Wellenzahl k und des Winkels θ können auch die auf die horizontalen

Koordinaten bezogenen Wellenzahlen k_1 und k_2 zur Charakterisierung einer Einzelwelle dienen.

$$(2.3) \quad k_1 = k \cos \vartheta \quad k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$$

$$k_2 = k \sin \vartheta \quad \vartheta = \arctan (k_2/k_1)$$

Die Verteilung der Seegangenergie auf die verschiedenen horizontalen Wellenzahlen k_1 und k_2 ist durch das Spektrum $F(x, y, t; k_1, k_2)$ gegeben. Üblicherweise wird das Integral über das Spektrum als Gesamtenergie bezeichnet, obwohl es die Dimension einer Fläche hat. Es ist gleich dem mittleren Quadrat der Auslenkung der Wasseroberfläche aus der Ruhelage.

Die Verlagerung der spektralen Seegangenergie wird, wenn die Wellenbewegung nicht durch Meeresströmungen überlagert wird, durch die lineare Transportgleichung

$$(2.4) \quad \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial k_1} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial k_2} \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial k_1} - \frac{\partial \sigma}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial k_2} = S$$

beschrieben. Der Buchstabe S steht für die Quellfunktion, die von x, y, t, k_1, k_2 , und F abhängen kann. Sie enthält alle den Seegang anfachenden oder dämpfenden Kräfte.

Für die Anwendbarkeit der linearen Transportgleichung (2.4) muß vorausgesetzt werden, daß das Spektrum eine langsam veränderliche Funktion von x, y und t ist (K. HASSELMANN, 1968).

Die Transportgleichung (2.4) ist eine quasilineare partielle Differentialgleichung mit fünf unabhängigen Variablen. Die Zahl der Variablen läßt sich durch Transformation von den Wellenzahlen zu Frequenz und Richtung vermindern.

$$(2.5) \quad \left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{d\sigma}{dk} \left[\cos \vartheta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial y} \right] \right.$$

$$\left. + \frac{1}{k} \frac{d\sigma}{dh} \left[\frac{\partial h}{\partial x} \sin \vartheta - \frac{\partial h}{\partial y} \cos \vartheta \right] \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right] \left[\frac{v}{k} E \right] = S$$

Die Frequenz σ tritt jetzt im Transportoperator nur als Parameter auf.

Die Integrationen können für jede Frequenz einzeln durchgeführt werden. Man kann die Lösung der partiellen Differentialgleichung (2.5) entweder durch gleichzeitige Integration der gekoppelten charakteristischen Gleichungen erhalten oder ein Differenzverfahren verwenden.

Lediglich wenn die Wassertiefe überall gleich oder sehr viel größer als die Wellenlänge $2\pi/k$ ist, entkoppeln sich die charakteristischen Gleichungen, weil dann v und ϑ konstant sind.

3. Erste Integrationen

In vielen Fällen hat das interessierende Seegebiet parallele Bodenkonturen. Dann kann man das Koordinatensystem so drehen, daß $\frac{dh}{dy} = 0$ wird. Außerdem soll vorausgesetzt werden, daß im ganzen Gebiet $\frac{dh}{dx} \neq 0$ ist. Unter diesen Voraussetzungen kann man einen Satz von charakteristischen Gleichungen bekommen, die Schritt für Schritt

lösbar sind. Dazu muß die Transportgleichung (2.5) durch den Ausdruck $\frac{1}{k} \frac{d\sigma}{dh} \frac{dh}{dx}$ dividiert werden. Mit Hilfe der Beziehung

$$(3.1) \quad \left. \frac{d\sigma}{dh} \right|_{k = \text{const}} = - \left. \frac{d\sigma}{dk} \right|_{h = \text{const}} \cdot \left. \frac{dk}{dh} \right|_{\sigma = \text{const}}$$

ergeben sich die charakteristischen Gleichungen.

$$\frac{dt}{ds} = \frac{k}{\frac{d\sigma}{dh} \frac{dh}{dx}}$$

$$\frac{dx}{ds} = - \frac{k}{\frac{dk}{dx}} \cos \vartheta$$

$$(3.2) \quad \frac{dy}{ds} = - \frac{k}{\frac{dk}{dx}} \sin \vartheta$$

$$\frac{d\vartheta}{ds} = \sin \vartheta$$

$$\frac{d}{ds} \left[\frac{v}{k} E \right] = \frac{k}{\frac{d\sigma}{dh} \frac{dh}{dx}} S$$

Es sei darauf hingewiesen, daß s ein Parameter ist, der nicht mit der Weglänge verwechselt werden sollte.

Für $s = 0$ sei nun ein Anfangstupel $(x_0, y_0, t_0, \vartheta_0, E_0)$ vorgegeben. Zur Berechnung der Lösungskurve mit diesen Anfangswerten integriert man zuerst die vierte Gleichung von (3.2).

$$(3.3) \quad \int_{\vartheta_0}^{\vartheta(s)} \frac{d\vartheta}{\sin \vartheta} = s \quad \tan \frac{\vartheta}{2} = e^s \tan \frac{\vartheta_0}{2}$$

$$(3.4) \quad \sin \vartheta = \frac{2 \sin \vartheta_0}{(1 - \cos \vartheta_0) e^s + (1 + \cos \vartheta_0) e^{-s}}$$

$$\cos \vartheta = \frac{(1 - \cos \vartheta_0) e^s - (1 + \cos \vartheta_0) e^{-s}}{(1 - \cos \vartheta_0) e^s + (1 + \cos \vartheta_0) e^{-s}}$$

Dieses Ergebnis, in die zweite der Gleichungen (3.2) eingesetzt, ergibt

$$(3.5) \quad \int_{x_0}^x \frac{1}{k} \frac{dk}{dx} dx = \int_{k_0}^k \frac{dk}{k} = \int_0^s \frac{(1 - \cos \vartheta_0) e^s - (1 + \cos \vartheta_0) e^{-s}}{(1 - \cos \vartheta_0) e^s + (1 + \cos \vartheta_0) e^{-s}} ds$$

$$(3.6) \quad k(s) = \frac{k_0}{2} \left[(1 - \cos \vartheta_0) e^s + (1 + \cos \vartheta_0) e^{-s} \right]$$

Das Ersetzen der Integration über x durch eine Integration über k in (3.5) ist möglich, weil k eine monoton abnehmende Funktion der Wassertiefe und diese in dem betrachteten Seegebiet eine monotone Funktion von x ist. Daher kann aus (3.6) jetzt auch durch Auflösen von (2.1) nach h und Umkehrungen der Funktion $h(x)$ die Distanz x ausgerechnet werden. Zur Abkürzung wurde k_0 für $k(x_0)$ geschrieben.

Aus (3.4) und (3.6) folgt

$$(3.7) \quad k(s) \sin \vartheta(s) = k_0 \sin \vartheta_0 = b$$

Diese Gleichung ist als Äquivalent des Snellius-Gesetzes bekannt. Sie besagt, daß bei parallelen Bodenkonturen die Projektion der Wellenzahl auf die Küste konstant ist.

Die Tiefwasserwellenzahl ist $k_d = \frac{\sigma^2}{g}$. Sie muß größer oder gleich dem Betrag der konstanten Wellenzahlkomponenten sein. Wenn aber $|b| > \frac{\sigma^2}{g}$ wird, läuft die Welle nicht bis in tiefes Wasser, sondern sie wird bei der Wassertiefe h_c zurückgebeugt, die durch

$$(3.8) \quad h_c = \frac{1}{|b|} \arctan \frac{\sigma^2}{g|b|}$$

definiert ist.

4. Seegangsspektren im flachen Wasser

In vielen Fällen braucht man nicht die Lösungen aller Gleichungen (3.2) zu kennen. Wenn das Wellenspektrum an verschiedenen Stellen einer geraden Tiefenlinie gleich ist und einige Zeit unverändert bleibt, kann man das Spektrum bei einer anderen Wassertiefe ohne genaue Kenntnis der Bahnen der einzelnen Wellenkomponenten berechnen; allerdings muß die Quellfunktion dann vernachlässigbar sein.

Im folgenden werden zwei Beispiele der Transformation von Seegangsspektren gegeben, die von der Änderung der Wassertiefe herrührt.

Beispiel 1: Seegang, der auf die Küste zuläuft

Der Meeresboden steige nach rechts bis zur Küste an und habe zur Küste parallele Bodenkonturen. Der Gradient der Wassertiefe bildet im ganzen Seegebiet einen rechten Winkel mit der Küstenlinie, braucht aber nicht konstant zu sein. Im tiefen Wasser sei der Seegang homogen und stationär, d. h., das Tiefwasserspektrum ist dort an zwei verschiedenen Punkten gleich und ändert sich auch in dem in Frage kommenden Zeitraum nicht. Es werde mit $E_d(\sigma, \vartheta)$ bezeichnet, und es wird angenommen, daß es nur Anteile in Richtung der positiven x -Achse besitzt: $-\pi/2 < \vartheta < \pi/2$.

Außerdem soll vorausgesetzt werden, daß die Quellfunktion im betrachteten Seegebiet keinen merklichen Anteil an der Veränderung der Seegangenergie hat.

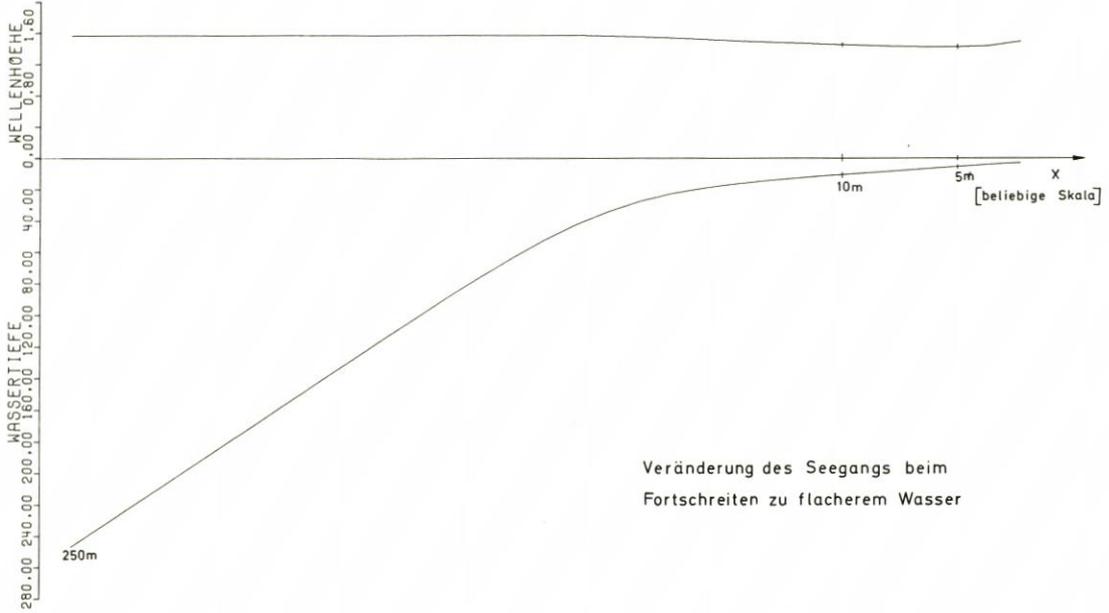
Unter den genannten Voraussetzungen kann man das Spektrum an einer Stelle mit der Wassertiefe h hinschreiben.

$$(4.1) \quad E_h(\sigma, \vartheta) = \frac{g^2}{2\sigma^3} \frac{k(\sigma, h)}{v(\sigma, h)} \cdot E_d \left[\sigma, \arcsin \left[\frac{gk(\sigma, h)}{\sigma^2} \sin \vartheta \right] \right]$$

für $|\vartheta| < \arcsin \frac{\sigma^2}{gk(\sigma, h)}$

k und v sind die Wellenzahl und die Gruppengeschwindigkeit bei der Wassertiefe h . Sie lassen sich aus der Dispersionsgleichung (2.1) ausrechnen.

Für das Tiefwasserspektrum in Abb. 1 wurden ein PIERSON-MOSKOWITZ-Spektrum mit dem Maximum bei $\sigma_m = 1 \text{ s}^{-1}$ und eine Richtungsverteilung proportional zu $\cos^2 \vartheta$



Veränderung des Seegangs beim Fortschreiten zu flacherem Wasser

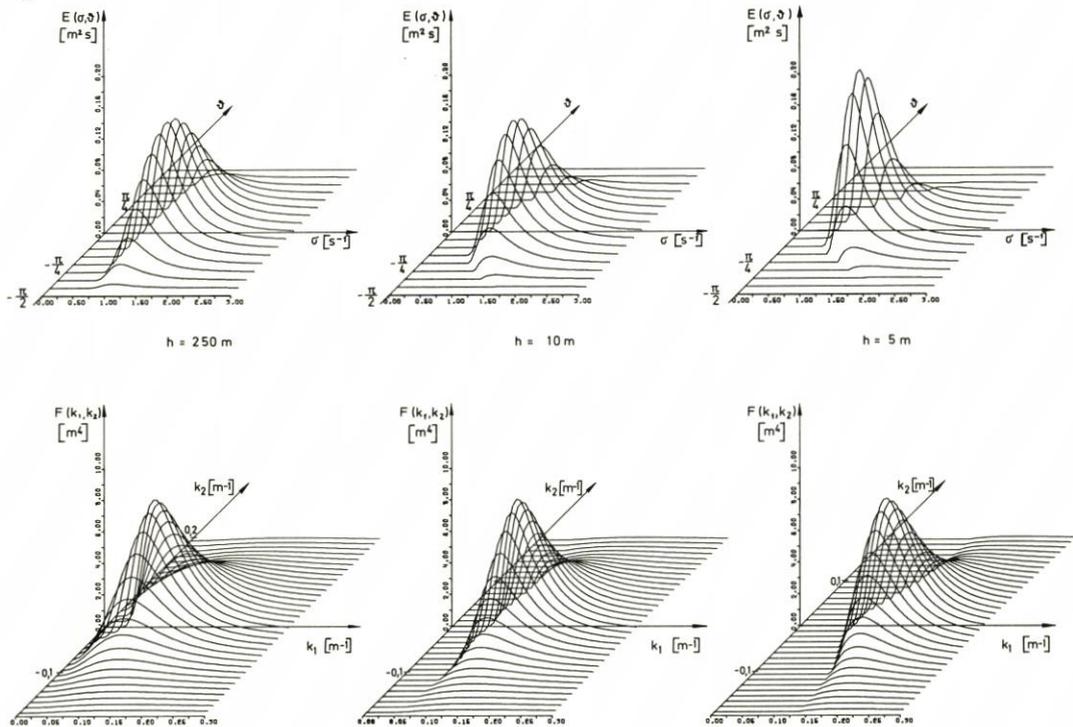


Abb. 1

für alle Frequenzen verwendet. Dies ist eine gute Näherung für eine ausgereifte Windsee bei einer Windgeschwindigkeit von 6,8 m/s bzw. 16,7 kn. Diese Windsee läuft in flaches Wasser, wobei ihr Spektrum in das Flachwasserspektrum (4.1) transformiert wird. Man sieht in der Abbildung, daß das Maximum des Richtungsspektrums mit abnehmender Wassertiefe anwächst und die Richtungsverteilung schmäler wird. Die Veränderung des Seegangs ist auch aus den ebenfalls in Abb. 1 dargestellten Wellenzahlspektren abzulesen.

Das Wellenzahlspektrum verschiebt sich zu größeren Wellenzahlen hin, während der Betrag des Spektralmaximums erhalten bleibt. Integriert man das Spektrum und berechnet so die Gesamtenergie des Seegangs, so erkennt man keine sehr starke Abhängigkeit von der Wassertiefe. Die für den Seegang im flachen Wasser symptomatischen Erscheinungen, nämlich das Auftreten von steilen, kurzen Wellen, sind aus der Gesamtenergie nicht zu ersehen. In Abb. 1 ist über dem vorgegebenen Tiefenprofil die signifikante Wellenhöhe $H_{1/3}$, die das Vierfache der Wurzel aus der Gesamtenergie ist, eingezeichnet.

Um den Einfluß der Richtungsverteilung des Seegangs auf das Frequenzspektrum und die Wellenhöhe im flachen Wasser sehen zu können, errechnen wir das Frequenzspektrum durch Integration über θ .

(4.2)

$$\begin{aligned} \rho_h(\sigma) &= \frac{g^2}{\pi \sigma^3} \frac{k}{v} \rho_d(\sigma) \left\{ \sqrt{\left[\frac{gk}{\sigma^2}\right]^2 - 1} + \left[2 - \left[\frac{gk}{\sigma^2}\right]^2\right] \arcsin \frac{\sigma^2}{gk} \right\} \\ &= \frac{8}{3\pi} \frac{g}{2\sigma v} \rho_d(\sigma) \left\{ 1 + \frac{1}{10} \left[\frac{\sigma^2}{gk}\right]^2 + \frac{9}{280} \left[\frac{\sigma^2}{gk}\right]^4 + \dots \right\} \end{aligned}$$

Im Grenzfall eines unidirektionalen, auf die Küste zulaufenden Seegangs ist dagegen

$\rho_h(\sigma) = \frac{g}{2\sigma v} \rho_d(\sigma)$. Der Unterschied zwischen den beiden Frequenzspektren ist nicht groß. Er kann bei geringer Wassertiefe für die tiefen Frequenzen bis zu 18 % ausmachen. Berechnungen für Seegang, der auf die Küste zuläuft, sind daher mit keinem zu großen Fehler behaftet, wenn man die tatsächliche Richtungsverteilung außer acht läßt und mit unidirektionalem Seegang rechnet, wie es in der Praxis häufiger geschieht.

Beispiel 2: Rückbeugung des Seegangs

Als zweites Beispiel betrachten wir nun den Seegang, der über eine Bank läuft und auf dem Leehang wieder zur Bank zurückbeugt wird (siehe die Skizze in Abb. 2). Auf der Bank mit der Wassertiefe h_0 sei wieder der Seegang homogen und stationär.

Eine Einzelwelle, die schräg von der Bank her in Richtung größerer Wassertiefe läuft, muß, wie in Abschnitt 3 gezeigt, unter Umständen in einem Bogen ins flache Wasser zurücklaufen. Die Wassertiefe, bei der die Wellenbahn zurückschwenkt, sei mit h_c bezeichnet. Sie hängt vom Winkel θ_0 bei h_0 und der Frequenz ab. Zwei Bahnen von Wellen derselben Frequenz, die mit dem gleichen Winkel θ_0 bei h_0 nebeneinander verlaufen, schneiden sich in der Umgebung der Tiefenlinie h_c . Die Einhüllende aller Bahnen von Wellen mit der gleichen Frequenz und gleichem Anfangswinkel heißt Kaustik. Sie ist in diesem Fall eine Gerade und mit der Tiefenlinie $h = h_c$ identisch. Für monochromatische und unidirektionale Wellen wird die lineare Lösung der Wellengleichung an der Kaustik unendlich groß, so daß man spezielle Methoden braucht, um das Verhalten der Wellen in der Nähe der Kaustiken zu untersuchen (Y. Y. CHAO und W. J. PIERSON, 1972). In der spektralen Rechnung treten diese Schwierigkeiten nicht auf. Es sei $E_0(\sigma, \theta)$ das Spektrum auf der Bank der Wassertiefe h_0 . Für jeden Abstand von der Bank bei der Wassertiefe h

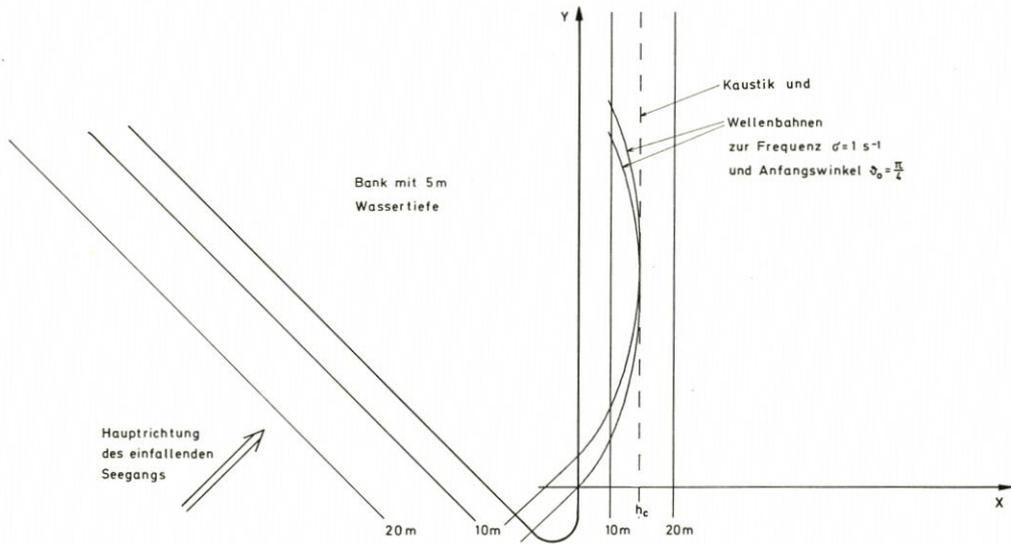


Abb. 2

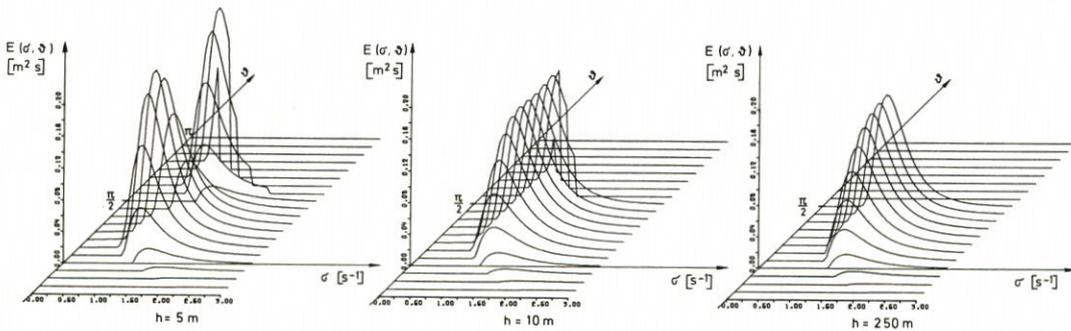
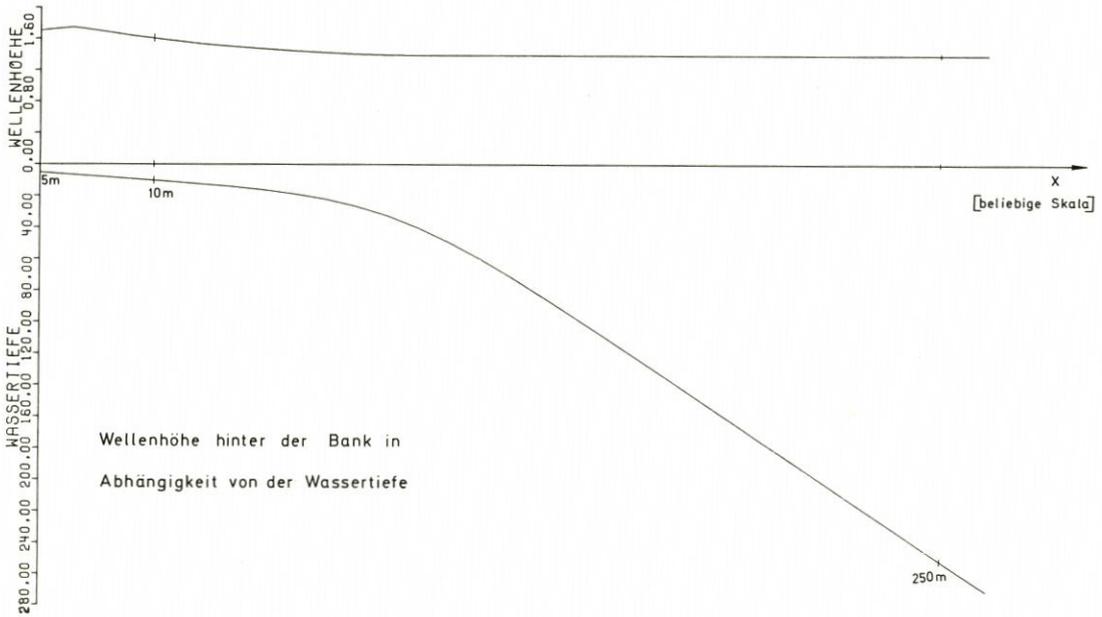


Abb. 3

kann man wieder das Spektrum des Seegangs, der von der Bank aus nach rechts läuft, hinschreiben.

$$(4.3) \quad E_h(\sigma, \vartheta) = \frac{v_0}{k_0} \frac{k}{v} E_0 \left[\sigma, \arcsin \left[\frac{k}{k_0} \sin \vartheta \right] \right] \text{ für } -\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}$$

In dieser Formel ist $k = k(\sigma, h)$, $k_0 = k(\sigma, h_0)$ und v und v_0 entsprechend. Für $\vartheta < -\frac{\pi}{2}$ und $\vartheta > \frac{\pi}{2}$ besteht das Spektrum aus den Anteilen, die von weiter rechts zur Bank zurückgebeugt werden.

$$(4.4) \quad E_h(\sigma, \vartheta) = E_h(\sigma, \pm \pi - \vartheta) \text{ für } |b| > \frac{\sigma^2}{g} \text{ und } \begin{cases} -\pi < \vartheta < -\frac{\pi}{2} \\ \text{oder} \\ \frac{\pi}{2} < \vartheta < \pi \end{cases}$$

Hier ist b wieder die in (3.7) definierte Größe $b = k \sin \vartheta$.

Als Ausgangsspektrum $E_0(\sigma, \vartheta)$ wurde für die Abb. 3 das um $\pi/4$ verschobene dritte Richtungsspektrum aus Abb. 1 gewählt und seine Veränderung beim Fortschreiten zu größerer Wassertiefe hin dargestellt. In der gleichfalls in Abb. 3 gezeigten Darstellung der Wellenhöhe in Abhängigkeit von der Wassertiefe hinter der Bank erkennt man, daß kurz hinter der Bank die Wellen höher werden; dann nimmt die Wellenhöhe mit zunehmender Wassertiefe ab, bis schließlich im tiefen Wasser nur die Wellen übrig bleiben, für die keine Kaustik existiert.

5. Bemerkungen zur Kaustik der Seegangswellen

Es soll an dieser Stelle näher auf die Kaustik eines schmalbandigen Seegangsspektrums eingegangen werden. Es mögen alle Spektralkomponenten die gleiche Frequenz σ_0 haben und bei der Wassertiefe h_0 um die Richtung ϑ_0 gleichmäßig verteilt sein.

$$(5.1) \quad \begin{aligned} E_0(\sigma, \vartheta) &= E'_0 \cdot \delta(\sigma - \sigma_0) \psi_0(\vartheta) \\ \psi_0(\vartheta) &= \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} & \text{für } \vartheta_0 - \frac{\epsilon}{2} < \vartheta < \vartheta_0 + \frac{\epsilon}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Nach Gleichung (4.3) ist das Spektrum bei einer anderen Wassertiefe h

$$(5.2) \quad \begin{aligned} E_h(\sigma, \vartheta) &= \frac{v_0}{k_0} \frac{k}{v} E'_0 \cdot \delta(\sigma - \sigma_0) \psi_h(\vartheta) \\ \psi_h &= \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} & \text{für } \vartheta_0 - \frac{\epsilon}{2} < \arcsin \left[\frac{k}{k_0} \sin \vartheta \right] < \vartheta_0 + \frac{\epsilon}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Nun sei h_c die Wassertiefe, wo die Kaustik auftritt, d.h. $k_c = k_0 \sin \vartheta_0$. Dann ergibt sich die Gesamtenergie durch Integration über das Spektrum bei dieser Wassertiefe.

$$(5.3) \quad E_c' = \frac{v_0}{v_c} E_0' \frac{\sin \vartheta_0}{\epsilon} \left\{ \frac{\pi}{2} - \arcsin \left[\frac{\sin(\vartheta_0 - \epsilon/2)}{\sin \vartheta_0} \right] \right\}$$

In der niedrigsten Ordnung von ε wird

$$(5.4) \quad E_c' = \frac{v_o}{v_c} E_o' \frac{\sin \vartheta_o}{\sqrt{\varepsilon \tan \vartheta_o}}$$

Wenn ε etwa 5° ist und $\vartheta_o = 45^\circ$, deutet die Gleichung (5.4) auf einen Anstieg der Wellenhöhe um nur etwa 50 % hin.

Die Wellenhöhe ist proportional zur vierten Wurzel der Breite der Richtungsverteilung. Diese Proportionalität hätte sich auch ergeben, wenn das Spektrum Frequenzen in der Nachbarschaft von σ_o enthielte.

Dieses Beispiel zeigt, daß bei der Seegangsberechnung unter bestimmten Umständen die lineare Transporttheorie sogar dann angewandt werden kann, wenn Kaustiken auftreten.

6. Vollständige Berechnung der Wellenbahnen

Bisher wurden die charakteristischen Gleichungen (3.2) nur so weit gelöst, daß die Behandlung von Problemen, die eine in y -Richtung homogene Lösung hatten, möglich war, und auch das nur unter der Voraussetzung, daß die Quellfunktion verschwindet. Das Ausgangsspektrum bei der Wassertiefe h_o war bisher für alle Werte von y dasselbe, und daher wurde der Verlauf der Wellenbahnen der einzelnen Spektralkomponenten gar nicht benötigt, sondern nur die Änderung des Bahnwinkels. Zur Berechnung des Seegangs in Gebieten, in denen der Seegang bezüglich y nicht homogen ist, z. B. hinter der Einfahrt zwischen zwei Molen, braucht man dagegen die vollständige Lösung des Systems der charakteristischen Gleichungen (3.2).

Unsere nächste Aufgabe ist es, $t(s)$ und $y(s)$ zu berechnen. Das ist durch einfache numerische Integration der ersten und dritten Gleichung aus (3.2) immer möglich. Eine analytische Lösung findet man, wenn $\frac{dh}{dx}$ konstant ist. Wir setzen $\frac{dh}{dx} = m$.

Wir führen eine neue Variable ein.

$$(6.1) \quad \begin{aligned} \eta(s) &= -k(s) \cos \vartheta(s) \\ \eta(s) &= \frac{k_o}{2} \left[\left[1 - \cos \vartheta_o \right] e^s - \left[1 + \cos \vartheta_o \right] e^{-s} \right] \\ \frac{d\eta}{ds} &= k \quad k^2 - \eta^2 = b^2 = k_o^2 \sin^2 \vartheta_o \end{aligned}$$

Aus der Dispersionsgleichung (2.1) berechnet man $\frac{d\sigma}{dh}$, setzt das Resultat in die erste Gleichung von (3.2) ein und substituiert als neue Variable η aus (6.1). Mit $t_o = 0$ erhält man dann

$$(6.2) \quad t \left[\eta(s) \right] = \frac{2}{g} \frac{\sigma}{m} \int_{-k_o \cos \vartheta_o}^{\eta(s)} \frac{d\eta}{\eta^2 + b^2 - \frac{\sigma^4}{g^2}}$$

Zur Abkürzung verwenden wir den Ausdruck

$$(6.3) \quad a^2 = \frac{\sigma^4}{g^2} - b^2, \quad -k_o^2 < a^2 \leq \frac{\sigma^4}{g^2}$$

a ist reell für solche Bahnen, die bis ins tiefe Wasser hineinlaufen; im tiefen Wasser ist dann $\vartheta = \arccos(\sigma^2/ga)$. Für Bahnen, die in flaches Wasser zurückgebogen werden, ist a imaginär.

Die Lösung von (6.2) ist

$$(6.4) \quad t(\eta) = \frac{\sigma}{gm} \frac{1}{a} \ln \left[\frac{\eta - a}{\eta + a} \frac{k_0 \cos \vartheta_0 - a}{k_0 \cos \vartheta_0 + a} \right] \quad a \neq 0$$

die Umkehrung davon ist

$$(6.5) \quad \eta(t) = -a \frac{(k_0 \cos \vartheta_0 + a) e^{\alpha t} + (k_0 \cos \vartheta_0 - a) e^{-\alpha t}}{(k_0 \cos \vartheta_0 + a) e^{\alpha t} - (k_0 \cos \vartheta_0 - a) e^{-\alpha t}}$$

$$\text{mit } \alpha = \frac{gma}{2\sigma} \quad a \neq 0$$

Die dritte Gleichung von (3.2) läßt sich ebenfalls analytisch integrieren, wenn die Bodenneigung $\frac{dh}{dx} = m$ konstant ist. Ist $\sin \vartheta_0 = 0$, so ist $y = y_0$. Die folgende Rechnung gilt für $\sin \vartheta_0 \neq 0$.

$$(6.6) \quad y(s) - y_0 = -\frac{b}{m} \int_0^s \frac{d}{dk} \left[\frac{1}{k} \arctan \frac{\sigma^2}{gk} \right] ds \\ = \frac{h_0}{m} \operatorname{ctg} \vartheta_0 - \frac{h(s)}{m} \operatorname{ctg} \vartheta(s) + \frac{\sigma}{2k_0 \sin \vartheta_0} t(s)$$

Damit sind jetzt alle Gleichungen für die Bahnen der Einzelwellen gelöst. Die fünfte der Gleichungen (3.2) wird im allgemeinen nicht analytisch zu integrieren sein, weil realistische Quellfunktionen zu kompliziert sind.

7. Lösungen für den Fall laminarer Reibung

Eine spezielle Quellfunktion, die eine analytische Integration zuläßt, enthält nur die Dissipation durch laminare Reibung. Nach BIESEL ist die zeitliche Abnahme einer Wellenamplitude gegeben durch

$$(7.1) \quad \frac{dA}{dt} = -\gamma A \\ \gamma = \frac{1}{\sinh 2kh} \sqrt{\frac{k^2 \sigma \nu}{2}} + 2k^2 \nu \left[1 + \frac{\cosh 2kh}{\cosh 4kh - 1} \right]$$

ν ist die Zähigkeit des Wassers. Für die Energiedichte E' ist dann

$$(7.2) \quad \frac{dE'}{dt} = -2\gamma E'$$

Diese beiden Gleichungen (7.1) und (7.2) gelten für eine konstante Wassertiefe h . Bei nicht zu großer Bodenneigung ist man berechtigt, diese Formeln auch für variable

Wassertiefen und spektrale Wellenfelder zu verallgemeinern. Man darf aber nicht einfach E' durch E ersetzen, sondern muß sich klarmachen, daß bei konstanter Wassertiefe E' in (7.2) mit einer beliebigen Funktion von σ und h multipliziert werden darf. Bei variabler Wassertiefe hat man diese Freiheit nicht, da sich diese Funktion auf der Bahn ändert.

Was nun anstelle von E' in (7.2) einzusetzen ist, findet man beim Übergang zu verschwindender Reibung. Mit ν geht auch γ gegen 0. Die Quellfunktion wird ebenfalls 0, weil weder Anfachung noch Dissipation vorhanden sind. Die letzte der Gleichungen (3.2) ergibt daher $\frac{d}{dt} \left(\frac{\nu}{k} E \right) = 0$, was nur dann erfüllt ist, wenn (7.2) übergeht in

$$(7.3) \quad \frac{d}{dt} \left[\frac{\nu}{k} E \right] = -2 \gamma \frac{\nu}{k} E = S_f$$

Den Ausdruck (7.1) kann man mit Hilfe von (2.1) so umformen, daß er keine Hyperbelfunktionen enthält, und man erhält für die letzte der Gleichungen (3.2)

$$(7.4) \quad \frac{d}{ds} \ln \left[\frac{\nu}{k} E \right] = -\frac{k}{m} \left[\sqrt{\frac{2\nu}{\sigma}} + \frac{g\nu}{\sigma^3} \left[k^2 + \frac{\sigma^4}{g^2} \right] + \frac{8\sigma\nu}{g} \frac{k^2}{k^2 - \frac{\sigma^4}{g^2}} \right]$$

Die Integration läßt sich wieder ausführen, wenn man die Integrationsvariable η verwendet.

$$(7.5) \quad E(s) = \frac{\nu_0}{k_0} \frac{k}{\nu} E_0 \exp \left\{ -\frac{1}{m} (c + Db^2) (\eta - \eta_0) - \frac{D}{3m} (\eta^3 - \eta_0^3) - 4 \frac{\sigma^4 \nu}{g^2} (t(s) - t_0) \right\}$$

$$c = \sqrt{\frac{2\nu}{\sigma}} + 9 \frac{\sigma \nu}{g}, \quad D = \frac{g \nu}{\sigma}$$

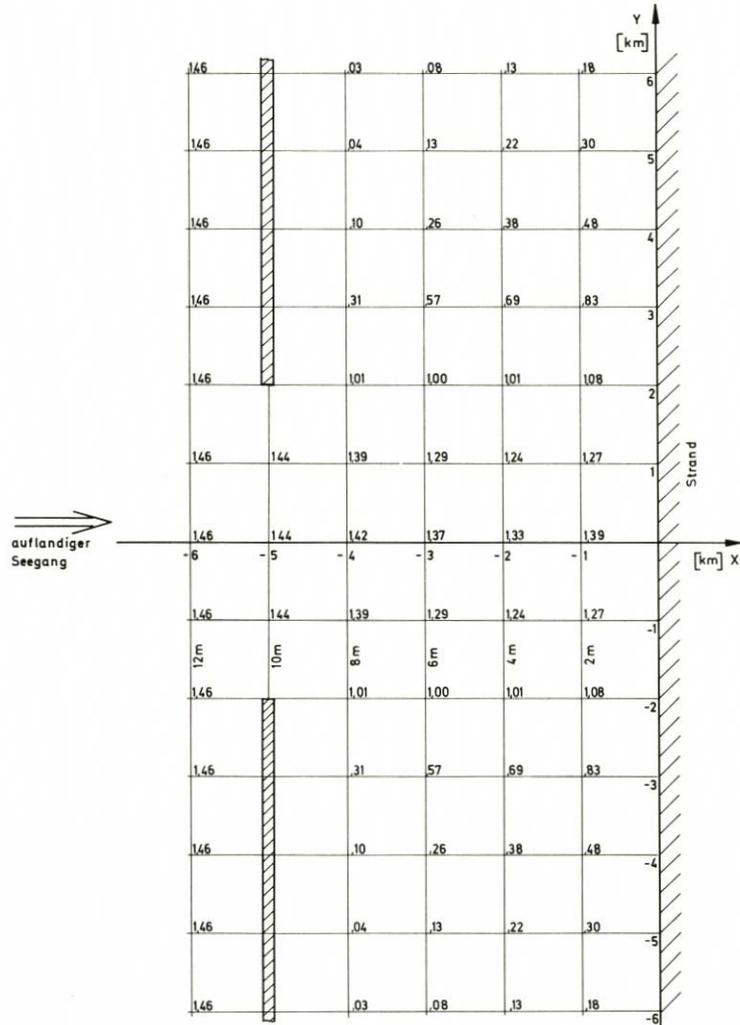
Beim Übergang zu großen Wassertiefen bleibt in der Lösung (7.5) nur der letzte Summand übrig, der den Anteil der Reibung im Innern des Wassers ohne Einfluß des Meeresbodens angibt (L. M. MILNE-THOMSON, S. 580).

8. Der Seegang hinter einem durchbrochenen Damm

In diesem und dem nächsten Abschnitt werden Beispiele für die Seegangsberechnungen angegeben, in denen die Kenntnis des Verlaufes der Wellenbahnen erforderlich ist, obwohl wieder von einem homogenen und stationären Seegang im tiefen Wasser ausgegangen wird und die Auswirkungen der Quellfunktion als vernachlässigbar klein angenommen werden.

In Abb. 4 ist ein Seegebiet skizziert, dessen Boden mit der Neigung $m = 2 \cdot 10^{-3}$ bis zur Küste hin ansteigt. 5 km vor dem Strand ist ein küstenparalleler Damm mit einem Durchlaß von 4 km Breite. Es wurde angenommen, daß der Seegang mit demselben Spektrum wie im ersten Beispiel in Abschnitt 4 vom tiefen Wasser auf die Küste zuläuft.

Um das Seegangsspektrum für einen Punkt hinter dem Durchlaß angeben zu können, muß man für jede Spektralkomponente ermitteln, ob die Wellenbahn den Durchlaß pas-



Seegang auf der Böschung hinter einem Durchlaß zwischen zwei Dämmen

Die Zahlen an den Gitterpunkten geben die signifikante Wellenhöhe in Meter für ein auflandiges Pierson-Moskowitz-Spektrum ($\sigma_m = 1 s^{-1}$)

Abb. 4

siert hat oder nicht. Im ersten Fall berechnet man die Energie dieser Spektralkomponente nach (4.1), im anderen ist sie 0, weil angenommen wird, daß hinter dem Damm kein merklicher Seegang entsteht.

$$(8.1) \quad E(x, y; \sigma, \vartheta) = E_h(\sigma, \vartheta) \cdot H(x, y, \sigma, \vartheta)$$

In der Formel (8.1) ist E_h der Ausdruck aus (4.1). Er hängt nicht von y ab; seine Abhängigkeit von x ergibt sich über die Wassertiefe $h = h(x)$. Die Gewichtsfunktion H ist gegeben durch

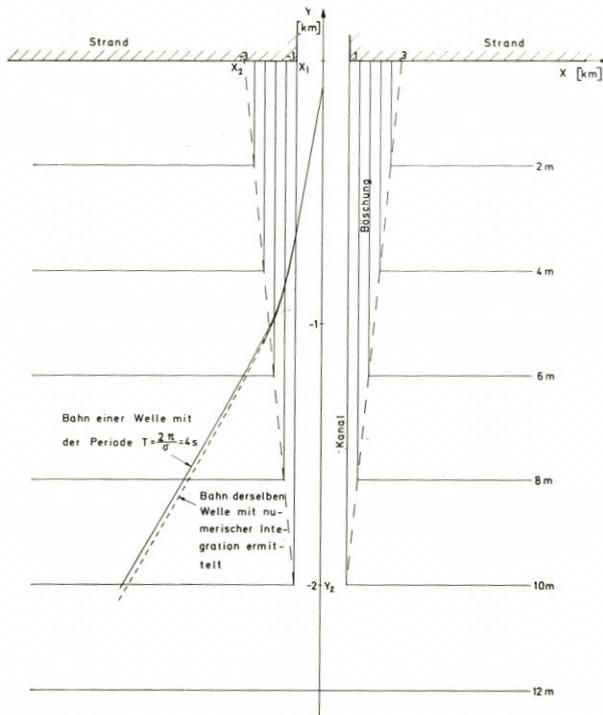


Abb. 5

$$(8.2) \quad H(x, y, \sigma, \vartheta) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \Delta y(x, \sigma, \vartheta) \text{ existiert} \\ & \text{und } -2 \text{ km} < \Delta y + y < 2 \text{ km} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Falls die Bahn einer Welle mit der Frequenz σ , die beim Koordinatenwert x mit der x -Achse den Winkel ϑ bildet, auch den Koordinatenwert des Damms x_0 erreicht, ist $\Delta y(x, \sigma, \vartheta)$ die Differenz der y -Werte dieser beiden Bahnpunkte. Um die Seegangsspektren an den in Abb. 4 eingezeichneten Punkten im Abstand von 1 km zu bekommen, wurde für 4 Werte von x , 50 Werte von σ und 35 Werte von ϑ ein dreidimensionales Feld $(\Delta y)_{i, j, k}$ berechnet. Um die Überlegenheit der analytischen Lösung zu testen, geschah dies einmal durch Ausrechnen der Formel (6.6) und außerdem durch numerische Integration der charakteristischen Gleichungen nach dem RUNGE-KUTTA-Verfahren zweiter Ordnung mit einer Schrittweite von 500 m.

Die nach dem RUNGE-KUTTA-Verfahren ermittelten Bahnen weichen um wenige Meter von den exakten nach Formel (6.6) ermittelten Bahnen ab. Lediglich bei Bahnen, die für die Punkte in 1 km Abstand von der Küste berechnet wurden, kann der Fehler bei den ermittelten Δy -Werten größer als 100 m werden. Neben den unvermeidlichen Fehlern bei der numerischen Berechnung der Wellenbahnen fällt die erforderliche Rechenzeit des elektronischen Rechners ins Gewicht. Die Berechnung des Feldes $(\Delta y)_{i, j, k}$ nach dem RUNGE-KUTTA-Verfahren erfordert etwa das Siebenfache an Rechenzeit wie die Auswertung des analytischen Ausdrucks (6.6).

Mit Hilfe der exakt berechneten Δy -Werte und des Richtungsspektrums wurde ge-

mäß (8.1) und (8.2) für die in Abb. 4 eingezeichneten Punkte das Richtungsspektrum errechnet und über ϑ und σ integriert. Die signifikante Wellenhöhe ist neben den Punkten verzeichnet.

9. Ein Beispiel für die Zusammensetzung von Lösungen

Zur weiteren Anwendung der Ergebnisse aus dem Abschnitt 6 wählen wir jetzt das Beispiel eines Seegebietes, dessen Boden aus drei geneigten und einer geraden Ebene zusammengesetzt ist. Die Zeichnung (Abb. 5) soll den Ansteuerungskanal zu einem an der Küste gelegenen Hafen darstellen. Die x-Achse bildet die Küste. Die Neigung des Meeresbodens zum Strand hin ist $m_1 = 5 \cdot 10^{-3}$. Die 10 m tiefe Kanalsohle ist 200 m breit und führt von der Küste bis zur 10 m-Linie. Die Kanalböschung hat die Neigung $m_2 = 5 \cdot 10^{-2}$. Die Anordnung ist symmetrisch zur y-Achse. Wir betrachten deshalb nur Wellen, die von links kommen, $0 \leq \vartheta \leq \pi/2$. Wir nehmen wieder an, daß der Seegang weit von der Küste im tiefen Wasser stationär und homogen ist und das Spektrum $E_0(\sigma, \vartheta)$ hat. Die Quellfunktion sei vernachlässigbar. Außerhalb des Kanalbereichs hat man wieder die Lösung wie im ersten Beispiel (Abschnitt 4), nur um $\pi/2$ verdreht. Wir interessieren uns für den Seegang im Bereich der 10 m tiefen Rinne. (x, y) sei ein Punkt in diesem Bereich. Über der Kanalsohle sind die Bahnen gradlinig, die Energie auf den Bahnen ändert sich dort nicht.

(9.1)

$$E(x, y; \sigma, \vartheta) = \begin{cases} E[x_1, y - (x - x_1) \tan \vartheta; \sigma, \vartheta] & \text{für } \vartheta < \vartheta_g(x, y) \\ E[x - (y - y_1) \operatorname{ctg} \vartheta, y_1; \sigma, \vartheta] & \text{für } \vartheta \geq \vartheta_g(x, y) \end{cases}$$

$$\vartheta_g = \arctan \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Die Bahnen, die durch den Kanaleingang laufen, werden wie in Abschnitt 4 bis zum tiefen Wasser fortgeführt, und man hat

$$(9.2) \quad E_d(x, y; \sigma, \vartheta) = \frac{g^2}{2\sigma^3} \frac{k(\sigma, h_1)}{v(\sigma, h_1)}$$

$$E_d \left[\sigma, \arccos \left[\frac{gk(\sigma, h_1)}{\sigma^2} \cos \vartheta \right] \right] \text{ für } \vartheta \geq \vartheta_g$$

In dieser Formel ist $h_1 = h(y_1) = 10 \text{ m}$

Die Behandlung der Bahnen, die über die Böschung laufen, ist etwas schwieriger. Es sei (x', y') ein Punkt auf der Böschung ($y_1 < y' < 0, x_1 - \frac{m_1}{m_2}(y - y_1) \leq x' \leq x_1$). Durch (x', y') laufe mit dem Winkel ϑ' eine Bahn. Wir suchen den Punkt (x_0, y_0) auf der Böschungskante, durch den diese Bahn geht, und den Winkel ϑ_0 an jener Stelle.

Die Gleichung der Böschungskante ist

$$(9.3) \quad y_0 - y_1 = -\frac{m_2}{m_1} (x_0 - x_1)$$

In der Formel (6.6) identifizieren wir $y(s) = y', h(s) = h'$ usw. und $m = m_2$. Wir

ersetzen $y_0 = -h_0/m_1$, setzen für h_0 den Ausdruck ein, der sich aus (2.1) ergibt, wenn man außerdem noch $k_0^2 = n_0^2 + b^2$ berücksichtigt. Daraus resultiert eine Bestimmungsgleichung für η_0 .

$$(9.4) \quad \frac{\frac{m_1}{m_2} b + \eta_0}{\sqrt{\eta_0^2 + b^2}} \operatorname{ar} \tanh \frac{\sigma^2}{g \sqrt{\eta_0^2 + b^2}} + \frac{\sigma^2}{2ga} \ln \frac{\eta_0 - a}{\eta_0 + a} =$$

$$= h' \eta' - m_2 b y' + \frac{\sigma^2}{2ga} \ln \frac{\eta' - a}{\eta' + a}$$

Die Lösung der transzendenten Gleichung (9.4) führt zusammen mit der Definition von b zum Bahnwinkel und der Wellenzahl an dem gesuchten Punkt der Böschungskante.

$$(9.5) \quad \vartheta_0 = -\operatorname{arc} \tan \frac{b}{\eta_0}, \quad k_0 = \sqrt{\eta_0^2 + b^2}$$

Aus k_0 ergibt sich die Wassertiefe h_0 , und aus (9.3) und $y_0 = -h_0/m_1$ folgen die Koordinaten des gesuchten Punktes.

Wenn, wie wir annehmen, die Quellfunktion vernachlässigbar ist, bleibt auf der Bahn die Größe $\frac{v}{k} E$ erhalten. Am Punkt (x_0, y_0) ist das Spektrum des einlaufenden Seegangs auf einfache Weise durch das Spektrum im tiefen Wasser bestimmt. Daher hat man

$$(9.6) \quad E(x', y'; \sigma, \vartheta) = \frac{v_0}{k_0} \frac{k'}{v'} E(x_0, y_0; \sigma, \vartheta_0)$$

$$= \frac{g^2}{2\sigma^3} \frac{k'}{v'} E_d \left[\sigma, \operatorname{arc} \cos \left[\frac{gk_0}{\sigma^2} \cos \vartheta_0 \right] \right]$$

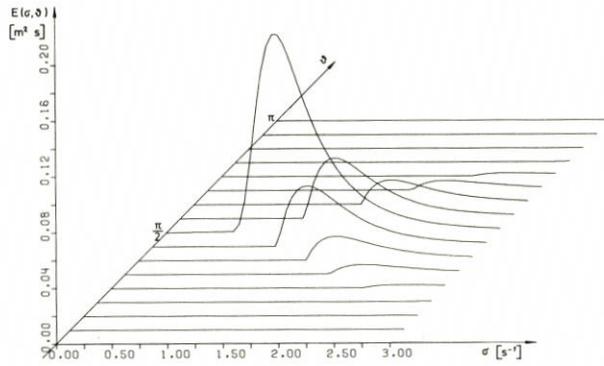
Um jetzt in (9.1) auch für $\vartheta < \vartheta_g$ das Spektrum als Funktion des Tiefwasserspektrums auszudrücken, brauchen wir nur die Festlegung zu treffen

$$(9.7) \quad x' = x_1, \quad y' = y - (x - x_1) \tan \vartheta, \quad \vartheta' = \vartheta$$

Damit ist das Spektrum im Kanal bestimmt. Abb. 6 zeigt für das Tiefwasserspektrum aus Abb. 1 das Richtungsspektrum an einem ufernahen Punkt, das fast nur Komponenten in Kanalrichtung enthält.

Außerdem ist in Abb. 5 zum Vergleich die Bahn einer Welle mit der Periode 4 s eingezeichnet, die einmal mit Hilfe der in dieser Arbeit angegebenen Formeln (ausgezogene Kurve) und zum anderen durch numerische Integration nach dem Tangenzugverfahren (gestrichelte Kurve) berechnet wurde. Bei der numerischen Rechnung muß die Schrittweite an die jeweils herrschende Wassertiefe und deren Gradienten angepaßt sein. Die Kurve in Abb. 5 wurde mit einer Schrittweite von 20 m auf der Kanalböschung und 200 m außerhalb des Kanalbereichs gewonnen.

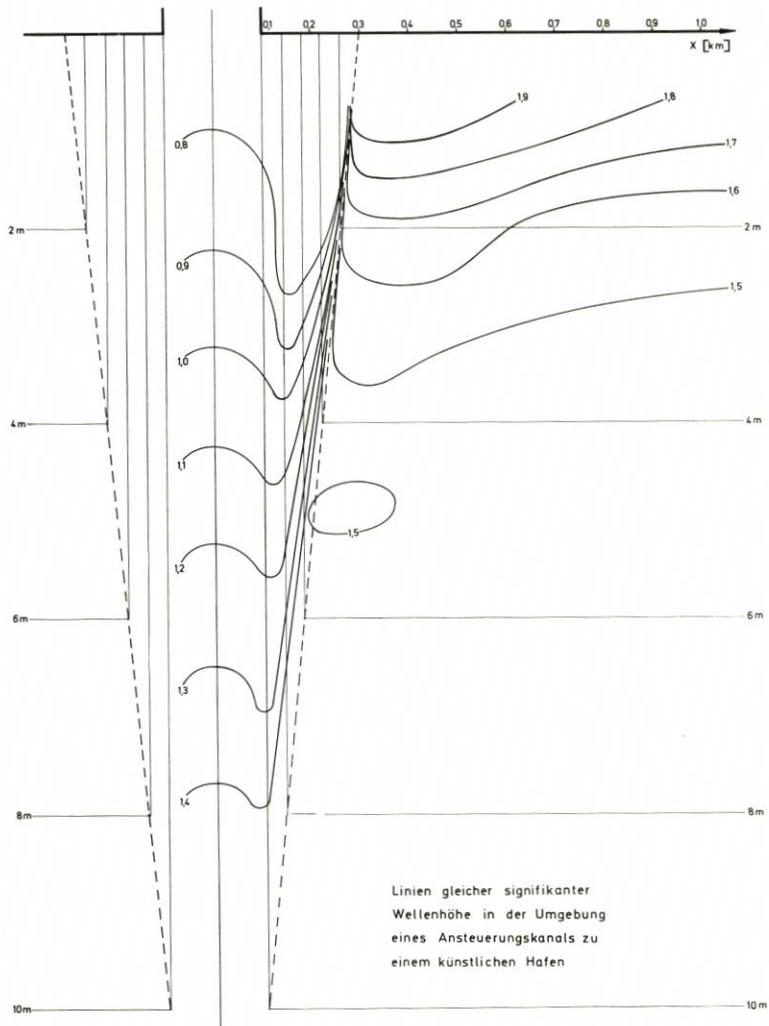
Für die gesamte Umgebung des Kanals wurden mit der beschriebenen Methode Spektren errechnet und integriert, um die signifikante Wellenhöhe zu erhalten. Die Linien gleicher Wellenhöhe sind in Abb. 7 dargestellt. Die Stelle, wo sich die Seegangenergie konzentriert, ist gut zu erkennen. Die errechneten Werte werden nicht ganz mit denen übereinstimmen, die in der Natur beobachtet würden. Das liegt aber nicht an der Art



Richtungsspektrum an einem strandnahen Punkt im Kanal

(X = 0, Y = - 0,1)

Abb. 6



Linien gleicher signifikanter Wellenhöhe in der Umgebung eines Ansteuerungskanals zu einem künstlichen Hafen

Abb. 7

der Lösung der linearen Transportgleichung, sondern an der linearen Transporttheorie selbst und an der Vernachlässigung der Quellfunktion.

10. Diskussion

Die Ausbreitung des Seegangs in Seegebieten mit ebenem, geneigtem Boden ist mit Hilfe analytischer Ausdrücke für die Bahnen, auf denen seine Komponenten wandern, berechenbar. Die Verwendung dieser Ausdrücke erspart Rechenzeit und Tests, um geeignete Integrationsverfahren und -schrittweiten für die numerische Rechnung zu finden.

Die Energie einer Seegangskomponente wird in den meisten Fällen nur mit numerischer Integration zu berechnen sein. Weil aber im allgemeinen die Änderung von Ort und Richtung der Bahn abhängt, ist es vorteilhaft, die Bahn zu kennen, um die Integration der Energie auf der Bahn ganz nach den Erfordernissen der Quellfunktion ausrichten zu können.

Es ist denkbar, daß manche realen Seegebiete in solcher Weise in Untergebiete zerlegt werden können, so daß für jedes Untergebiet die in dieser Arbeit dargestellte Methode zur Berechnung des Seegangs angewendet werden kann. Im allgemeinen kann man aber erwarten, daß dann die Rechnung sehr aufwendig wird und daher keinen Vorteil gegenüber einer üblichen numerischen Berechnung der Wellenbahnen bietet.

Die Methode der analytischen Lösung ist dagegen bei Modellrechnungen mit hinreichend einfacher Bodentopographie den üblichen Rechenmethoden vorzuziehen, weil einerseits die Genauigkeit der Ergebnisse größer und andererseits der numerische Aufwand kleiner ist.

Schriftenverzeichnis

- BIESEL, F.: Calcul de l'amortissement d'une houle dans un liquide visqueux de profondeur finie. *La Houille Blanche*, 4, S. 630, 1949.
- CHAO, Y. Y. u. PIERSON, W. J.: Experimental studies of the refraction of uniform wave trains and transient wave groups near a straight caustic. *J. Geophys. Res.*, 77, S. 4545 bis 4554, 1972.
- COLLINS, J. I.: Prediction of shallow-water spectra, *J. Geophys. Res.*, 77, S. 2693-2707, 1972.
- EWING, J. A.: A numerical wave prediction method for the North Atlantic Ocean. *DHZ.*, 24. Jg., H. 6, S. 241, 1971.
- HASSELMANN, K.: Weak-interaction theory of ocean waves. *Basic Developments on Fluid Dynamics*, 2, S. 117-182, 1968.
- HASSELMANN, K. et al.: Measurements of wind-wave-growth and swell decay during the Joint North Sea Wave Project. (JONSWAP) *DHZ.*, Suppl. A, No. 12, 1973.
- LONGUET-HIGGINS, M. S.: On the transformation of a continuous spectrum by refraction. *Proc. Cam. Phil. Soc.*, 53, S. 226-229, 1956.
- MILNE-THOMSON, L. M.: *Theoretical hydrodynamics*. Macmillan & Co. Ltd, London, 4th Edition, 1962.
- PIERSON, W. J. u. MOSKOWITZ, L.: A proposed spectral form for fully developed wind seas based on the similarity theory of S. A. Kitaigorodskii. *J. Geophys. Res.*, 69, S. 181, 1964.
- WILLEBRAND, J.: Zum Energietransport in einem nichtlinearen räumlich inhomogenen Seegangsfeld. Dissertation, Kiel, 1973.