

# Berechnung der Tide im Elbeästuar mit direkter Kopplung von ein- und zweidimensionalen finiten Elementen

Von Bruno Herrling

## Zusammenfassung

Eine numerische Berechnung der Tide im Elbeästuar wird beschrieben. Bei dem verwendeten neuen Verfahren werden ein- und zweidimensionale finite Elemente direkt miteinander gekoppelt, wobei in jedem Zeitschritt nur ein einziges gemeinsames Gleichungssystem für alle Unbekannten zu lösen ist. Die berechneten Wasserstände werden mit gemessenen Ganglinien an verschiedenen Elbepegeln verglichen.

## Summary

*A numerical computation of the tidal flow in the Elbe Estuary is described. A new method is demonstrated with directly coupled one- and two-dimensional finite elements in one model with solving of only one common set of equations for all unknown parameters in each time step. The computed water levels are compared with measured hydrographs at different gauges on the Elbe River.*

## Inhalt

1. Einführung	59
2. Grundlagen	60
2.1 Eindimensionales Modell	60
2.2 Zweidimensionales Modell	62
3. Kopplung der Modelle	64
4. Numerische Berechnung mit dem Programmsystem MECCA	65
5. Berechnung des Elbeästuars	67
6. Schlußbemerkungen	71
7. Schriftenverzeichnis	72

## 1. Einführung

Die Berechnung von Tideströmungen im ausgedehnten Bereich eines Ästuars erfordert heute auch unter Verwendung von modernen Computern noch größte Anstrengungen, falls ein Stromgebiet mit komplexer Geometrie einbezogen werden muß. Will man den Einfluß einer Baumaßnahme in einer Flußmündung auf die Tideverhältnisse in einer größeren Entfernung flußaufwärts untersuchen, so müssen die Ränder des zu berechnenden Gebietes, auf denen die Wasserstände oder die Strömung vorgeschrieben werden, so weit entfernt vom geplanten Bauvorhaben liegen, daß die Randbedingungen die erwartete veränderte Strömungssituation nicht beeinflussen können. Wie im hier vorgestellten Modell des Elbeästuars kann es vorkommen, daß neben dem Flußlauf mit einer Länge von mehr als hundert Kilometern flußaufwärts gleichzeitig auch ein Teil der offenen See unter Einschluß weit

ausgedehnter Wattflächen vor der Küste modelliert werden muß. Hierbei würde eine nur zweidimensionale Berechnung einen sehr großen numerischen Aufwand erfordern und wäre z. B. im oberen Flußlauf von den Genauigkeitsanforderungen auch nicht notwendig, während eine ausschließlich eindimensionale Betrachtung für den der Küste vorgelagerten offenen Meeresbereich untauglich ist.

Die direkte Kopplung von ein- und zweidimensional berechneten Modellbereichen wird seit einiger Zeit unter Verwendung von expliziten Differenzenverfahren durchgeführt, wo sie nur einen geringen Aufwand erfordert (z. B. SÜNDERMANN, 1975). Aber bei diesen expliziten Modellen müssen aus Stabilitätsgründen sehr kleine Zeitschritte für die Berechnung gewählt werden, die die insgesamt benötigte Rechenzeit stark anwachsen lassen.

Mit dieser Veröffentlichung möchte der Autor nun zeigen, daß es möglich ist, Wasserstände und Strömungsgrößen mit ausreichender Genauigkeit für die Gesamtregion eines Ästuars zu ermitteln, indem ein- und zweidimensionale Finite-Elemente-Berechnungen direkt über gemeinsame Parameter im Übergangsbereich gekoppelt werden. Wenn hierbei ein implizites Verfahren wie im vorliegenden Fall verwendet wird, ist es wichtig, daß alle unbekannt Parameter aus einem gemeinsamen Gleichungssystem bestimmt werden. Bei einer sonst erforderlichen getrennten Berechnung verschiedener Teilmodelle müßte andernfalls im Übergangsbereich z. B. eine in der Natur gemessene Wasserstandsganglinie als Randbedingung vorgegeben werden, die in der Regel nicht bekannt ist.

Als Anwendung des neuen Kopplungsverfahrens wird die Tideberechnung im Elbeästuar beschrieben. Der Flußlauf der Elbe, das Prielsystem der Wattflächen sowie die Jade und der äußere Teil der Weser werden eindimensional modelliert, während der südöstliche Teil der Nordsee und die äußere Elbe zweidimensional berücksichtigt werden. Mit den Ergebnissen wird gezeigt, daß mit dem Modell die Tideströmung in der Gesamtregion des Elbeästuars berechnet werden kann. In einem zweiten Schritt, der in dieser Arbeit nicht enthalten ist, könnten die veränderten hydrodynamischen Zustandsgrößen für den Fall ermittelt werden, daß durch mögliche Baumaßnahmen, etwa im Mündungsbereich der Elbe, die Geometrie des Fließquerschnitts verändert wird.

## 2. Grundlagen

### 2.1 Eindimensionales Modell

Seit der Veröffentlichung von DRONKERS (1969) sind eine Reihe von Publikationen erschienen, die die Berechnung von instationären, verzweigten offenen Gerinnen beschreiben. In dieser Arbeit wird auf die von SCHULZE (1973, 1974) entwickelte Methode zur Erstellung des eindimensionalen Modells zurückgegriffen. Hierbei wird wie üblich von den erweiterten SAINT-VENANTSchen Gleichungen ausgegangen. Formuliert man diese in Abhängigkeit von der Wassertiefe  $h$  und dem Durchfluß  $Q$ , ergeben sich die Kontinuitäts- und Bewegungsgleichungen in der folgenden Form:

$$b \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial s} - q = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{gA} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{Q}{gA^2} \left( \frac{b_F}{b} + \alpha \right) \frac{\partial Q}{\partial s} + \left( 1 - \frac{Q^2}{gA^3} \alpha b_F \right) \frac{\partial h}{\partial s} - I_s + I_v = 0 \quad (2)$$

In Abb. 1 sind die Bezeichnungen in einem Querschnittsprofil dargestellt. Die Querschnittsfläche kann in einen Fließquerschnitt (schraffiert) und einen Staubereich unterteilt

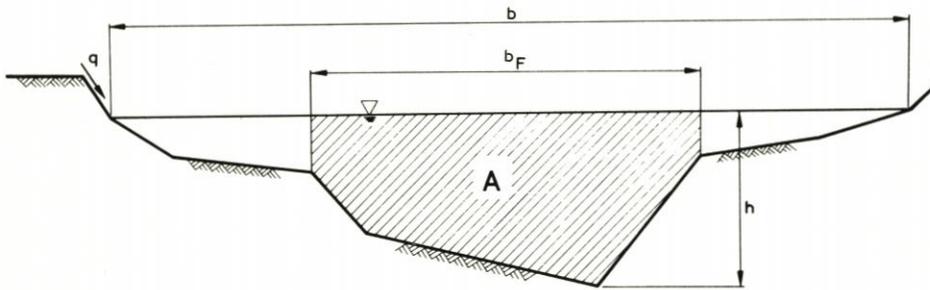


Abb. 1. Bezeichnungen in einem polygonförmigen Querschnitt

werden. In den obigen Gleichungen sind mit den Buchstaben  $s$  und  $t$  die Koordinaten in Richtung der Flußachse und der Zeit, mit  $q$  ein verteilter Zufluß, mit  $g$  die Erdbeschleunigung, mit  $\alpha$  ein Koeffizient zur Berücksichtigung ungleichmäßig geformter Querschnitte, mit  $I_s$  die Neigung der Flußsohle und mit  $I_v$  ein Energieverlustterm gekennzeichnet. Im vorliegenden Fall wird die Bodenreibung mit der MANNING-STRICKLER-Formel

$$I_v = \frac{|v|v}{K_{ms}^2 (D/4)^{4/3}} \quad (3)$$

berücksichtigt, in der  $v$  die mittlere Fließgeschwindigkeit im Querschnitt,  $D$  den hydraulischen Radius und  $K_{ms}$  einen Reibungskoeffizienten darstellen. Letzterer wird bei der Eichung des Modells ermittelt (siehe unten).

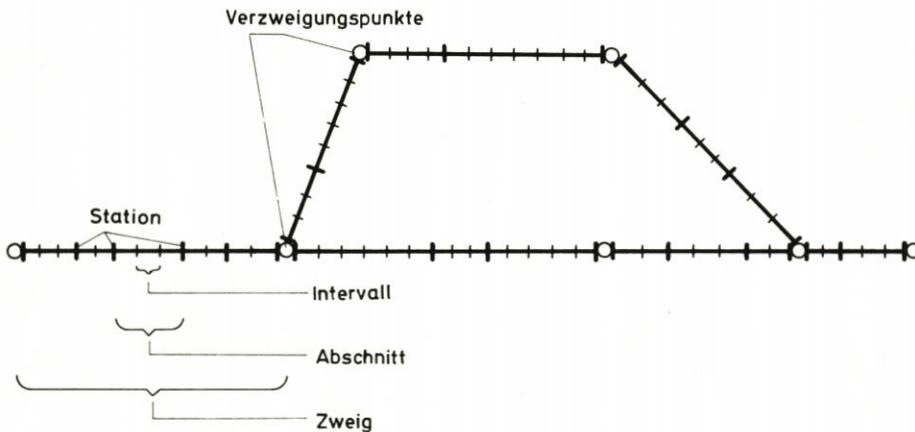


Abb. 2. Unterteilung des eindimensionalen Gerinnesystems

Abb. 2 zeigt die mögliche Unterteilung eines Gerinnesystems (siehe SCHULZE, 1974; HERRLING u. BECKMANN, 1977b). Zweige oder sogenannte Makro-Elemente vereinigen sich an Verzweigungspunkten oder Knoten. Die Makro-Elemente werden unterteilt in Abschnitte und weiterhin in Intervalle oder Mikro-Elemente. Polygonförmige Querschnitte können an jeder Station (Endpunkte von Abschnitten) definiert werden. Querschnittswerte von Intervallgrenzen werden linear zwischen den Stationen interpoliert.

Die numerische Berechnung beginnt bei den Intervallen eines Zweiges. Für ein solches Mikro-Element erhält man vier Elementgleichungen, wenn man auf die Grundgleichungen (1) und (2) das GALERKIN-Verfahren mit linearen Ansatzfunktionen für  $h$  und  $Q$  und das CRANK-

NICOLSON-Verfahren für die Zeitintegration anwendet. Die vier Gleichungen lassen sich durch jeweilige Addition der beiden Kontinuitäts- bzw. Bewegungsgleichungen auf zwei je Intervall reduzieren. Die so erhaltenen Gleichungen des Mikro-Elements sind denen sehr ähnlich, die sich aus dem dritten impliziten Differenzschema von DRONKERS (1969) ergeben. Die unbekannt Parameter  $h$  und  $Q$  an den Unterteilungsknoten eines Zweiges werden nun mit dem Double-Sweep-Verfahren (DRONKERS, 1969) eliminiert. Auf diese Weise bleiben nur noch zwei Gleichungen von jedem Zweig oder Makro-Element übrig, welche den Wasserstand  $h$  und den Durchfluß  $Q$  an den Verzweigungspunkten als unbekannte Parameter enthalten. Diese Elementgleichungen können zum Aufbau eines Gleichungssystems für die Wasserstände im gesamten eindimensionalen System verwendet werden. Hierbei lassen sich die unbekannt Durchflüsse mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung eliminieren, die aussagt, daß an allen Verzweigungspunkten die Summe der Zu- und Abflüsse aus den Zweigen gleich Null sein muß. Dies gilt für alle Knoten außer denen an den Enden des Gerinnesystems, wo Randbedingungen für  $h$  oder  $Q$  vorgeschrieben werden müssen. Wenn die Wasserstände  $h$  aus der Lösung des Gleichungssystems bekannt sind, lassen sich in einer Nachlaufberechnung in jedem Zeitschritt die Durchflüsse  $Q$  und weitere  $h$ -Werte an Zwischenpunkten bis hin zu den Intervallgrenzen ermitteln.

## 2.2 Zweidimensionales Modell

Die Grundlage für die Berechnung der zweidimensionalen, vertikal-integrierten Flachwasserwellen oder Tidedrömungen bilden die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q_i}{\partial x_i} - q^* = 0 \quad (4)$$

und die Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + g \frac{\partial h}{\partial x_i} + \frac{\lambda \sqrt{v_j v_j}}{a + h} v_i - \Omega \varepsilon_{ij} v_j - k_i = 0 \quad (5)$$

In der Kontinuitätsgleichung wird der Durchfluß pro Längeneinheit  $q_i$  später durch die Beziehung

$$q_i = (a + h) v_i \quad (6)$$

ersetzt. In diesen Gleichungen stellen der Wasserstand  $h$ , der von der mittleren Meereshöhe bis zum freien Wasserspiegel gemessen wird, und die zwei vertikal integrierten, horizontalen Geschwindigkeitskomponenten  $v_i$ , die in einem kartesischen Koordinatensystem  $x_i$  definiert sind, die unbekannt Parameter dar. Der Buchstabe  $a$  kennzeichnet die Entfernung zwischen Meeresboden und mittlerer Meereshöhe und  $q^*$  einen Zufluß in das zu berechnende Gebiet. Weiterhin ist ein Term zur Berücksichtigung der Bodenreibung mit einem dimensionslosen Reibungskoeffizienten  $\lambda$ , ein Coriolis-Term mit dem Coriolisparameter  $\Omega$  und einem  $\varepsilon$ -Tensor sowie ein Term  $k_i$  zur Berücksichtigung einer äußeren Kraft (z. B. des Windes) eingeführt.

Das zu berechnende Gebiet wird in dreieckige finite Elemente (Abb. 3) unterteilt. Durch Anwendung des GALERKIN-Verfahrens erhält die Kontinuitätsgleichung (4) nach Wichtung mit der Funktion  $\delta h$  und Umformung mit Hilfe einer partiellen Integration die folgende Form:

$$\iint_{A_t} \left( \delta h \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial(\delta h)}{\partial x_i} q_i \right) dt dA + \iint_{S_q} \delta h q_i n_i dt dS = \iint_{A_t} \delta h q dt dA + \int_t \delta h_K Q_K dt \quad (7)$$

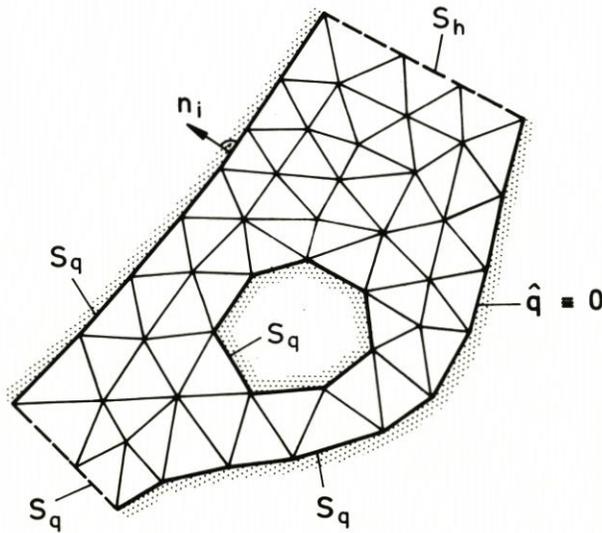


Abb. 3. Diskretisierung und Einteilung der Ränder in der zweidimensionalen Berechnung

Anstelle von  $q^*$  wird ein flächig verteilter Zufluß  $q$  und ein punktförmiger Zufluß  $Q_K$  am Knoten  $K$  des Systems eingeführt. Die Bewegungsgleichungen (5) werden in ähnlicher Weise mit den Funktionen  $\delta v_i$  gewichtet.

Randbedingungen sind die Ganglinien des Wasserstandes oder des Zuflusses über die Ränder:

$$h - \hat{h} = 0 \quad \text{auf } S_h \quad (8)$$

$$q_i n_i + \hat{q} = 0 \quad \text{auf } S_q \quad (9)$$

Der Buchstabe  $\hat{h}$  kennzeichnet einen vorgeschriebenen Wasserstand und  $\hat{q}$  einen senkrecht zum Rand gerichteten, vorgeschriebenen Randzustrom, der längs geschlossener Ränder Null ist. Während Gleichung (8) erst im endgültigen Gleichungssystem berücksichtigt wird, kann die Randbedingung (9) direkt in Gleichung (7) eingesetzt werden.

Unter Verwendung von linearen Ansatzfunktionen für  $h$ ,  $v_i$ ,  $\delta h$  und  $\delta v_i$ , einer üblichen Linearisierung der nichtlinearen Ausgangsgleichungen sowie der CRANK-NICOLSON-Zeitintegration erhält man nach Integration über ein Element neun Elementgleichungen mit neun unbekanntem Parametern. Diese neun Gleichungen werden nun reduziert, indem das Verfahren der hybriden finiten Elemente (HERRLING, 1977a u. 1978) angewandt wird. Hierbei werden die Bewegungsgleichungen nur innerhalb der Elemente erfüllt. Im einzelnen bedeutet dies, daß die sechs Bewegungsgleichungen eines Elementes zunächst so umzuformen sind, daß die sechs Geschwindigkeitskomponenten jeweils als Funktion der drei unbekanntem Wasserstände ausgedrückt werden. Diese Beziehungen werden dann in die drei Kontinuitätsgleichungen des entsprechenden Elements eingesetzt. Auf diese Weise bleiben nur noch drei Gleichungen mit drei unbekanntem Wasserständen pro Element übrig, und diese bilden den Elementanteil zum Aufbau des Gleichungssystems für das Gesamtsystem. Nach Berücksichtigung der Randbedingung (8) kann das globale Gleichungssystem für die Wasserstände gelöst werden. Das Gleichungssystem ist nur ein Drittel so groß wie jenes, welches man bei gleicher Diskretisierung unter Verwendung herkömmlicher Verfahren erhielte.

Die Geschwindigkeitskomponenten werden im Nachlauf elementweise an den drei Knoten eines jeden Elementes berechnet. Wie erwartet, führt dies an den Knoten, die mit

mehr als einem Element verbunden sind, zu unterschiedlichen Werten für die Geschwindigkeitskomponenten. Deshalb ist ein spezieller örtlicher Glättungsprozeß erforderlich, womit schließlich die im nächsten Zeitschritt benötigten Geschwindigkeiten bereitgestellt werden können.

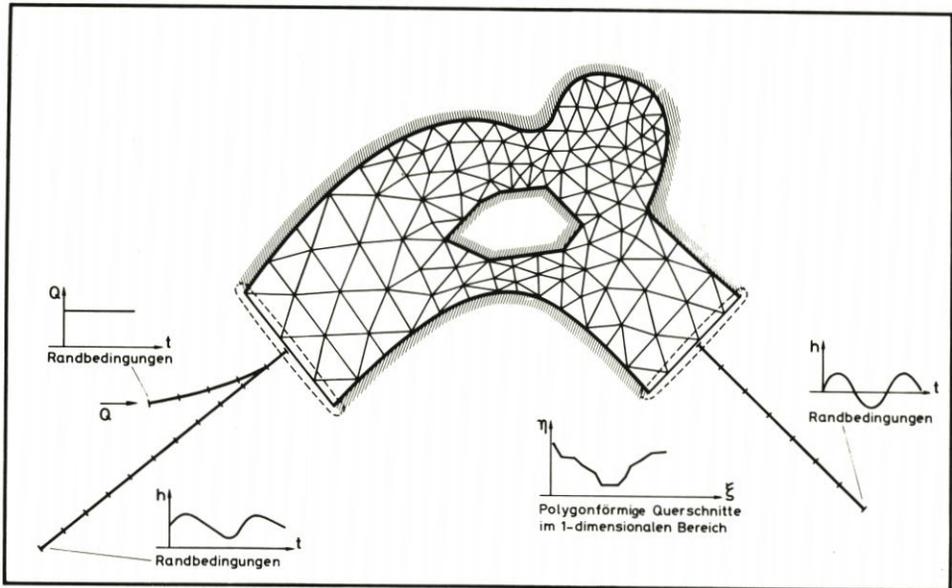


Abb. 4. Skizze zur Darstellung der Kopplung des ein- und zweidimensional berechneten Strömungsbereiches

### 3. Kopplung der Modelle

Die Kopplung der ein- und zweidimensional berechneten Strömungsbereiche (Abb. 4) beruht auf der Verwendung gemeinsamer Parameter, den Wasserständen  $h$ , in den Kopplungsknoten der zwei Diskretisierungssysteme und auf der physikalischen Grundbedingung, daß in diesem Bereich des Modells kein Wasser verloren geht, d. h. die Kontinuitätsbedingung erfüllt ist.

Zur Erläuterung der Vorgehensweise im einzelnen möge zunächst darauf hingewiesen werden, daß in jedem Zeitschritt die Elementgleichungen für den ein- und zweidimensionalen Bereich aufgestellt werden, wie es im letzten Kapitel beschrieben wurde. Anschließend wird mit Hilfe aller Elementmatrizen ein globales Gleichungssystem mit den Wasserständen als den einzigen unbekanntem Parametern aufgebaut. Wie in Abb. 4 dargestellt, werden alle Elementgleichungen, deren zugehörige Knoten zum gleichen Kopplungsbereich gehören (in Abb. 4 jeweils die Knoten, die sich innerhalb der gestrichelten Linie befinden), in dieselbe Gleichung des globalen Gleichungssystems gespeichert. Diese Vorgehensweise wird damit begründet, daß an diesen Kopplungsknoten die Summe der ein- und ausströmenden Wassermengen Null sein muß, wie es entsprechend für das eindimensionale Modell (s. o.) erläutert wurde.

Für die zweidimensionalen Elemente braucht der entsprechende Term  $q_i n_i$  in Gleichung (7) oder die dafür eingesetzte Bedingung (9) nicht bestimmt zu werden, weil der von diesem Randintegral herrührende Wert sich mit dem (unbekannten) Durchfluß  $Q$  aus dem eindimensionalen Modellbereich aufhebt.

In der Berechnung des Elbe-Ästuars werden zwei verschiedene Arten der Kopplung verwendet: neben derjenigen, die oben beschrieben ist, noch eine seitliche Kopplung. Die letztere wird in solchen Fällen angewandt, wo sich infolge des jeweiligen Tidewasserstandes die Uferlinie und damit die äußere Berandung von zweidimensional berechneten Flußläufen laufend verschiebt. Es ist oft vom Rechenaufwand her wirtschaftlicher, diese seitlichen und zeitweise trockenfallenden Flächen durch eine eindimensionale Berechnung zu erfassen, die parallel zum zweidimensional berücksichtigten tiefen Flußbett angesetzt wird, als die wesentlich komplizierteren zweidimensionalen Wattlelemente (HERRLING, 1977c) anzuwenden. In diesem Fall wird zur Einhaltung der Kontinuitätsbedingung nicht die den Rand des zweidimensionalen Bereiches überströmende Wassermenge herangezogen, sondern der Term mit der punktförmigen Quelle  $Q_K$ , wie er in der Gleichung (7) definiert ist. Auch hier bedarf es keiner weiteren Berechnung von  $Q_K$  am Koppelknoten K, da sich diese Größe wie in den anderen geschilderten Fällen mit den Durchflüssen  $Q$  an den Enden der eindimensionalen Zweige aufhebt.

Schließlich sollte noch erwähnt werden, daß in den Koppelknoten der eindimensionalen Berechnung die Wasserstände von der mittleren Meereshöhe aus gemessen werden, wie es entsprechend auch in den zweidimensionalen Elementen erfolgt. Weiterhin sind in diesen Knoten spezielle örtliche Koordinatensysteme einzuführen, so daß die gedrehte Koordinate  $\bar{x}_1$  in die gleiche Richtung weist wie die Koordinate  $s$  in den eindimensionalen Zweigen. Dies ist wegen des örtlichen Mittelungsprozesses der Geschwindigkeitskomponenten in der zweidimensionalen Analysis erforderlich.

Die Kopplung der ein- und zweidimensional berücksichtigten Strömungsbereiche ist anhand einer Berechnung der Strömung in einem Kanal, der an einem Ende geschlossen ist, überprüft worden. Beim Vergleich der Ergebnisse von verschiedenen Berechnungsläufen wurde eine gute Übereinstimmung erzielt. Hierbei erfolgte ein Vergleich der Ergebnisse einer nur eindimensionalen, einer nur zweidimensionalen sowie einer Berechnung, bei der die eine Hälfte des Kanals mit eindimensionalen Gerinneelementen und die andere mit zweidimensionalen Dreieckselementen diskretisiert wurde. Als Randbedingungen sind einmal eine Wasserstandsganglinie (erzwungene Schwingung), die natürlichen Tideverhältnissen entspricht, und in einem zweiten Fall eine einmalige Wasserstandsänderung (freie Schwingung) am offenen Kanalende vorgegeben worden.

#### 4. Numerische Berechnung mit dem Programmsystem MECCA

Das Programmsystem MECCA (*Modular Element Concept for Continuum Analysis*) wird für die numerischen Berechnungen verwendet. Dieses modular aufgebaute System führt die bei der Anwendung der Finite-Elemente-Methode zur Lösung von Anfangs- und Randwertproblemen immer wiederkehrenden Operationen aus, wie z. B. Ein- und Ausgabe, Datenspeicherung auf Hintergrundspeichern, Aufbau und Lösen des Gleichungssystems. Die Eingabe erfolgt mit Hilfe einer problemorientierten Sprache (HERRLING, PFEIFFER u. BEYER, 1979). Für die Speicherung der großen und komplexen Datenmengen ist eine spezielle Datenorganisation erstellt worden.

Die den physikalischen Vorgang beschreibenden Differentialgleichungen und die Eigenschaften eines Elementes werden in einem getrennten Elementprogramm festgelegt, welches an spezielle Moduln oder Bausteine von MECCA als zeitweiliger Overlay angegliedert wird. Dadurch besteht die Möglichkeit, verschiedene Typen von Elementen – in diesem Fall eindimensionale Gerinneelemente und zweidimensionale Dreieckselemente für die Berech-

nung von Tideströmungen – miteinander unter Verwendung gemeinsamer Parameter in den Koppelknoten zu koppeln. Ausführlichere Beschreibungen von MECCA sind bisher von BEYER (1976) sowie von HERRLING, PFEIFFER und BEYER (1979) veröffentlicht worden. MECCA wurde verwendet für die Berechnung von offenen Gerinneströmungen, Flachwasserwellen und Grundwasserströmungen.

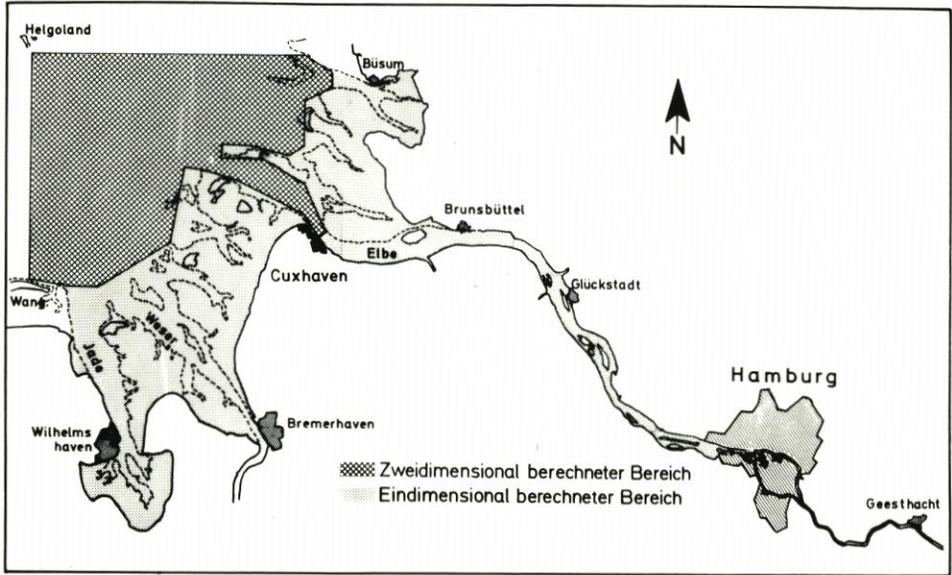


Abb. 5. Lageplan des Elbemodells

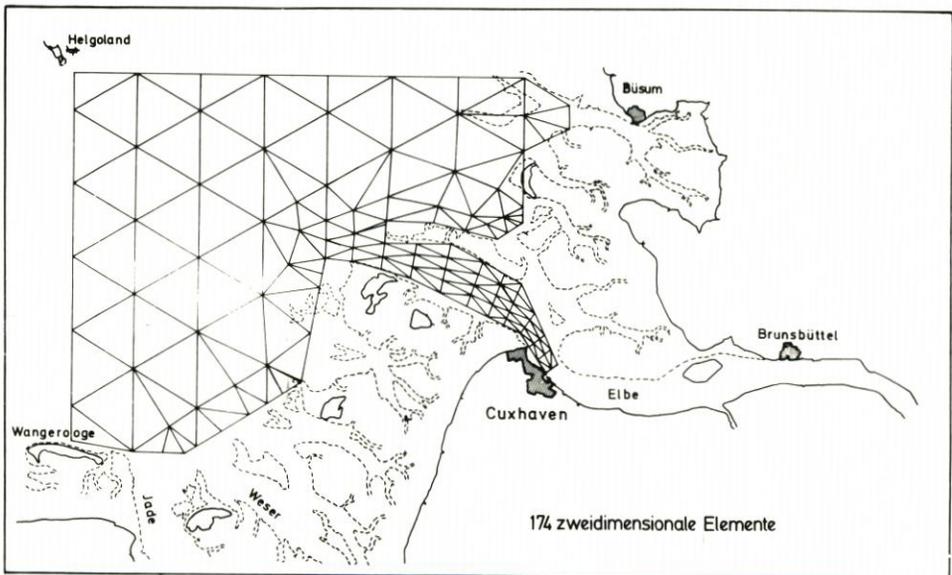


Abb. 6. Elementnetz des zweidimensional berechneten Bereiches

## 5. Berechnung des Elbeästuars

Das Modell des Elbeästuars erstreckt sich von der Linie Wangerooge–Helgoland–Büsum bis zum Elbewehr in Geesthacht, oberstrom von Hamburg (Abb. 5). Es umfaßt damit einen Bereich von insgesamt nahezu 200 km. Das Tidemodell wird durch vorgegebene Wasserstandsganglinien längs des offenen Randes in der Deutschen Bucht angeregt. Im einzelnen werden die gemessenen Ganglinien der Pegel Wangerooge, Helgoland und Büsum verwendet und die Werte von weiteren Zwischenpunkten auf dem Rand durch lineare Interpolation ermittelt. Von oberstrom wird am Wehr in Geesthacht ein konstanter Zufluß von  $200 \text{ m}^3/\text{s}$  als Randbedingung vorgegeben. Der Einfluß der Weser wird durch eine vorgegebene Wasserstandsganglinie in Bremerhaven berücksichtigt. Die Windeinflüsse können vernachlässigt werden, da während des für die Berechnung herangezogenen Zeitraums vom 22. bis 25. August 1976 der Wind sehr schwach war.

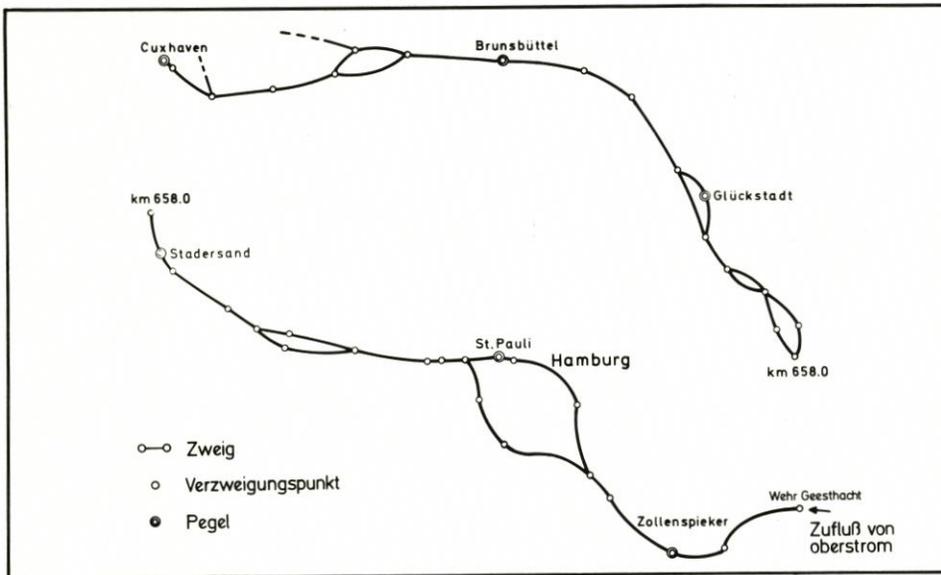


Abb. 7. Untergliederung der Elbe in Zweige

Die offene See und die Elbemündung wird zweidimensional unter Verwendung von 174 dreieckigen Elementen modelliert (Abb. 5 und 6). Die Elbe selbst wird durch ein verzweigtes System von eindimensionalen Zweigen oder Makro-Elementen beschrieben (Abb. 7). Des weiteren berücksichtigen eindimensionale Zweige den Einfluß von Wattflächen bzw. von Prielsystemen, die der Küste vorgelagert sind, sowie von Jade und Weser auf die Tideverhältnisse in der Elbe (Abb. 8). Da mit den Prielsystemen im wesentlichen nur die Füllung und Entleerung der ausgedehnten Wattflächen während der Tide ermöglicht wird und außerdem die jeweiligen Prieleinzugsgebiete weitgehend bekannt sind, werden die wichtigsten Priele und die zugehörigen seitlichen Flächen eindimensional berechnet. Hierbei finden sehr breite und flache Querschnittsflächen Verwendung, die in ihrem tiefsten Punkt jeweils einen äußerst schmalen vertikalen Schlitz aufweisen. Dieser beeinflusst praktisch die Durchflussumengen nicht und verhindert aber andererseits, daß ein solcher Zweig während der Ebbe trockenfallen kann. Dies vermeidet einen größeren organisatorischen Aufwand während der Berechnung (s.

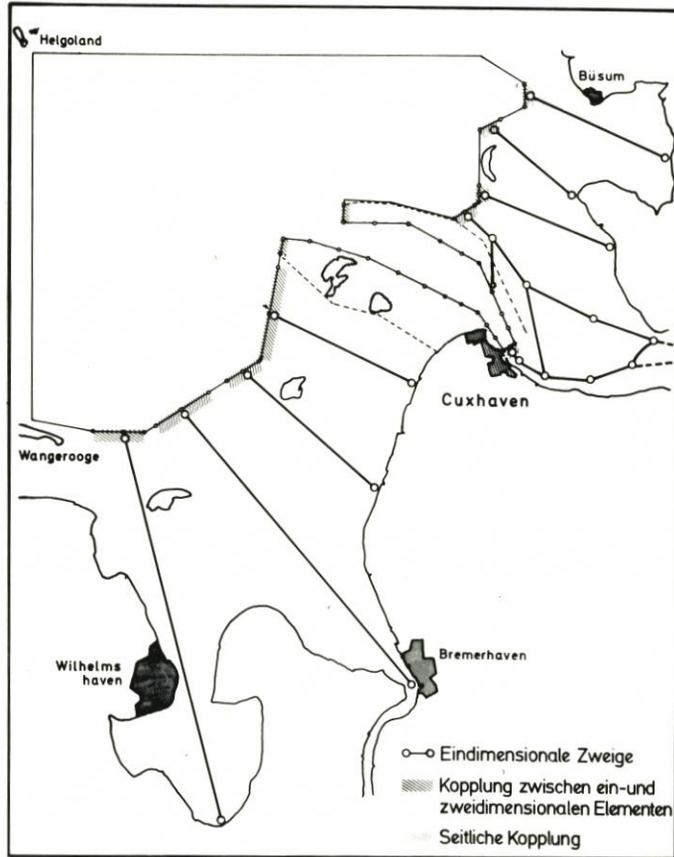


Abb. 8. Berücksichtigung von Jade und Weser sowie der Prielsysteme durch eindimensionale Zweige und Darstellung der verschiedenen Elementkopplungen

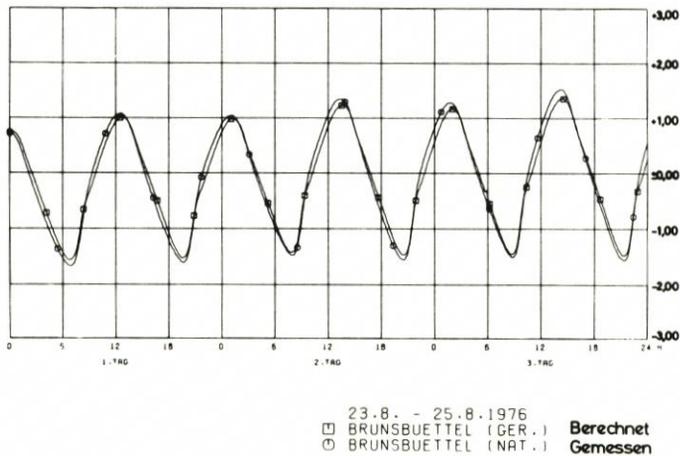


Abb. 9. Vergleich von Wasserstandsganglinien am Pegel Brunsbüttel

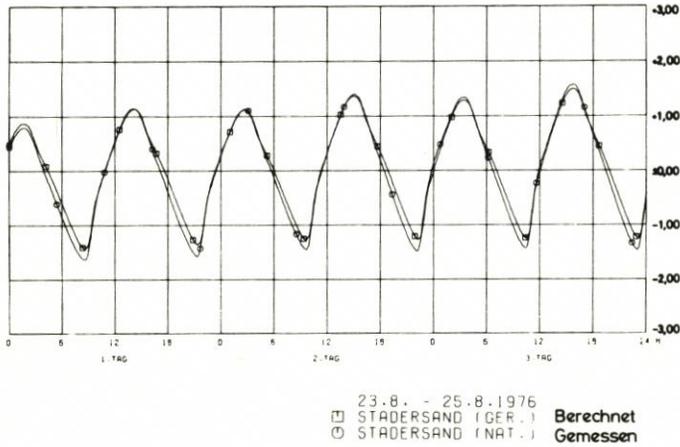


Abb. 10. Vergleich von Wasserstandsganglinien am Pegel Stadersand

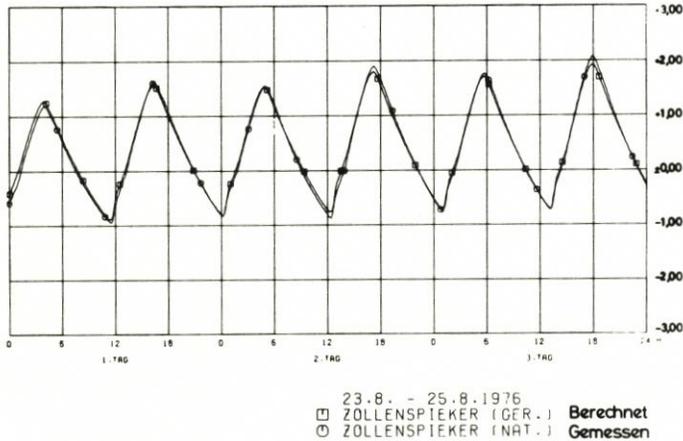


Abb. 11. Vergleich von Wasserstandsganglinien am Pegel Zollenspieker

HERRLING, 1977c), da sich so in jedem Zeitschritt die Anzahl der zu berücksichtigenden Elemente nicht ändert. Für den eindimensional berechneten Bereich werden insgesamt 216 polygonartige Querschnitte verwendet. Der größte Teil davon wird in der Elbe benötigt, wo der Abstand zwischen zwei Profilen nicht größer als 1 km ist. Für die Berechnung werden insgesamt 83 eindimensionale Zweige definiert.

Der Kopplungsbereich des ein- und zweidimensional berechneten Gebietes ist in Abb. 8 dargestellt. Um die während der Flut überströmten Wattflächen im Bereich der Elbemündung zu berücksichtigen, werden seitlich gekoppelte eindimensionale Elemente (Zweige) verwendet, die parallel zum tiefen, zweidimensional berechneten Fahrwasser angeordnet sind. Auch hiermit wird wieder angestrebt, den numerischen Aufwand nicht größer werden zu lassen, als es unbedingt notwendig ist (s. HERRLING, 1977c).

Wenn man die Tideströmung in einem unregelmäßigen Flußsystem eindimensional berechnen will, ist das Modell sorgfältig zu eichen (siehe auch HERRLING u. BECKMANN, 1977b). So ist die Elbe von Geesthacht bis Cuxhaven gesondert geeicht worden, wobei eine

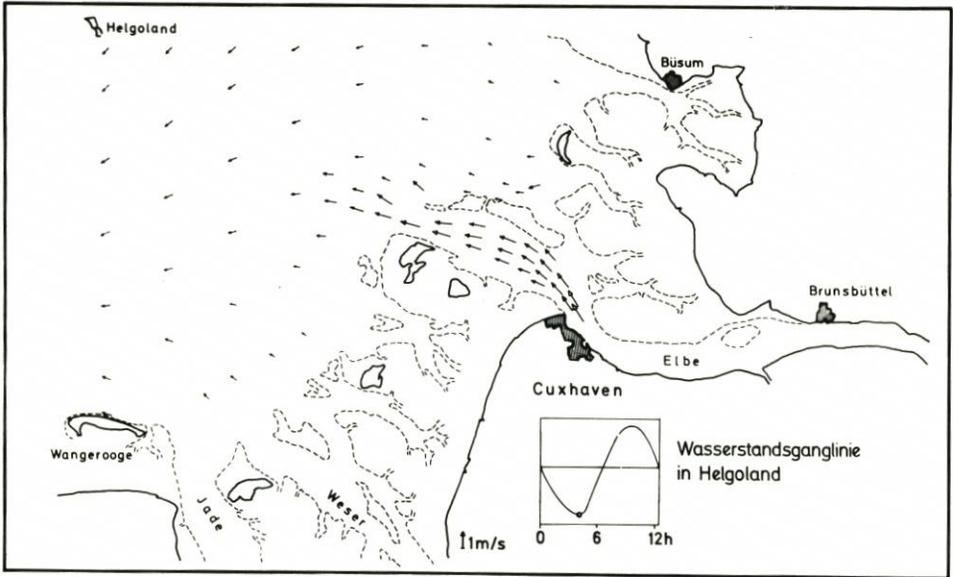


Abb. 12. Geschwindigkeitsvektoren 4 h 10 min nach Tidewasserstand NN in Helgoland

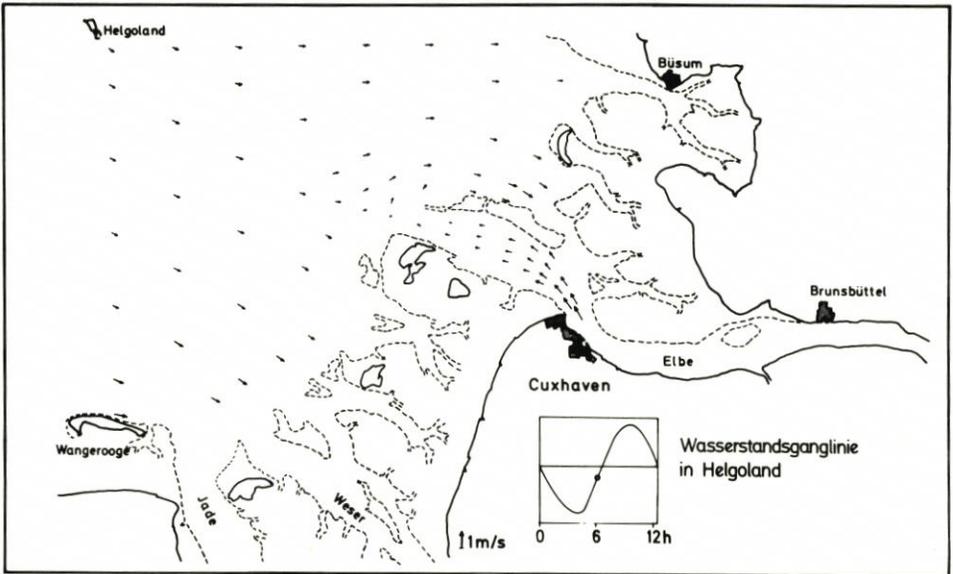


Abb. 13. Geschwindigkeitsvektoren 6 h 10 min nach Tidewasserstand NN in Helgoland

Haupttide verwendet wurde und zahlreiche Wasserstandsganglinien von Pegeln entlang des Flusses vorlagen. Auf diese Weise sind MANNING-STRICKLER-Beiwerte im Bereich von 20 (im Hamburger Hafen) bis zu 67 (in der Nähe von Cuxhaven) ermittelt worden, die weiterhin in einigen Bereichen auch als Funktion der Strömungsrichtung anzusetzen sind. Die so erhaltenen Werte werden unverändert in das gekoppelte Modell übernommen. In den übrigen eindimensionalen Zweigen (Jade, Weser und den Prielen) wird mit  $K_{ms} = 65$  gerechnet und im

zweidimensional berechneten Bereich ein konstanter Reibungsbeiwert  $\lambda = 0,003$  gewählt, wie er häufig verwendet wird. Das gekoppelte Modell wird mit einem Zeitschritt von 10 min berechnet.

Einige Ergebnisse der Berechnung sind in Abb. 9 bis 14 dargestellt. In Abb. 9 bis 11 werden die gerechneten und gemessenen Wasserstandsganglinien der drei Elbpegel Brunsbüttel, Stadersand und Zollenspieker (s. Abb. 7) verglichen. Die Übereinstimmung ist recht gut. Der erste Tag (22. August 1976) ist nicht dargestellt, da hier das Einschwingen des Tide-modells stattfindet. Abb. 12 bis 14 geben die erhaltenen Geschwindigkeitsvektoren im zweidimensional berechneten Bereich für verschiedene Zeitpunkte, bezogen auf die Tideverhältnisse in Helgoland, wieder. Abb. 13 zeigt die Situation unmittelbar bei Flutbeginn in der Elbemündung. In ähnlicher Weise ist die Strömung in der Natur beobachtet worden, nämlich daß die Flut bereits über die nördlich der Elbemündung befindlichen Wattflächen hereinkommt, während die Wassermassen im Hauptfahrwasser noch hinausströmen.

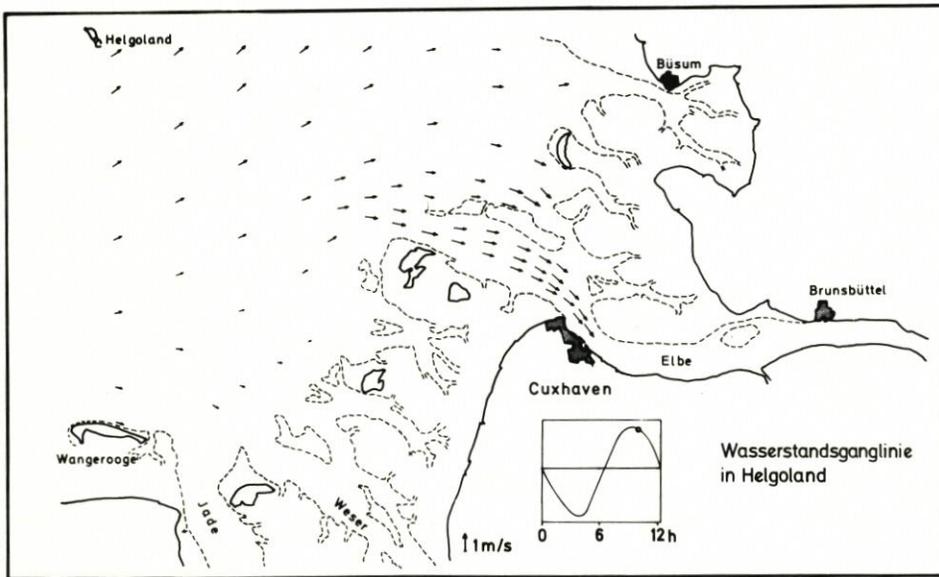


Abb. 14. Geschwindigkeitsvektoren 10 h 10 min nach Tidewasserstand NN in Helgoland

## 6. Schlußbemerkungen

Die Ergebnisse der numerischen Berechnung zeigen, daß die vorgestellte neue Methode der Kopplung von ein- und zweidimensionalen finiten Elementen geeignet ist, die Tideströmung in ausgedehnten Ästuarien zu berechnen. In diesem Zusammenhang sei noch einmal ausdrücklich darauf hingewiesen, daß viel Rechenzeit gespart werden kann, wenn zumindest in Teilen eines Modells eine eindimensionale Berechnung angewandt wird. Unter Verwendung der beschriebenen Kopplung ist es dann immer noch möglich, spezielle Teile des Modells zweidimensional zu diskretisieren, um so z. B. den Einfluß eines Bauwerks in einem Fluß genauer berücksichtigen zu können.

Der Autor dankt der Deutschen Forschungsgemeinschaft, die die Programmentwicklung und die Durchführung der Berechnungen im Rahmen des Sonderforschungsbereiches 79

(SFB 79) „Wasserforschung im Küstenbereich“ in Hannover finanziell unterstützte, ferner Herrn Dr.-Ing. H. HENNLICH für die Eichung des eindimensionalen Elbmodells und den Herren Dipl.-Ing. W. BAUMANN und Dipl.-Ing. A. THÖLE für ihre Unterstützung, diese Berechnungen zu realisieren (BAUMANN, 1977; THÖLE, 1975). Während der Berechnungen war der Autor am Lehrstuhl für Strömungsmechanik der Universität Hannover beschäftigt.

## 7. Schriftenverzeichnis

- BAUMANN, W.: Implizites FE-Modell des Elbeästuars mit direkt gekoppelten Elementen für ein- und zweidimensionale horizontale Strömungen. Diplomarbeit, Universität Hannover, 1977.
- BEYER, A.: Die mathematische Formulierung eines Programmsystems für die FEM. Wiss. Z. Hochsch. Archit. Bauwesen, Weimar, 23. Jahrg., H. 3, 1976.
- DRONKERS, J. J.: Tidal Computations for Rivers, Coastal Areas and Seas. J. Hydr. Div., Vol. 95, No. 1, 1969.
- HERRLING, B.: Eine hybride Formulierung in Wasserständen zur Berechnung von Flachwasserwellen mit der Methode finiter Elemente. Dissertation, Universität Hannover, Fortschr.-Ber. VDI-Z., Reihe 4, Nr. 37, 1977a.
- HERRLING, B. u. BECKMANN, M.: Hydrodynamic State Quantities in the Deepened Weser River. Proc. 17th IAHR Congr., Baden-Baden, Vol. 2, 1977b.
- HERRLING, B.: Ein Finite-Element-Modell zur Berechnung von Tidenströmungen in Ästuarien mit Wattflächen. Die Küste, H. 31, 1977c.
- HERRLING, B.: Computation of Shallow Water Waves with Hybrid Finite Elements. Adv. in Water Resources, Vol. 1, 1978.
- HERRLING, B., PFEIFFER, E. u. BEYER, A.: Das Programmsystem MECCA, ein modulares Elementkonzept für die Kontinuumsanalyse. Angew. Informatik, H. 1, 1979.
- SCHULZE, K.-W.: Eine problemorientierte Sprache für die Dynamik offener Gerinne (DOG). Dissertation, Universität Hannover, Mitt. des SFB 79, Hannover, H. 1, 1973.
- SCHULZE, K.-W.: Zur Untersuchung von Strömungen in Fluß- und Kanalsystemen. Wasserwirtschaft, 64. Jahrg., Nr. 9, 1974.
- SÜNDERMANN, J., WULZINGER, W. u. VOLLMERS, H.: The Effect of Dam Construction on Tidal Processes in an Estuary. 16th IAHR Congr., Sao Paulo, Vol. 1, 1975.
- THÖLE, A.: Entwicklung eines Elementprogramms für das Programmsystem MECCA zur Berechnung von instationären verzweigten Gerinneströmungen. Diplomarbeit, Universität Hannover, 1975.