

## **Kritische Geschwindigkeiten und Schubspannungen**

### **Kurzfassung**

Die kritische Geschwindigkeit und die kritische Schubspannung sind nach wie vor wesentliche Parameter sowohl zur Beurteilung der Stabilität einer natürlichen Gerinnesohle als auch künstlicher Maßnahmen zur Sicherung der Umrandung eines Fließgewässers. Seit SHIELDS haben sich schon Generationen an einer allgemeingültigen Lösung versucht. In dieser Arbeit werden verschiedene bekannte Ansätze vorgestellt, die eine Vorhersage der beiden genannten Parameter erlauben. Diese Auswahl erhebt aber erstens keinen Anspruch auf Vollständigkeit und ist zweitens subjektiv, wie es auch alle visuellen und sonstigen Beurteilungen der kritischen Parameter für den Transportbeginn u.ä. sind.

### **Abstract**

The critical velocity and the critical shear stress are still important parameters both for the estimation of the stability of a natural flume bottom and artificial measures for the protection of the embankment of a river. Since SHIELDS generations of scientists have tried to develop a general solution. In this paper different possibilities are presented allowing a forecast of the two parameters. However, on the one hand this selection does not claim in completeness and on the other hand is subjective following all of the visual and other investigations to determine the initiation of sediment motion.

## **1 Einleitung**

Es ist nach wie vor erstaunlich, mit welcher Hartnäckigkeit sich das vor nunmehr fast 65 Jahren von SHIELDS vorgestellte Diagramm zur Beurteilung des kritischen Zustands eines Korngemisches (Ruhe oder Bewegung) in einem Fließgewässer am Leben hält. Es läßt sich kaum noch beurteilen, ob das ständige Neu-Eindringen in das SHIELDS Diagramm an der mangelnden Phantasie der „Nachfahren“ liegt oder mit der Komplexität des Phänomens zusammenhängt, die bis heute eine allgemeingültige Lösung verhindert hat. Das Letztere mag wohl zutreffen!

Damit soll keineswegs die Leistung von Albert Shields geschmälert werden. Die Laudatio von KENNEDY (1995) zeigt deutlich, welche Schwierigkeiten Shields gehabt hat, die neue dimensionsunabhängige Betrachtungsweise seinem Doktorvater Ludin verständlich zu machen. Man sollte aber auch vermeiden, die damalige

Meßtechnik oder die Versuchssystematik aus heutiger Sicht zu kritisieren. So darf auch nicht erwartet werden, daß in dieser Arbeit irgendwelche bahnbrechenden Neuigkeiten auftauchen. Es soll vielmehr gezeigt werden, wie man mit den Parametern des Bewegungsbeginns umgehen kann. Dabei beschränken sich die Betrachtungen auf rolliges Sohlenmaterial und gleichförmige Strömungsverhältnisse.

## **2 Parameter zur Definition des Bewegungsbeginns**

### **2.1 Allgemeines**

Die Frage nach dem Widerstand, den eine wie auch immer geartete Umrandung eines Fließgewässers oder -gerinnes dem Medium Wasser entgegensetzen kann, gehört nach wie vor zu den grundsätzlichen Problemen der Hydromechanik und des Wasserbaus, da sie die Voraussetzung für die Berechnung transportierter Massen in einem bestimmten Zeitraum bildet. Allerdings lassen die Vielzahl der Parameter, die einen Transportvorgang beeinflussen und die Subjektivität der Beobachtung, eine exakte Definition noch nicht zu, da die Berechnung des jeweiligen Strömungszustands nicht nur auf idealisierten Annahmen (z.B.: log. Geschwindigkeitsverteilung) beruht, sondern auch die Beschreibung des Sediments schwierig ist und eine Vielzahl wählbarer Kennzahlen vom Korndurchmesser bis zur Kornform bietet.

Die einzelnen Körner eines Feststoffgemisches werden bei rolligem Material je nach Größe und Exposition zur Strömung in Bewegung gesetzt. Die groben Körner sind der Strömung stärker ausgesetzt, halten dafür aber auch einem größeren Strömungsangriff stand. Kleinere Körner werden zwischen den größeren abgeschirmt (Hiding-Effekt), haben aber einen kleineren Erosionswiderstand. Diese sich teilweise in ihrer Wirkung aufhebenden Einflüsse führen dazu, daß viele Fraktionen eines Korngemisches fast gleichzeitig in Bewegung geraten können, so daß näherungsweise ein charakteristischer Korndurchmesser zur Beschreibung des Bewegungsbeginns verwendet werden kann. Es ist üblich, dafür den Bereich  $d_{50}$  bis  $d_{65}$  der Siebkurve zu benutzen, der in der Regel auch den gemittelten Korndurchmesser  $d_m$  miteinschließt.

Im Zusammenhang mit dem Hiding-Effekt spielt die sog. Deckschichtbildung bzw. „Abpflasterung“ der Sohle durch den Grobanteil der Körnung eine wichtige Rolle. Man nennt diesen Zustand auch „latente Erosion“, da sich nach dem Aufreißen dieser Deckschicht der Feststofftransport schlagartig erhöht.

Wie bei vielen Problemen in den Natur- und Ingenieurwissenschaften ist das Experiment im Laboratorium unabdingbare Voraussetzung für das Studium der

wesentlichen Zusammenhänge des Sedimenttransportes (VOLLMERS 1998).

So entstanden die Beziehungen oder Formeln für den Transportbeginn meist durch systematische Versuche in Rinnen oder Becken unter kontrollier- und wiederholbaren Bedingungen. Die exakte Bestimmung des Transportbeginns ist dabei immer noch von der Subjektivität des „Experimentators“ abhängig.

VANONI (1964) hat versucht, Zustände des Bewegungsbeginns mit Hilfe der Beobachtung eines kleinen Sohlenschnitts und Zählung sog. Aufbrüche (bursts) pro Zeiteinheit zu klassifizieren. Er definierte die Begriffe: Ruhe, vernachlässigbar, gering, kritisch, allgemein. Bis auf „Ruhe“ kann jeder Zustand den Bewegungsbeginn darstellen, obwohl die Unterschiede in der Strömungsgeschwindigkeit zwischen der minimalen und der maximalen Kornbewegung bezogen auf  $v_{max}$  über 50% liegen. Es ist daher zweckmäßig, den Bewegungsbeginn nicht mit einem exakten Zahlenwert zu beschreiben, sondern jeweils einen Bereich anzugeben, in dem die Startbedingungen vorhanden sind. In neueren Untersuchungen wird das Bewegungsrisiko definiert (ZANKE 1990, siehe Bild 6)

Die praktische Bedeutung des Transportbeginns führte zu einer Vielzahl von Arbeiten, die entsprechende Kriterien enthalten (HRISSANTHOU et al. 1995). Grundsätzlich lassen sich für den Bewegungsbeginn zwei Betrachtungsmöglichkeiten unterscheiden:

- a. Kritische Geschwindigkeit
- b. Kritische Schubspannung

## 2.2 Kritische Geschwindigkeit

Für die Praxis sind Zusammenhänge, die die mittlere Fließgeschwindigkeit und einen charakteristischen Korndurchmesser enthalten, am einfachsten anzuwenden, da sich die beiden genannten Größen mit einem hinreichenden Erfahrungspotential relativ leicht messen oder berechnen lassen.

Die bekannteste graphische Darstellung ist das empirische HJULSTRÖM-Diagramm (1935) (Bild 1). Das Kurvenband gilt nur für weitgehend ebene Gewässersohlen und für Wassertiefen größer ca. 1 m. Da der Transportbeginn bei kohäsiven Sohlenmaterialien noch nicht genau bekannt ist, bzw. von anderen Parametern abhängt, wird die Benutzung (wie hier dargestellt) nur bis  $d = 0,01$  mm empfohlen.

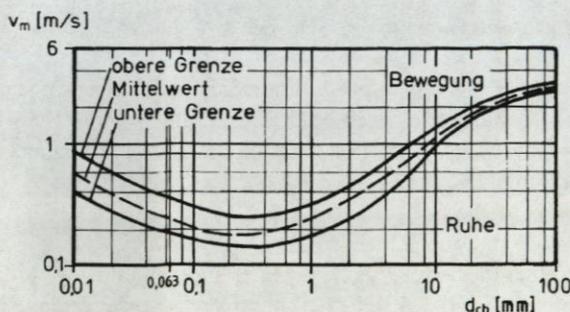


Bild 1: Mittlere kritische Geschwindigkeit und charakteristischer Korndurchmesser nach HJULSTRÖM

Ein halb-empirischer dimensionsreiner Ansatz, der auch bedingt für kohäsives Material gilt und wassertiefenabhängig ist, wurde von DOU GO-ZEN (1962) vorgestellt.

$$v_{mcr} \approx 2,5 \left[ \rho' g d + 0,19 \frac{\epsilon_k + \rho_w \cdot g \cdot \delta \cdot h}{\rho_w \cdot d_{ch}} \right]^{0,5} \quad [\text{m/s}] \quad (1)$$

Darin bedeuten  $\epsilon_k = 2,56 \cdot 10^5$  [N/m] ein Adhäsionsparameter und  $\delta = 2,13 \cdot 10^3$  [m] die Kontaktstärke des Wasserfilms zwischen 2 Körnern.

Die ebenfalls dimensionsreine empirische Beziehung von ZANKE (1982) ergibt ähnliche Werte wie bei HJULSTRÖM:

$$v_{mcr} = 2,8 (\rho' g d_{ch})^{0,5} + 14,5 \frac{v}{d_{ch}} \cdot c \quad (2)$$

$v_{mcr}$  = kritische mittlere Fließgeschwindigkeit für Bewegungsbeginn [m/s]

Es werden sowohl die Wassertemperatur (< kinematische Zähigkeit [m<sup>2</sup>/s]) als auch die Adhäsion berücksichtigt. Für natürliche Sande ist  $c = 1$ . Die Formel gilt für Wassertiefen zwischen 0.7 und 2 m (im Mittel ca. 1,4 m). Für andere Wassertiefen kann die mit oben angegebener Gleichung ermittelte Geschwindigkeit mit dem Faktor

$$\left( \frac{h_{\text{voh.}} [\text{m}]}{1,4 [\text{m}]} \right)^{1/6}$$

multipliziert werden, d.h. bei größeren Wassertiefen erhöht sich die kritische

Geschwindigkeit entsprechend.

In neueren Untersuchungen wurde festgestellt, daß sich die für den Bewegungsbeginn erforderlichen Initialgeschwindigkeiten der Strömung durch sog. biologische Verfestigung erheblich vergrößern können (FÜHRBÖTER 1983). Das trifft z.B. für Bereiche zu, die in rhythmischer Folge trocken fallen (Watt) oder aber für Fließgerinne, deren Wasserstände zeitweise so niedrig sind, daß sich eine biologische Besiedlung an der Sohle bilden kann. Ebenso setzt der Transportbeginn bei einer mit Transportkörpern bedeckten Sohle erheblich später als bei ebener Sohle ein. Ohne auf das relativ komplexe Widerstandsverhalten von Formrauheiten einzugehen, ist es ohne weiteres verständlich, daß es größerer Initialgeschwindigkeiten bedarf, um ein Korn auf dem negativ geneigten Luvhang einer Düne in Bewegung zu setzen (Bild 2).

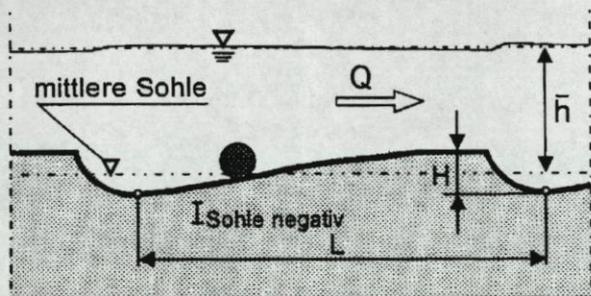


Bild 2: Transportbeginn auf einem Dünenlufhang (schematisch)

### 2.3 Kritische Schubspannung

Der klassische Ansatz für die Schub- oder Schleppspannung ergibt sich für stationär gleichförmige Verhältnisse nach Bild 3.

Die „Gewichtskraft“ des Wasserkörpers beträgt

$$G = L \cdot b \cdot h \cdot \rho_w \cdot g \quad [N]$$

Die Komponente F in Fließrichtung wird bei gleichförmigem Abfluß

$$F = G \cdot \sin \alpha \approx G \cdot I = L \cdot b \cdot h \cdot \rho_w \cdot g \cdot I \quad [N]$$

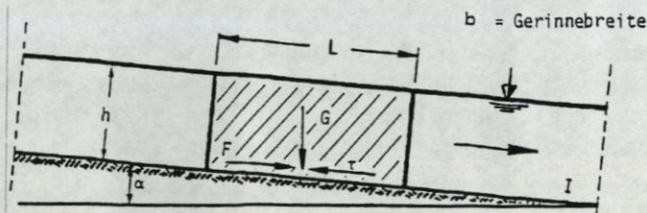


Bild 3: Erklärung des Schubspannungsansatzes

Die Schleppspannung  $\vartheta$  muß mit der auf die Fläche verteilten Komponente  $F$  im Gleichgewicht sein, d.h.

$$\tau = \frac{F}{Lb} = \rho_w \cdot g \cdot h \cdot I \approx 10^4 \cdot h \cdot I \quad [\text{N/m}^2] \quad (3)$$

Ist die Gerinnebreite  $b < 30h$ , ersetzt man die Wassertiefe durch den hydraulischen Radius  $R$ .

Der Zusammenhang zwischen  $\vartheta$  und der Schubspannungsgeschwindigkeit  $v_o^*$  lautet

$$\tau = \rho_w \cdot v_o^{*2}$$

Bei ungleichförmigem Abfluß läßt sich nach VOLLMERS/PERNECKER (1967) (und aufgrund einer persönlichen Mitteilung von W. Günzel 1961) der nachstehende Ausdruck für eine beschleunigte Strömung ableiten.

$$\tau = \rho_w \cdot g \cdot h_m (I_{\text{Sohle}} + I_{\text{Spiegel}}) - I_{\text{Spiegel}} \cdot \rho_w \cdot v_m^2 \quad [\text{N/m}^2] \quad (4)$$

Bei verzögertem Abfluß kehren sich die Vorzeichen um. Danach wird die Schubspannung gegenüber dem Zustand bei gleichförmigem Abfluß bei beschleunigtem Abfluß kleiner und bei verzögertem Abfluß größer. Zum gleichen Ergebnis kamen mit einem ähnlichen Ansatz bereits SMERDON/BEASLEY (1959).

Neben der Sohlenschubspannung ist für die Praxis die Frage nach den auf den Böschungen eines trapezförmigen Gerinnes auftretenden Schubspannungen von Bedeutung. Nach grundsätzlichen Untersuchungen beträgt die maximale Schubspannung auf seitlichen Böschungen etwa 0,75 der Sohlenschubspannung, wobei die Sohlenbreite und die Böschungsneigung nur bei relativ schmalen Gerinnen einen merklichen Einfluß ausüben.

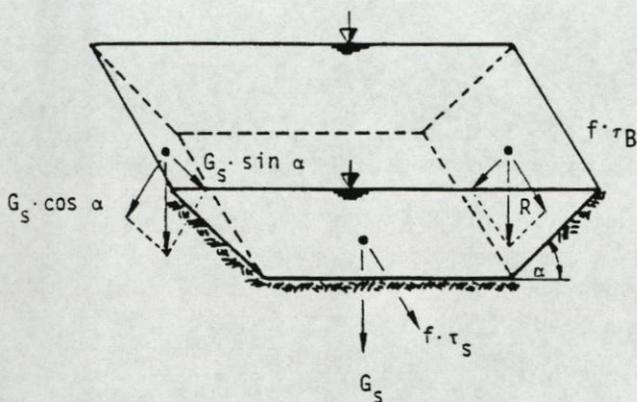


Bild 4: Schubspannungen auf Sohle und Böschungen

Mit den Bezeichnungen auf Bild 4 läßt sich eine Gleichung entwickeln, die die Schubspannung auf Böschung und Sohle unter Einbeziehung des natürlichen Schüttwinkels von rolligem Material beschreibt.

Für die Böschung gilt

$$R = \sqrt{G_s^2 \cdot \sin^2 \alpha + f^2 \tau_B^2} = G_s \cos \alpha \cdot \tan \beta$$

$$\tau_B = \frac{G_s}{f} \cos \alpha \cdot \tan \beta \sqrt{1 - \frac{\tan^2 \alpha}{\tan^2 \beta}}$$

$f$  [ $m^2$ ] Faktor zur Berücksichtigung von Korndurchmesser und Reibungswiderstand

Für die Sohle gilt

$$f \cdot \tau_s = G_s \tan \beta$$

$$\tau_s = \frac{G_s}{f} \tan \beta$$

und schließlich

$$\frac{\tau_B}{\tau_s} = \cos \alpha \sqrt{1 - \frac{\tan^2 \alpha}{\tan^2 \beta}} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta}} \quad (5)$$

Der einzige bekannte Zusammenhang für den natürlichen Böschungswinkel  $\beta$  vom Korndurchmesser für nicht kohäsives Material ist in Bild 5 dargestellt.

Ebenso wie bei den aus der kritischen Geschwindigkeit abgeleiteten Beziehungen für den Bewegungsbeginn existieren eine Reihe mehr oder weniger empirischer Ansätze zur Berechnung der kritischen Schubspannung.

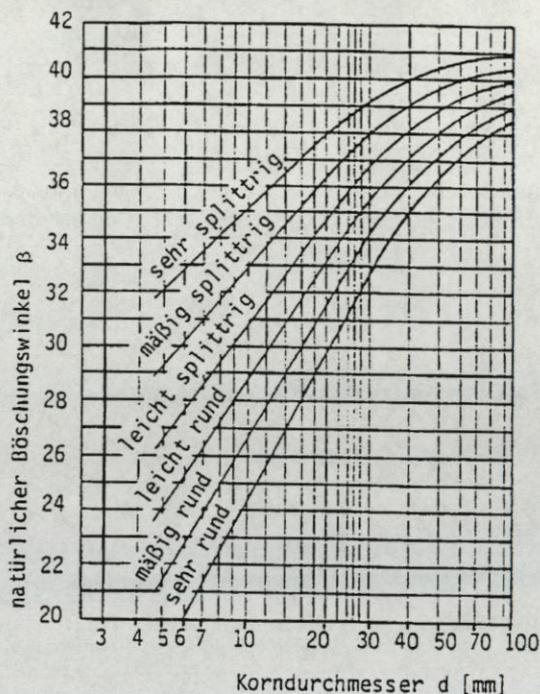


Bild 5: Natürlicher Böschungswinkel in Abhängigkeit vom Korndurchmesser und der Kornform

Zur Frage der praktischen Anwendung ist zu bemerken, daß der direkte Einschnitt eines Fließgewässers in den natürlichen Untergrund ein Sonderfall ist. Böschungen sind meist befestigt, das Widerstandsverhalten der Befestigungsart läßt sich aus diversen Tabellen als Schubspannungswert entnehmen.

Die bis heute am meisten benutzte allgemeingültige Grundlage für Untersuchungen zum Bewegungsbeginn von Materialien ist das Diagramm von SHIELDS (1936) (Bild 6), das hier in der von ZANKE (1990) modifizierten Form mit Angabe des Bewegungsrisikos  $R$  vorgestellt wird.

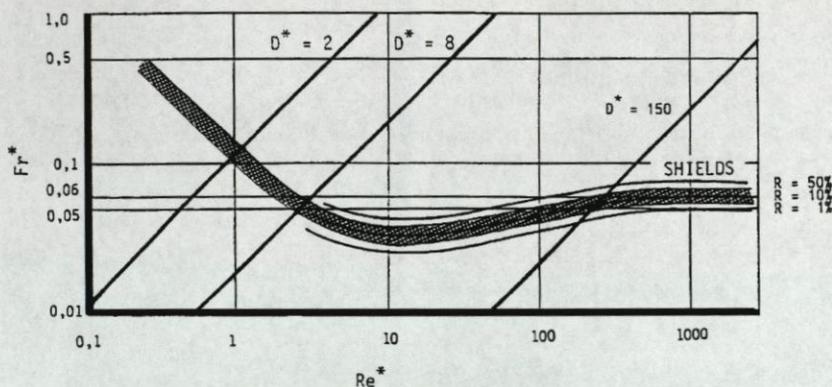


Bild 6: SHIELDS-Diagramm (1936) (nach ZANKE)

Shields fand eine Beziehung zwischen der Feststoff-FROUDE-Zahl  $Fr^*$  und der Feststoff-REYNOLDS-Zahl  $Re^*$ . Im hydraulisch rauhen Bereich (etwa ab  $Re^* \sim 300$  ( $D^* \sim 150$ ,  $d \sim 0,6$  cm)) ist  $Fr^*$  nicht mehr von  $Re^*$  abhängig, d.h. dort sind nur noch Druckkräfte maßgebend. Im hydraulisch glatten Bereich wird

$$Fr^* \sim 0,1/Re^*$$

d.h. hier sind die Zähigkeitskräfte maßgebend (Kohäsionseinfluß). Zwischen beiden Bereichen liegt eine Übergangszone, die jedoch für viele praktische Fälle maßgebend ist.

BONNEFILLE (1963) fand bei der Suche nach einer formulierbaren Darstellung des SHIELDS-Diagramms einen Zusammenhang, der bei konstanten Material-, Liquid- und Fallbeschleunigungsdaten eine lineare Abhängigkeit vom jeweiligen charakteristischen Korndurchmesser lieferte:

$$D^* = (\text{Re}^{*2} / \text{Fr}^*)^{1/3} = \left( \frac{\rho' \cdot g}{v^2} \right)^{1/3} \cdot d_{\text{ch}} \quad (6)$$

Damit gelang es, die SHIELDS-Kurve durch zwei Funktionen  $D^* = f(\text{Re}^*)$  darzustellen (Bild 7), wobei der Gültigkeitsbereich des linken Geradenabschnitts jedoch nur bis  $\text{Re} \sim 1$  reicht. Seine Gleichungen lauten

$$D^* = 2,5 \text{ Re}^{*4/5} \quad (1 < \text{Re}^* < 15) \quad (7a)$$

$$D^* = 3,8 \text{ Re}^{*5/8} \quad (1 < \text{Re}^* < 15) \quad (7b)$$

BONNEFILLE konnte allerdings erstens nicht ahnen, daß sein „Sedimentologischer Durchmesser“ bereits 1956 von dem chinesischen Kollegen SA YUGING benutzt wurde, allerdings nur für eine allgemeingültige Darstellung von Sinkgeschwindigkeiten von Quarzkörnern (VOLLMERS 1987) und daß zweitens das  $D^*$  immer noch wieder neu entdeckt wird!

Die Beziehung von SHIELDS für den voll rauhen Bereich ( $\text{Fr}^* > 0,06$ ) lautet in der  $D^*$ - $\text{Re}^*$  Darstellung

$$D^* = 2,56 \text{ Re}^{*2/3} \quad (7c)$$

und ist eine Parallele zu der in Bild 7 eingetragenen Geraden  $D^* = 2,7 \text{ Re}^{*2/3}$  ( $\text{Fr}^* = 0,05$ ). Die bekannte Gleichung von MEYER-PETER/MÜLLER läßt sich wie folgt umformen:

$$D^* = 2,77 \text{ Re}^{*2/3} \quad (\text{Fr}^* = 0,047) \quad (7d)$$

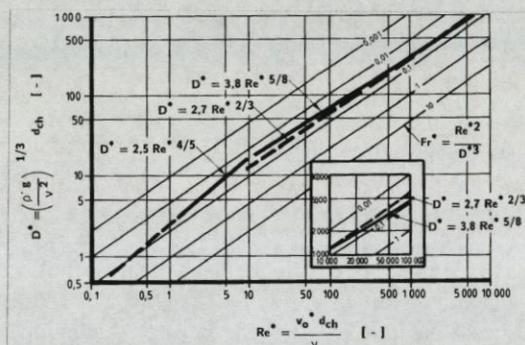


Bild 7: Beginn des Sedimenttransportes nach BONNEFILLE (PERNECKER/VOLLMERS 1965)

Der Zusammenhang von  $Fr^*$ ,  $Re^*$  und  $D^*$  erklärt übrigens, weshalb sich die Meßergebnisse zum Transport von Quarzkörnern bei der Darstellung nach SHIELDS immer um eine Gerade (Bild 6) gruppieren, was manche Autoren noch viel später als neue Erkenntnis vermerkten.

### 3 Zusammenfassung

In den vorangegangenen Abschnitten wurden die wesentlichen Möglichkeiten zur Bestimmung der kritischen Strömungsgeschwindigkeit bzw. der Schubspannung aufgezeigt, bei der ein Quarzkorn gerade noch in Ruhe bleibt, bzw. sich durch die Strömung in Bewegung setzt. Das gilt auch für eine beliebige Befestigungsart der Gerinnesohle oder der Böschungen, deren Widerstand irgendeinen kritischen Grenzwert besitzt und bei dessen Überschreiten mit Zerstörungen gerechnet werden muß. Die jeweiligen Grenzwerte lassen sich meistens nicht durch irgendeinen einzelnen Zahlenwert, sondern allgemein nur einen Bereich „von ..... bis“ definieren. Dabei spielen auch die hydraulischen Kennwerte eine Rolle, z.B. die Wassertiefe. Es ist nicht verwunderlich, wenn man aus mehreren Ansätzen unterschiedliche kritische Geschwindigkeiten bzw. Schubspannungen erhält. Falls keine definitiven Naturwerte (Beobachtungen, Messungen etc.) vorliegen, kann man dann durchaus das arithmetische Mittel der Formelwerte als Grundlage für das weitere Vorgehen benutzen. Wie bereits im Abschnitt 1 gesagt wurde, hat die Vielzahl der Parameter bisher eine allgemeingültige Lösung verhindert.

Mit den heute bekannten Hilfsmitteln (Mathematische Modelle) läßt sich aber zumindest die flächenhafte Verteilung der Sohlenschubspannungen mit einem geeigneten Geschwindigkeitsverteilungsgesetz in einem Fließgewässer berechnen. Der Rückgriff auf einen charakteristischen Korndurchmesser (oder eine fraktionierte Betrachtung) und die Wahl eines kritischen Bewegungsansatzes bleiben einem dabei aber auch nicht erspart, ganz abgesehen davon, wenn noch nach einer Bilanzierung (Feststofffracht) gefragt wird.

Bei zahlreichen praktischen Problemen wird man sich auf die Relation der einzelnen untersuchten Varianten zu einem Ausgangszustand beschränken müssen, wobei alle Zustände mit der gleichen Methodik bzw. mit den selben Ansätzen berechnet werden. Eines der besten Beispiele aus der neueren Zeit ist zweifellos die Untersuchung über die Beeinflussung des Geschiebetransportes durch die Schifffahrt auf dem Rhein (SÖHNGEN, etwa 2001).

## 4 Literaturverzeichnis

Es werden nicht sämtliche Zitate aufgeführt. Eine neuere zusammenfassende Betrachtung enthält die Arbeit von Hrissanthou et al. 1995.

- Bechteler, W. (1997):  
Vollmers, H.-J. "Feststofftransport", Vorlesungsskript, Universität der Bundeswehr München, Neubiberg (unveröffentlicht)
- Bonnefille, R. (1963): "Essais de synthèse des lois de début d'entraînement des sédiments sous l'action d'un courant en régime uniforme", Bull. du CREC de Chatou, No. 5.
- Hrissanthou, V. (1995):  
Vollmers, H.-J.,  
Hartmann S. "Beginn des Feststofftransports – Eine zusammenfassende Betrachtung", Universität der Bundeswehr München, Mitt. Heft. Nr. 54
- Söhngen, B. (2001 ?): "Einfluß des mittleren Rückströmungsfeldes auf den Geschiebetransport am Beispiel des Rheines bei Westhofen", Mitt. Blatt BAW Karlsruhe
- Vollmers, H.-J. (1987): "Bed Load Transport (van Rijn)", Discussion, ASCE, V. 113, No. 9
- Vollmers, H.-J. (1998): "Experimente und Modellversuche mit beweglicher Sohle", Dresdner Wasserbauliche Mitt., H. 13
- Vollmers, H.-J. (1967):  
Pernecker, L. Beginn des Feststofftransportes für feinkörnige Materialien in einer richtungskonstanten Strömung, Wasserwirtschaft, 57. Jg., Heft 6
- Zanke, U. (1990): "Der Beginn der Sedimentbewegung als Wahrscheinlichkeitsproblem", Wasser und Boden, 42. Jg., Heft 1

em. Univ. Prof. Dr.-Ing. H.-J. Vollmers  
Universität der Bundeswehr München  
Institut für Wasserwesen  
85577 Neubiberg