

MACH-Reflexion als Diffraktionsproblem

Von Udo Berger und Sören Kohlhasse

Summary

Observations made at vertical walls in prototype as well as in experiments have shown that under certain assumptions gravity waves are apparently not reflected according to the laws of regular reflection. With small angles of wave approach ($\Theta_0 < 45^\circ$; angle between wave crest and axis of incidence) the reflected wave will not completely leave the wall; a wave-stem normal to the wall will be developed. The height of the stem-wave will increase progressively along the length of the wall and will reach a value of more than double the height of the incoming wave.

The study, in theory and experiment, has shown that this effect, which is usually called MACH-Reflection, is not to be taken as an analogy to gas-dynamics, but should be interpreted as a diffraction problem.¹⁾

Inhalt

1. Einführung	139
2. Theorie	140
3. Meßergebnisse und Diskussion	140
4. Zusammenfassung	143
5. Schriftenverzeichnis	143

1. Einführung

Beobachtungen und Messungen an lotrechten Wänden in der Natur und im Experiment haben gezeigt, daß reflektierte Schwerewellen unter gewissen Voraussetzungen die Wand scheinbar nicht vollständig verlassen (Reflexionsgesetz). Bei spitzen Wellenangriffswinkeln ($\Theta_0 < 45^\circ$) bildet sich vielmehr in der wandnahen Zone ein Stem (= Ast) senkrecht zum Bauwerk, dessen Höhe beim Fortschreiten entlang der Molenwand über das Zweifache der einfallenden Wellenhöhe wächst (Abb. 1).

Der Schnittpunkt T des Wellenkamms der Stemwelle mit dem der einfallenden Welle wandert auf einer Geraden, die die Wand unter dem Winkel α schneidet. In Analogie zur Anströmung eines geraden Verdichtungsstoßes gegen eine einspringende Ecke in der Gasdynamik bezeichneten PERROUD (4) und WIEGEL (6) bei ihren Untersuchungen mit der solitary wave diesen Vorgang als MACH-Reflexion.

Mit monochromatischen Wellen führte erstmals NIELSEN (2) Untersuchungen an einem zweidimensionalen Modell durch, ohne aber eine theoretische Erklärung zu geben. Im natürlichen Seegang wurde die MACH-Reflexion durch HAGER (1) nachgewiesen.

Da das physikalische Problem unklar und andererseits für die Bemessung von Bauwerken von erheblicher Bedeutung ist, wurde die MACH-Reflexion in einem physikalischen Modell untersucht. Die Messungen wurden mit der Diffraktionstheorie verglichen.

¹⁾ Der vollständige Text der Untersuchung wurde in Heft 43 (1976) der Mitteilungen des Franzius-Instituts veröffentlicht.

2. Theorie

PENNY und PRICE (3) zeigten, daß die Diffraktionstheorie SOMMERFELDS (5) als eine strenge mathematische Formulierung des HUYGENSSchen Prinzips auch auf Wasserwellen angewendet werden kann.

Eine ebene monochromatische Welle falle unter dem Winkel Θ_0 auf die Molenwand (Abb. 2). In dem nach Abb. 2 gegebenen zylindrischen Koordinatensystem sind nach dem HUYGENSSchen Prinzip alle Punkte der Halbebene $x < 0$ Quellen; d. h., die auf die Öffnung auffallende Welle pflanzt sich so fort, als ob von jedem Punkt der Öffnung eine ebene Welle ausginge, deren Amplitude und Phase durch die auffallende Welle gegeben sind. SOMMERFELD hat dieses Problem mathematisch formuliert und eine Lösung für den halbunendlichen Wellenbrecher angegeben. Nach SOMMERFELD wird die Wellenhöhenverteilung im Reflexionsbereich folgendermaßen berechnet:

einfallende Welle	reflektierte Welle
$\frac{H_{ST}}{H_0} = e^{-ikr \cos(\theta - \theta_0)} + e^{-ikr \cos(\theta + \theta_0)}$	
$- (f(-\sigma) e^{-ikr \cos(\theta - \theta_0)} + f(-\sigma') e^{-ikr \cos(\theta + \theta_0)})$	
Diffraktionswelle	

(1)

$$f(\sigma) = 1 - U1 - iW1 \qquad \sigma = 2 \sqrt{\frac{kr}{\pi}} \sin \frac{1}{2} (\theta - \theta_0)$$

$$f(\sigma) + f(-\sigma) = 1 \qquad \sigma' = -2 \sqrt{\frac{kr}{\pi}} \sin \frac{1}{2} (\theta + \theta_0)$$

$$U1 = \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^\sigma \cos \frac{\pi}{2} t^2 dt - \int_0^\sigma \sin \frac{\pi}{2} t^2 dt \right)$$

FRESNEL-Integrale

$$W1 = \frac{1}{2} \left(\int_0^\sigma \sin \frac{\pi}{2} t^2 dt - \int_0^\sigma \cos \frac{\pi}{2} t^2 dt \right)$$

$$W2 = W1(\sigma') \qquad U2 = U1(\sigma')$$

Gl. (1) beschreibt für verschiedene Wellenanlaufwinkel Θ_0 die Stembhöhe H_{ST} und die Stembreite b in Abhängigkeit von der einfallenden Wellenlänge. Für die Auswertung wurde Gl. (1) in Fortran IV programmiert.

3. Meßergebnisse und Diskussion

In dem dreidimensionalen Wellenbecken (18 m x 45 m) des Teilprojekts C2 im Sonderforschungsbereich 79 wurden die Untersuchungen NIELSENS am Modell und das Natur-

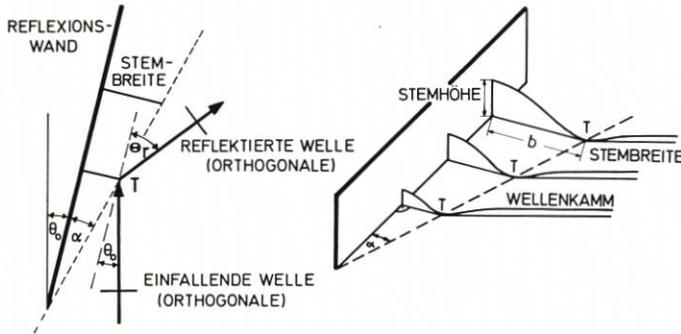


Abb. 1. Erläuterung der MACH-Reflexion

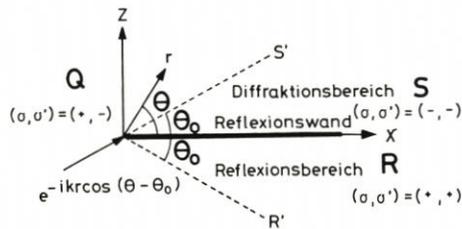


Abb. 2. Definition zur SOMMERFELDSchen Lösung

meßprogramm HAGERS durch kontinuierliche Meßreihen mit variablen Wellenhöhen und Wellenlängen gemäß Tabelle 1 ergänzt.

H_0 (cm)	Versuchsparameter		
	L (cm)	Θ ($^\circ$)	d (cm)
2,2	100	10	25
3,6	150	15	
4,3	200	20	
		25	

An einer freistehenden Reflexionswand (10 m bzw. 7,3 m) wurde mit einem verfahrenbaren Wellenpegel für verschiedene Wellenanlaufwinkel Θ_0 jeder Punkt der Stembreite und der Stembreite in Abhängigkeit von der einfallenden Wellenhöhe H_0 und Wellenlänge L bei konstanter Wassertiefe d gemessen.

In Abb. 3 sind die exemplarisch gemessenen Stembreiten H_{ST} für drei verschiedene Wellenhöhen H_0 aufgetragen. Mit zunehmender Laufstrecke wächst die Stembreite über das Zweifache der einfallenden Wellenhöhe.

In Abb. 4 sind für die gleichen Randbedingungen die Stembreiten b aufgezeichnet. Bemerkenswert ist, daß das Tal der Stembreite beim weiteren Fortschreiten entlang der Wand immer enger wird. Der theoretische Verlauf der Stembreite und Stembreite ist in Abb. 3 und Abb. 4 jeweils als ausgezogene Kurve dargestellt. Die Streuung der Meßwerte ist auf modellbedingte Reflexionen zurückzuführen.

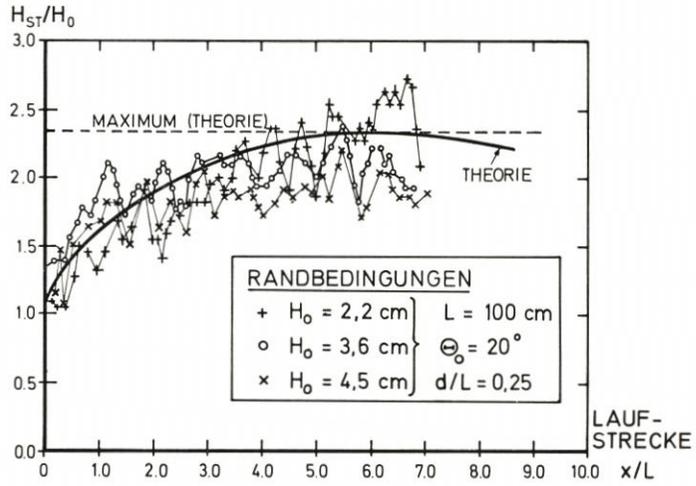


Abb. 3. Stemmhöhe entlang der Reflexionswand (Beispiel)

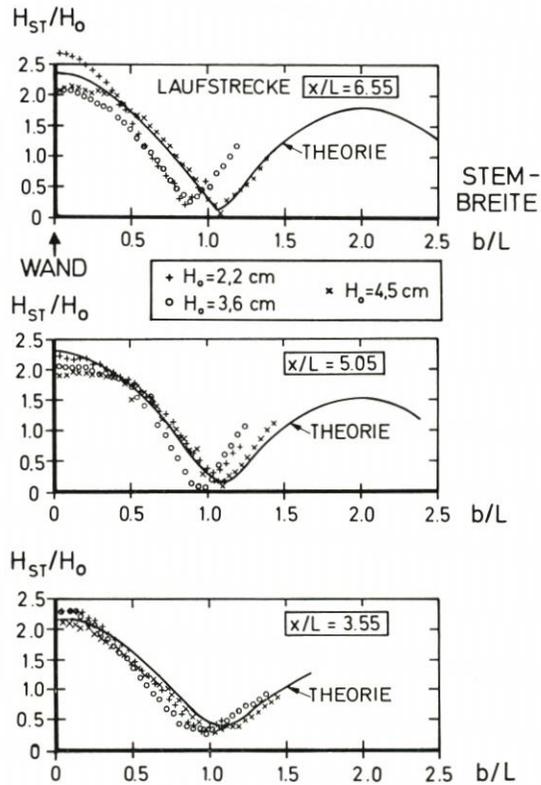


Abb. 4. Stemmhöhe senkrecht zur Reflexionswand (Beispiel für $\theta_0 = 20^\circ$)

4. Zusammenfassung

Untersuchungen zum MACH-Effekt mit monochromatischen Wellen an lotrechten Wänden führten lediglich NIELSEN und HAGER durch. Der physikalische Vorgang war bislang unklar.

Durch ergänzende Messungen und durch einen Vergleich der Meßwerte mit der Diffraktionstheorie konnte nachgewiesen werden, daß die sogenannte MACH-Reflexion, d. h. das Aufsteilen der Wellenhöhe an der Molenwand über das Zweifache der Ausgangswellenhöhe, nicht als Analogie zur Gasdynamik gesehen werden sollte.

Das Anwachsen der Stembhöhe entlang der Molenwand und die Ausbildung der Stembreite senkrecht zur Molenwand sind vielmehr als ein Diffraktionsproblem im Reflexionsbereich zu betrachten.

5. Schriftenverzeichnis

1. HAGER, M.: Untersuchungen über MACH-Reflexion an senkrechter Wand. Dissertation, Mitt. Franzius-Inst., H. 42, 1975.
2. NIELSEN, A. H.: Diffraction of periodic waves along a vertical breakwater for small angles of incidence. Univ. of Calif., Berkeley, IER Tech. Rept. HEL-1-2, 83 pp., Dec. 1962.
3. PENNEY, W. G. u. PRICE, A. T.: The diffraction theory of sea waves and the shelter afforded by breakwaters. Philos. Trans. Royal Soc. of London. Ser. A, No. 882, Vol. 224, pp. 236-253, March 1952.
4. PERROUD, P. H.: The solitary wave reflection along a straight vertical wall at oblique incidence. Univ. of Calif., Berkeley, IER Tech. Rept. 99-3, 93 pp., Sept. 1957.
5. SOMMERFELD, A.: Mathematische Theorie der Diffraktion. Math. Ann., Bd. 47, p. 317, 1896.
6. WIEGEL, R. L.: Oceanographical Engineering, Prentice-Hall, 1964.