

Ein Finite-Element-Modell zur Berechnung von Tideströmungen in Ästuarien mit Wattflächen

Von Bruno Herrling

Zusammenfassung

Mit Hilfe des Finite-Element-Verfahrens werden zweidimensionale inkompressible Flachwasserwellen numerisch berechnet. Das beschriebene Modell wird eingesetzt, um bei der Ausbreitung von Tidewellen in Ästuarien die hydrodynamischen Zustandsgrößen zu ermitteln. Zeitweise trockenfallende Wattflächen werden berücksichtigt.

Summary

Two-dimensional, incompressible shallow water waves are computed numerically with the aid of the finite element method. The model described is used to reproduce the dynamic situation occurring during tidal propagation in estuaries. Areas which fall dry and wet again within a tidal cycle – so-called inter-tidal flats – are taken into account.

Inhalt

1. Einführung	102
2. Grundgleichungen	103
3. Finite-Element-Verfahren	104
4. Wattflächen	106
5. Numerische Berechnung mit Hilfe des Programmsystems MECCA	107
6. Numerische Ergebnisse	108
7. Schriftenverzeichnis	113

1. Einführung

Das Finite-Element-Verfahren wird seit über zehn Jahren mit Erfolg in der Strukturmechanik verwendet. In den letzten Jahren ist diese Methode auch in der Strömungsmechanik eingeführt worden. GROTKOP (1972, 1973), CONNOR u. WANG (1974), DAVIS u. TAYLOR (1974) und andere benutzten sie, um Flachwasserwellen zu berechnen, jedoch bisher ohne die Wattflächen einzubeziehen. Nur RAMMING (1972) sowie APELT, GOUT u. SZEWCZYK (1974), die das Differenzenverfahren verwenden, berücksichtigen diese Flächen.

In der Deutschen Bucht sind zahlreiche Wattflächen der Küstenlinie vorgelagert. Ohne eine Berücksichtigung solcher Flächen können die hydrodynamischen Zustandsgrößen in der Nähe dieser Gebiete nur ungenau mit einem mathematischen Modell berechnet werden.

Es sind deshalb Berechnungsalgorithmen für Wattlelemente und für normale Elemente entwickelt worden, die in einem mathematischen Modell gekoppelt werden. Diese Koppelung ist sinnvoll und erspart Rechenzeit, da für die Elemente der ersten Art sehr viel mehr organisatorischer und numerischer Aufwand erforderlich ist, um die dauernd wechselnde Geometrie des Gebietes zu berücksichtigen.

2. Grundgleichungen

Zur Lösung des vorliegenden Problems werden die vertikal gemittelten horizontalen Geschwindigkeiten v_i ($i = 0,1$), die in einem kartesischen Koordinatensystem definiert

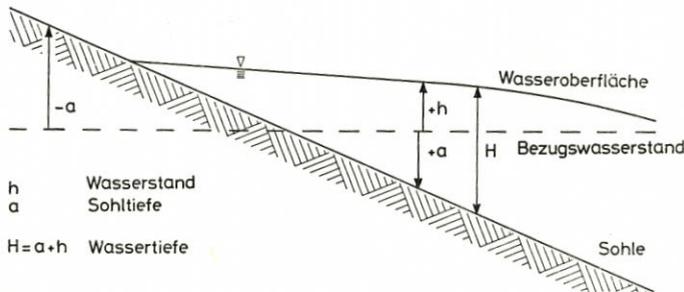


Abb. 1. Definitionsskizze dargestellt im Vertikalschnitt

sind, und der Wasserstand h (Abb. 1) als zu berechnende Parameter eingeführt. Die Differentialgleichungen für diese zweidimensionale Problemstellung erhält man durch Integration der Kontinuitäts- und Bewegungsgleichungen über die Tiefe (siehe z. B. DRONKERS, 1964):

$$h_{,t} + q_{i,i} - q^* = 0 \quad (1)$$

$$v_{i,t} + v_j v_{i,j} + g h_{,i} + \frac{\lambda \sqrt{v_j v_j}}{a+h} v_i - \Omega \epsilon_{ij} v_j + \frac{1}{\rho} p_{o,i} - \frac{\mu_w \sqrt{W_j W_j}}{a+h} W_i = 0 \quad (2)$$

Über $i, j = 0,1$ wird summiert. In der Kontinuitätsgleichung wird der Durchfluß pro Längeneinheit q_i später durch die Beziehung

$$q_i = (a+h) v_i \quad (3)$$

ersetzt. Mit q^* wird ein Zufluß in das Berechnungsgebiet beschrieben; dieser wird im folgenden noch genauer definiert.

In den Bewegungsgleichungen berücksichtigen wie üblich spezielle Terme die Bodenreibung, die Corioliskraft, den atmosphärischen Druck und die Windkraft. Als Konstante werden eingeführt: g als Erdbeschleunigung, λ als dimensionsloser Reibungsparameter, Ω als Coriolisparameter, der eine Funktion der geografischen Breite ist, ϵ_{ij} als ϵ -Tensor, ρ als Dichte des Wassers, p_o als atmosphärischer Druck, μ_w als dimensionsloser Windreibungsparameter und W_i als die Komponenten der Windgeschwindigkeit.

In den Gleichungen bedeuten $(\)_{,i}$ und $(\)_{,t}$ partielle Differentiationen nach den kartesischen Koordinaten x_i bzw. nach der Zeit t .

Für die nichtlinearen Terme werden die folgenden Linearisierungen durchgeführt:

$$q_i = (a + \bar{h}) v_i + (h - \bar{h}) \bar{v}_i \quad (4)$$

$$v_j v_{i,j} = \bar{v}_j v_{i,j} + v_j \bar{v}_{i,j} - \bar{v}_j \bar{v}_{i,j} \quad (5)$$

Für \bar{h} und \bar{v}_i werden entweder in Zeitrichtung extrapolierte Werte, Werte vom letzten Iterationsschritt, falls eine Iteration innerhalb des Zeitschritts verwendet wird, oder die Werte aus dem Anfangszustand genommen.

Als Randbedingungen werden Wasserstandsganglinien oder Ganglinien des Zuflusses über den Rand eingeführt (siehe Abb. 2):

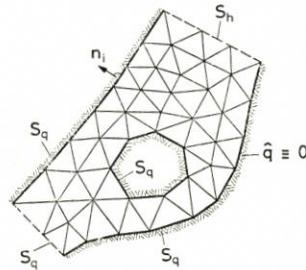


Abb. 2. Bezeichnung der Ränder

$$h - \hat{h} = 0 \quad \text{auf } S_h \tag{6}$$

$$q_i n_i + \hat{q} = 0 \quad \text{auf } S_q \tag{7}$$

Mit \hat{h} wird ein vorgeschriebener Wasserstand und mit positivem \hat{q} ein vorgegebener Zufluß senkrecht über den Rand bezeichnet. Längs eines geschlossenen Randes ist \hat{q} identisch Null.

3. Finite-Element-Verfahren

Da für das vorliegende Problem kein Funktional existiert, wird die Methode der gewichteten Residuen verwendet. Sie ist die Grundlage für die Anwendung des Finite-Element-Verfahrens (siehe z. B. ZIENKIEWICZ, 1971).

Das Berechnungsgebiet wird unterteilt in finite Elemente. Für die Integration der gewichteten Differentialgleichungen werden Raum-Zeit-Elemente mit linearen Ansatzfunktionen Θ_E und τ_T entsprechend Abb. 3 gewählt. In Zeitrichtung werden die Gleichungen wie üblich schrittweise gelöst.

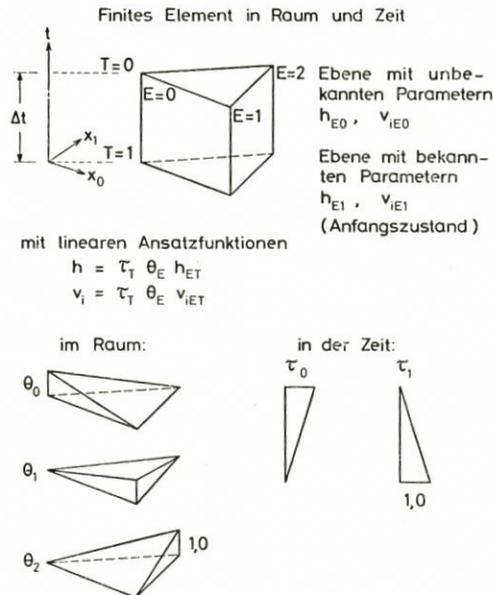


Abb. 3. Raum - Zeit - Element mit Ansatzfunktionen

Die Gewichtsfunktionen

$$\delta h = \bar{\tau}_0 \Theta_E \delta h_{E0}$$

$$\text{und } \delta v_i = \bar{\tau}_0 \Theta_E \delta v_{iE0}$$

sind Funktionen in Raum und Zeit; δh_{E0} und δv_{iE0} sind beliebige Werte. Im gegenwärtigen Modell sind die Ortswichtungsfunktionen identisch mit den Ansatzfunktionen Θ_E (GALERKIN-Methode). In Zeitrichtung werden spezielle Gewichtsfunktionen $\bar{\tau}_0$ (Abb. 4)

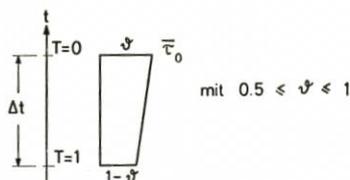


Abb. 4. Gewichtsfunktion in Zeitrichtung $\bar{\tau}_0$

gewählt, um die numerische Diffusion zu reduzieren. Mit $\psi = 0,5$ entspricht dies einer CRANK-NICOLSON-Zeitintegration und mit $\psi = 1,0$ einem GALERKIN-Ansatz in Zeitrichtung. Der beste Wert liegt etwas über 0,5.

Die Kontinuitätsgleichung wird mit δh gewichtet:

$$\int_A \int_t \delta h (h_{,t} + q_{i,i}) dt dA - \int_A \int_t \delta h q dt dA - \int_t \delta h_K Q_K dt = 0 \quad (8)$$

An Stelle von q^* werden ein flächig verteilter Zufluß q im Element und eine Punktquelle Q_K am Knoten K des Systems eingeführt. Nach partieller Integration, Einsetzen der Randbedingung (7) auf S_q , Ersetzung (3) von q_i und Linearisierung (4) wird die Gleichung (8) umgeformt zu

$$\int_A \int_t [\delta h h_{,t} - \delta h_{,i} \{a+\bar{h}\} \bar{v}_i + \{h-\bar{h}\} \bar{v}_i] dt dA =$$

$$\int_{S_q} \int_t \delta h \hat{q} dt ds + \int_A \int_t \delta h q dt dA + \int_t \delta h_K Q_K dt \quad (9)$$

Die Bewegungsgleichungen (2) werden mit δv_i gewichtet. Nach der Linearisierung erhalten sie die Form

$$\int_A \int_t \delta v_i [v_{i,t} + \bar{v}_j v_{i,j} + v_j \bar{v}_{i,j} - \bar{v}_j \bar{v}_{i,j} + gh_i + \frac{\lambda \sqrt{\bar{v}_j \bar{v}_j}}{a+\bar{h}} v_i$$

$$- \Omega \epsilon_{ij} v_j + \frac{1}{\rho} p_{0,i} - \frac{\mu_w \sqrt{\bar{w}_j \bar{w}_j}}{a+\bar{h}} w_i] dt dA = 0 \quad (10)$$

Die Integration der gewichteten Gleichungen (9) und (10) erfolgt in der Zeitrichtung wegen des schrittweisen Vorgehens jeweils über ein Zeitintervall Δt und räumlich über das gesamte Berechnungsgebiet A . Mit Verwendung des Finite-Element-Verfahrens wird die Integration über den Gesamtbereich ersetzt durch die Summe der Integrale über die einzelnen Elemente. Dies führt auf Matrixgleichungen eines Elementes, bestehend aus neun Gleichungen mit neun Unbekannten, aus denen das Gesamtgleichungssystem aufgebaut und in jedem Zeitschritt gelöst wird.

Die Randbedingung (6) wird im Gesamtgleichungssystem durch das übliche Streichen von entsprechenden Zeilen und Spalten berücksichtigt.

4. Wattflächen

Wenn Wattflächen in einem mathematischen Modell berücksichtigt werden sollen, sind zwei Grundprobleme zu lösen: Erstens sind die physikalischen Verhältnisse in der Nähe der sich verlagernden Wasserlinie zu erfassen, und zweitens ist das Organisationsproblem zu bewältigen, wenn die Ränder des mathematischen Modells wegen trockenfallender Flächen zu wandern beginnen.

Es wird folgende prinzipielle Vorgehensweise zur Lösung dieser Probleme vorgeschlagen:

- Die räumliche Diskretisierung bleibt konstant.
- Elemente mit mindestens einem trockenem Knoten am Ende eines Zeitschritts werden aus dem Berechnungsgebiet A entfernt.
- In den teilweise überströmten Elementen wird lediglich die verbleibende Wassermenge betrachtet, die eine Funktion des Wasserstandes in angrenzenden überströmten Knoten ist.

Durch diese Vereinfachung wird zwar die Dynamik in unmittelbarer Nähe der Wasserlinie nicht genau wiedergegeben, es wird aber die Kontinuitätsbedingung exakt eingehalten. Da dieser Bereich im Vergleich zum verbleibenden Modell sehr klein und die Wassertiefe hier in der Regel sehr gering ist, wird sich nur ein minimaler Fehler ergeben. Andererseits ist nur auf diese Weise die gesamte Programmorganisation mit vertretbarem Aufwand zu bewältigen.

Um die vorgeschlagene Lösung durchzuführen, müssen einige Voraussetzungen erfüllt sein:

- Die Ränder des überströmten Gebiets werden mit Hilfe von Randintegralen beschrieben.
- Während eines Zeitschritts kann an jeweils festgelegten Knoten des Systems eine berechnete Wassermenge exakt zugegeben oder entnommen werden.
- Eine Iteration innerhalb des Zeitschritts ist durchführbar, um den aktuellen Rand der numerischen Berechnung zu korrigieren und um in den teilweise überströmten Elementen die verbleibende Wassermenge zu überprüfen.
- Eine Relaxation kann benutzt werden, um die Iteration zu beschleunigen.
- Um für die Iteration einen besseren Ausgangszustand zu erhalten, werden die Wasserstände in Zeitrichtung unter Verwendung der Fehlerquadratmethode extrapoliert.

Im folgenden wird die Vorgehensweise im einzelnen erläutert: Für die Berechnung eines neuen Zeitschritts liegen die Anfangsbedingungen aller Parameter des letzten Zeit-

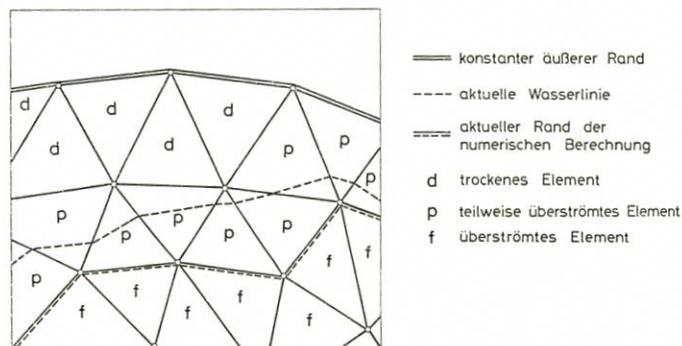


Abb. 5. Verschiedene Ränder im Bereich der Wattlelemente

schritts vor. Die neuen Wasserstände in allen Knoten werden nun überschläglich durch eine zeitliche Extrapolation mit den Werten von mehreren zurückliegenden Zeitschritten bestimmt.

Auf diese Weise können Elemente auftreten, die am Ende des betrachteten Zeitschritts drei trockene Knoten haben; diese werden als „trockene Elemente“ bezeichnet (Abb. 5). Weiterhin gibt es „teilweise überströmte Elemente“ mit einem oder zwei trockenen Knoten. Alle übrigen sind „überströmte Elemente“; diese bilden das verbleibende mathematische Modell. Der Rand zwischen den überströmten und den teilweise überströmten Elementen – der aktuelle Rand der numerischen Berechnung – wird durch Randintegrale beschrieben. Die aktuelle Wasserlinie läßt sich mittels einer horizontalen Extrapolation des Wasserstandes in angrenzenden überströmten Elementen finden. Auf diese Weise wird die in den teilweise überströmten Elementen verbleibende Wassermenge bestimmt (Abb. 6). Die sich in den teilweise überströmten und trockenen Elementen einstellende Differenz des Wasservolumens zwischen Anfangs- und neuem Zustand wird als punktförmige Quelle oder Senke im gleichen Zeitschritt in das verbleibende dynamische Modell zugegeben oder dem Modell entnommen. Dadurch beeinflussen die teilweise überströmten Elemente die Dynamik und korrigieren die Wassermengen im überströmten Gebiet.

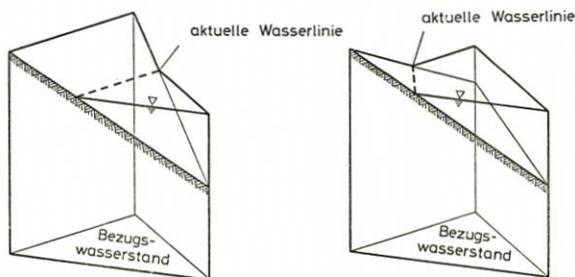


Abb. 6. Teilweise überströmte Elemente

Nach der Berechnung der Elementmatrizen der überströmten Elemente und der Lösung des Gleichungssystems erhält man die neuen Wasserstände und Geschwindigkeiten. Im allgemeinen unterscheiden sich die Wasserstände von den extrapolierten Werten; sie werden durch eine Iteration innerhalb des Zeitschritts verbessert. Gleichzeitig werden der aktuelle Rand der numerischen Berechnung und die in den teilweise überströmten Elementen verbleibende Wassermenge korrigiert. Die Iteration wird durch eine Relaxation beschleunigt.

5. Numerische Berechnung mit Hilfe des Programmsystems MECCA

Die numerischen Berechnungen werden mit Hilfe des Programmsystems MECCA (Modular Element Concept for Continuum Analysis) durchgeführt (BEYER, 1976; PFEIFFER u. HERRLING 1975). Das modular aufgebaute System führt die immer wiederkehrenden Operationen durch, wie sie bei einem Finite-Element-Verfahren, bei Randwert- bzw. wie in diesem Falle bei Anfangs- und Randwertproblemen auftreten; es löst Organisations-

probleme wie Ein- und Ausgabe, Datenverwaltung auf Plattenspeichern, Aufbau und Lösen des Gleichungssystems und ermöglicht eine grafische Darstellung der Ergebnisse. Die Eingabe und teilweise die Steuerung der Aufeinanderfolge der Programm-Moduln (Bausteine) wird mit Hilfe einer problemorientierten Sprache durchgeführt.

Die einen physikalischen Vorgang beschreibenden Differentialgleichungen und die sich daraus ergebenden Besonderheiten eines Elementes werden in getrennten Elementprogrammen bearbeitet, die an spezielle Bausteine von MECCA als Overlay angehängt werden. Auf diese Weise besteht die Möglichkeit, unter Verwendung von gemeinsamen Parametern in den Knoten verschiedene Elementtypen zu koppeln – in diesem Fall Wattlelemente und normale Elemente.

6. Numerische Ergebnisse

Die Verwendbarkeit des vorgestellten Verfahrens wird an Hand von zwei Beispielen vorgeführt: Einmal wird ein Kontinuitätstest in einem teilweise trockenfallenden Becken durchgeführt, und in einem zweiten Beispiel wird das Programm auf die Berechnung der Tideverhältnisse in der äußeren Jade angewandt.

Für den Kontinuitätstest ist ein rechteckiges Gebiet mit geneigter Sohle gewählt worden, dessen Elementnetz und Tiefenverteilung in Abb. 7 dargestellt sind. Drei Ränder des Beckens sind geschlossen. Am vierten, offenen Rand wird ein zeitabhängiger Zufluß \hat{q} vorgegeben (Abb. 8). Der Abfluß ist so bemessen, daß sich der Wasserstand im gesamten Becken um 1 m erniedrigt. In den Abb. 9 und 10 werden die Ergebnisse der numerischen Rechnung zu verschiedenen Zeitpunkten dargestellt (Reibungsparameter $\lambda = 0,003$; Zeit-

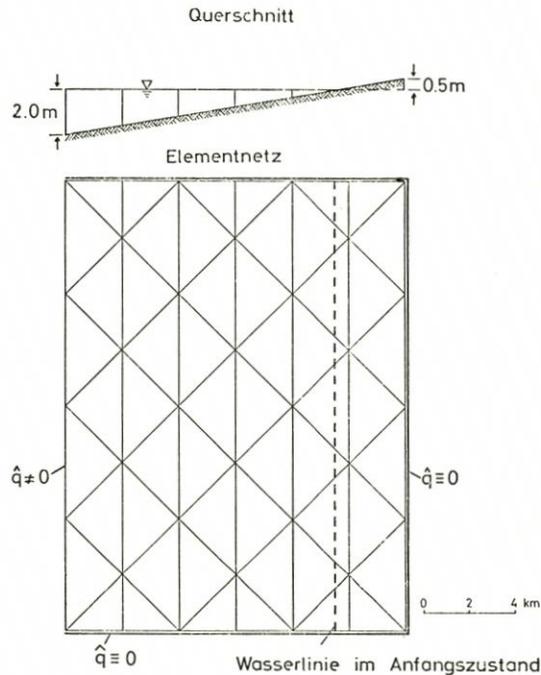


Abb. 7. Elementnetz und Tiefenverteilung

schritt $\Delta t = 30 \text{ min}$). Die Berechnung hat ergeben, daß die Wassermassen exakt erhalten bleiben.

In einem zweiten Beispiel ist die zeitabhängige Verteilung der Wasserstände und Geschwindigkeiten in der äußeren Jade (Abb. 11) unter Tideeinfluß berechnet worden. Abb. 12 zeigt das gewählte grobe Elementnetz mit den verwendeten zwei unterschiedlichen Elementtypen. Abb. 13 gibt die Tiefenverteilung im mathematischen Modell wieder. An den offenen Rändern S_{h1} und S_{h2} werden Wasserstandsganglinien als Randbedingungen vorgegeben (Abb. 14). Die Rechnung erfolgte mit einem Reibungsbeiwert $\lambda = 0,003$ und einem Zeitschritt $\Delta t = 10 \text{ min}$. Als Ergebnisse sind in den Abb. 15 und 16 die Geschwindigkeitsverteilung und die Flächen mit trockenen und nur teilweise überströmten Elementen dargestellt. An den ersten Ergebnissen läßt sich ablesen, daß das vorgeschlagene Verfahren brauchbar ist.

Der Autor dankt der Deutschen Forschungsgemeinschaft, die die Programmentwicklung im Rahmen des Sonderforschungsbereiches 79 (SFB 79) „Wasserforschung im Küstenbereich“ in Hannover finanziell unterstützte, Herrn cand. ing. J. CLAUSSEN für seine Hilfe bei der Realisierung des Programms (CLAUSSEN, 1976) und die Durchführung der numerischen Rechnungen und Herrn Dipl.-Ing. H. H. HENNLICH für die Erstellung des Elementnetzes für die äußere Jade.

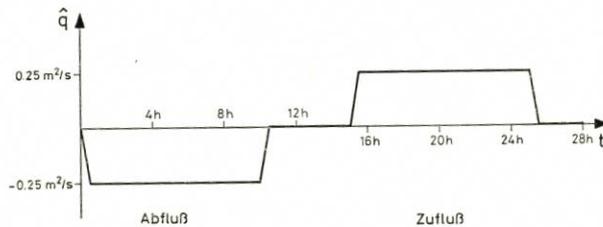


Abb. 8. Vorgegebene Strömung über den offenen Rand

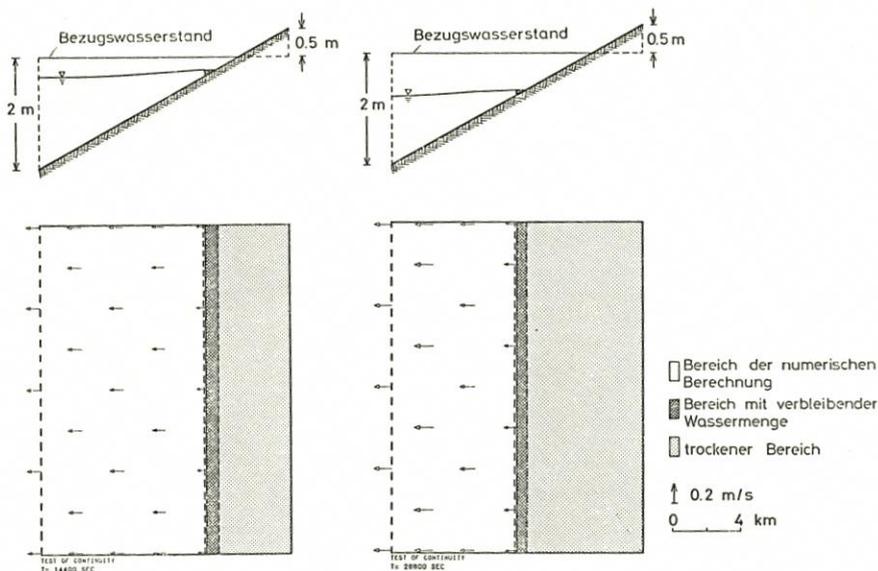


Abb. 9. Zustand zur Zeit 4 h (links) und 8 h (rechts)

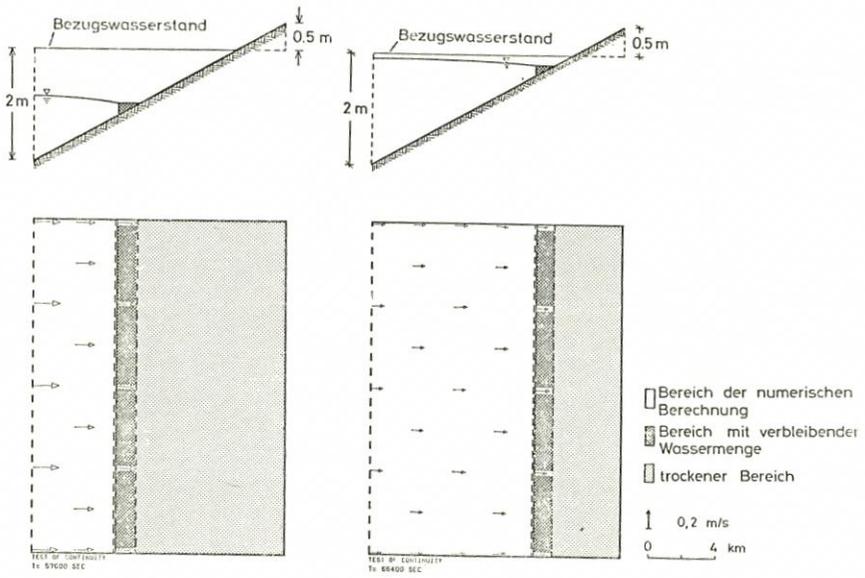


Abb. 10. Zustand zur Zeit 16 h (links) und 24 h (rechts)

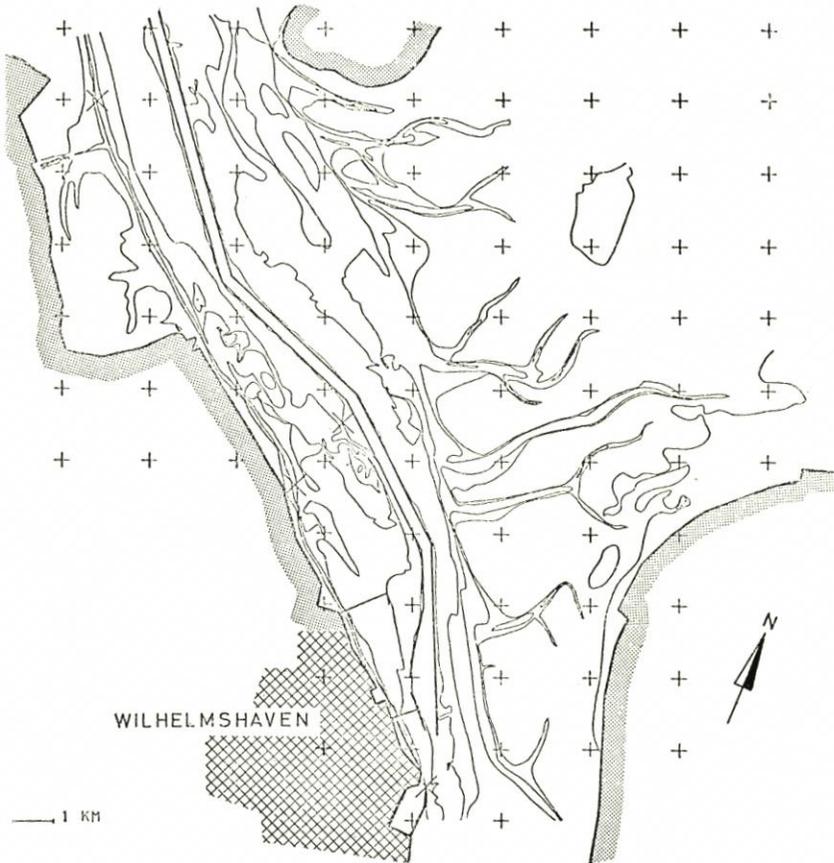


Abb. 11. Topografie der äußeren Jade

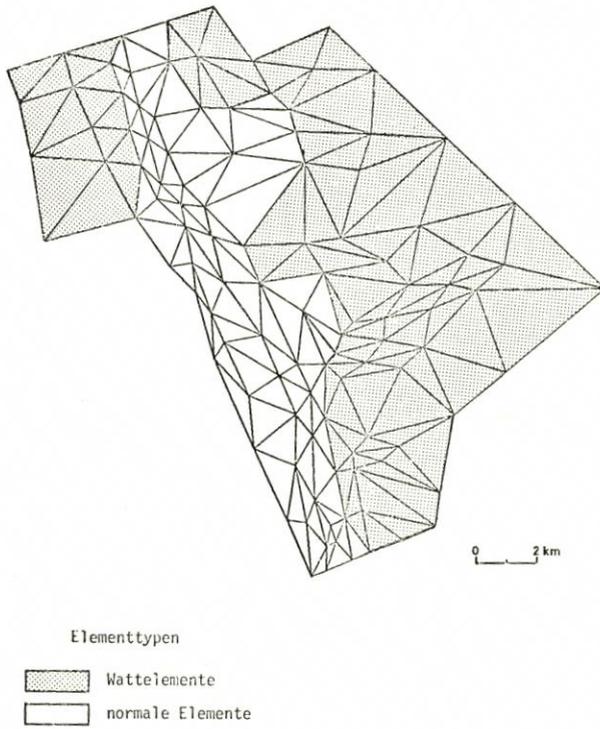


Abb. 12. Elementnetz und verwendete Elementtypen

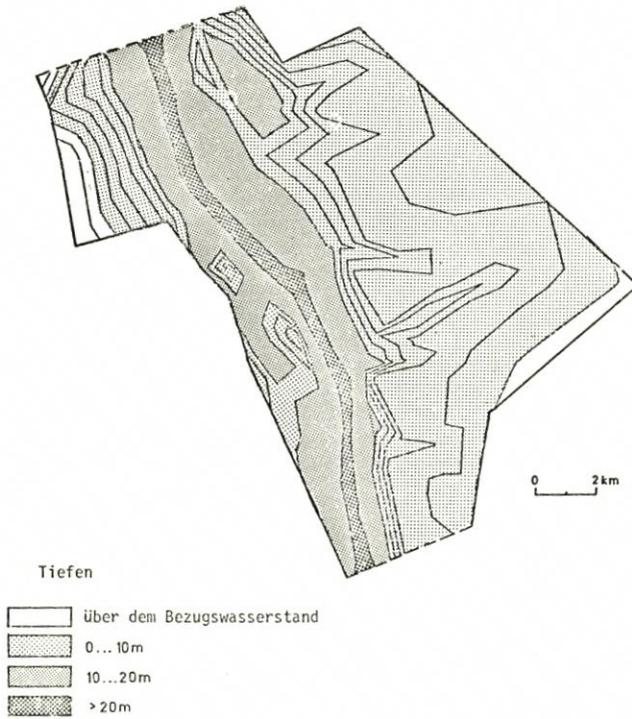


Abb. 13. Tiefenverteilung im mathematischen Modell

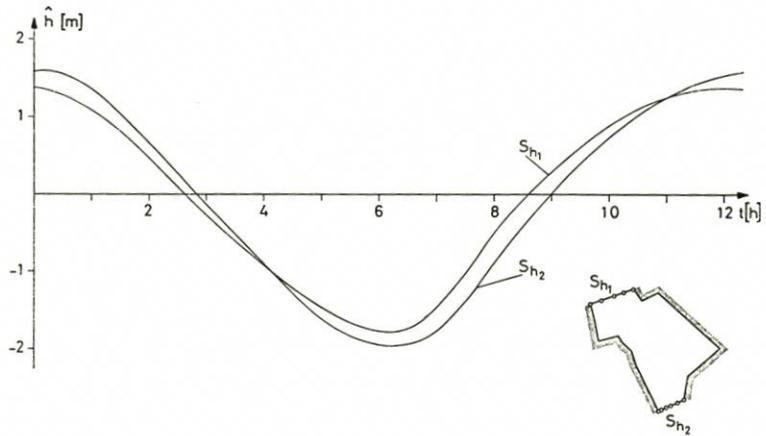


Abb. 14. Randbedingungen: Vorgegebene Wasserstände am Rand S_{h1} und S_{h2}

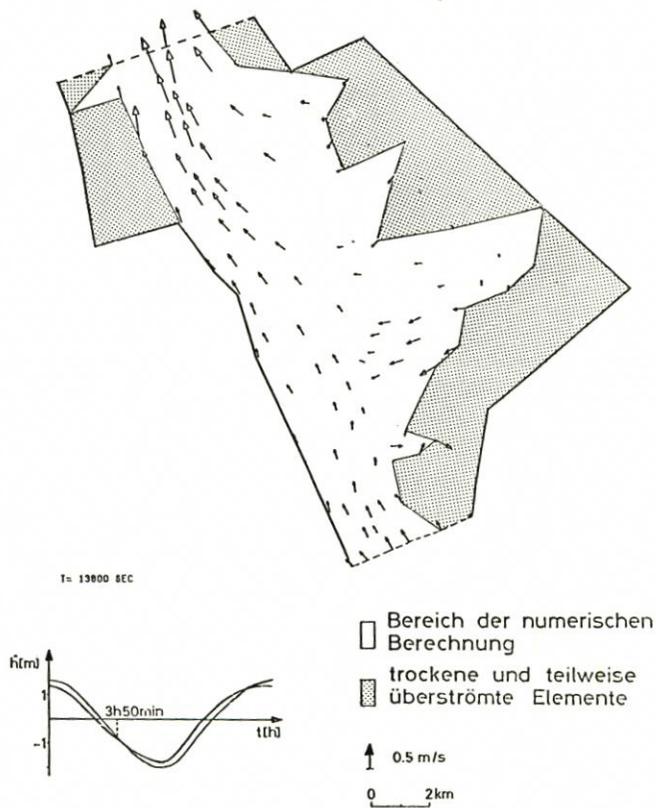


Abb. 15. Strömungsgeschwindigkeiten nach 3 h und 50 min

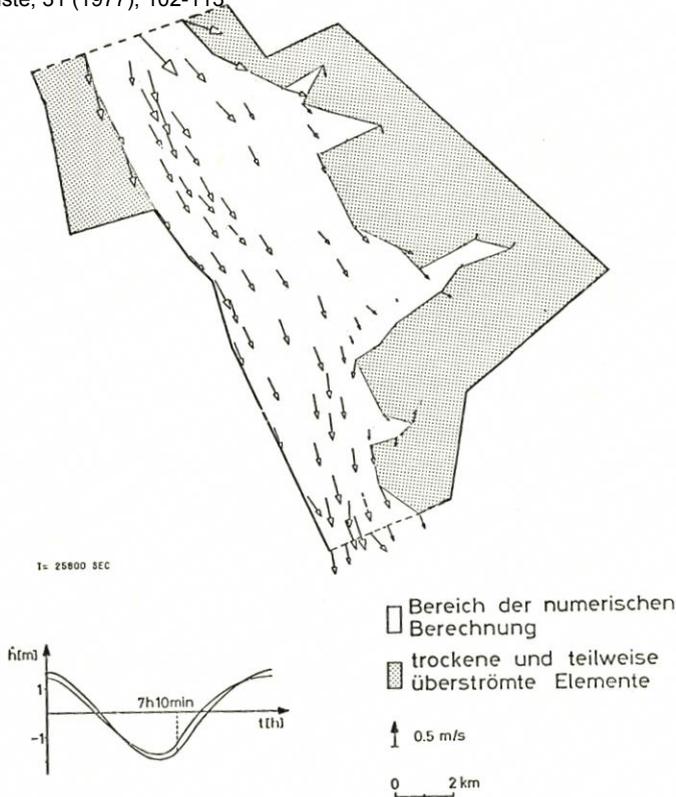


Abb. 16. Strömungsgeschwindigkeiten nach 7h und 10 min

7. Schriftenverzeichnis

- APELT, C. J., GOUT, J. J. u. SZEWCZYK, A. A.: Numerical Modelling of Pollutant Transport and Dispersion in Bays and Estuaries. Numerical Methods in Fluid Dynamics, Pentech Press, London, 1974.
- BEYER, A.: Die mathematische Formulierung eines Programmsystems für die FEM. Wiss. Zeitschr. der Hochsch. für Architektur u. Bauwesen Weimar, 23. Jahrg., H. 3, 1976.
- CLAUSSEN, J.: Zur Berechnung von zweidimensionalen Flachwasserwellen unter Berücksichtigung von Wattflächen. Diplomarbeit, T. U. Hannover, 1976.
- CONNOR, J. J. u. WANG, J.: Finite Element Modelling of Hydrodynamic Circulation. Numerical Methods in Fluid Dynamics, Pentech Press, London, 1974.
- DRONKERS, J. J.: Tidal Computations in Rivers and Coastal Waters. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1964.
- GROTKOP, G.: Die Berechnung von Flachwasserwellen nach der Methode der finiten Elemente. Jahresbericht 1971 des Sonderforschungsbereiches 79, H. 2, 1972.
- GROTKOP, G.: Finite Element Analysis of Long-Period Water Waves. Computer Meth. in Appl. Mech. and Eng., Vol. 2, No. 2, Mai 1973.
- PFEIFFER, E. u. HERRLING, B.: Das Programmsystem MECCA, ein modulares Elementkonzept für die Kontinuumsanalyse. Vortrag auf dem VII. Internationalen Kongreß über Anwendungen der Mathematik in den Ingenieurwissenschaften (IKM), 22. bis 29. 6. 1975 in Weimar, DDR, 1975.
- RAMMING, H.-G.: Reproduction of Physical Processes in Coastal Areas. Proc. 13th Coastal Eng. Conf., Vancouver, Canada, 1972.
- TAYLOR, C. u. DAVIS, J.: Finite Element Model of Tides in Estuaries. Finite Element Methods in Flow Problems, UAH Press, Huntsville, Alabama, 1974.
- ZIENKIEWICZ, O. C.: The Finite Element Method in Engineering Science. McGraw-Hill, London, 1971.