



Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen

**Zur Rheologie von Flüssigschlickern:  
Experimentelle Untersuchungen und theoretische  
Ansätze**

**Prof. Dr.-Ing. habil. Dipl.-Phys. Andreas Malcherek  
Dipl.-Ing. Hyunho Cha**

Institut für Wasserwesen  
Werner-Heisenberg-Weg 39  
85577 Neubiberg  
Tel.: 089 / 6004 3876  
email: [andreas.malcherek@unibw-muenchen.de](mailto:andreas.malcherek@unibw-muenchen.de)

## Das BMBF-Projekt MudSim-A

Der vorliegende Bericht stellt den Abschlussbericht zu dem vom Bundesministerium für Bildung und Forschung geförderten Verbundprojekt 'Numerische Simulation der Dynamik von Flüssigschlick - MudSim', Teilprojekt MudSim-A dar.

In diesem an der Universität der Bundeswehr München bearbeiteten Teilprojekt geht es vor allem um die Untersuchungen zur Rheologie von Flüssigschlick und deren Parametrisierung, während es in dem zweiten, an der Bundesanstalt für Wasserbau bearbeiteten Teilprojekt MudSim-B um die Entwicklung eines numerischen Modells zur Dynamik von Flüssigschlick geht, in welchem die rheologischen Parametrisierungen benötigt werden.

Um die Lesbarkeit des Berichts als Monographie zu diesem wichtigen Thema zu gewährleisten, wird im folgenden nicht mehr explizit auf das Projekt MudSim-A Bezug genommen. Der Zusammenhang mit den verschiedenen Arbeitspaketen soll daher hier erstellt werden.

### 1. Rheometrische Untersuchungen und Parametrisierungen:

Im Rahmen der numerischen Simulation ist das rheologische Verhalten des Flüssigschlicks durch entsprechende Parametrisierungen vorzugeben. Um dieses allgemein zu charakterisieren, sollte zunächst eine möglichst allgemeingültige Parametrisierung der rheologischen Eigenschaften aufzustellen, die die Besonderheiten der einzelnen Modelle (Herschel-Bulkley, Worrall-Tuliani) als auch die Thixotropie berücksichtigt.

Im Verlauf des Projekts wurde hierzu zunächst eine umfangreiche Literaturrecherche durchgeführt, deren Ergebnisse schon im Vorfeld der experimentellen Untersuchungen die besondere Bedeutung einiger und die Irrelevanz anderer Parameter ergab.

Zudem führte die sich aus der Literaturrecherche ergebenden theoretischen Erwägungen sehr schnell zu einer Basisform der Parametrisierung nach Worrall-Tuliani. Diese erweist sich allerdings noch als unzulänglich, da sie keine Aussagen über den Feststoffgehalt macht.

Hierzu wurde im Rahmen dieses Projekts ein neuer Ansatz entwickelt, der anhand von Schlickproben aus Ems und Weser validiert und in das numerische Modell eingebaut wurde.

Die Ergebnisse dieses Arbeitspakets werden in den Kapiteln 2 bis 4 besprochen.

### 2. Erstellung von Modulen zur Berechnungen der rheologisch wirksamen Spannungen.

Die gewonnene Parametrisierung wird zur Berechnung der rheologisch wirksamen Spannungen in einer Subroutine des numerischen Modells implementiert. Die Darstellung dieses Arbeitspakets in diesem Bericht ist nicht hilfreich für die Leser.

### 3. Entwicklung eines Konsolidierungsmodells.

Flüssigschlick werden entweder transportiert, resuspendiert oder konsolidieren mit der Zeit und bilden feste Bodenschichten. Konsolidierungsmodelle werden in der Geotechnik vielseitig angewendet. Sie basieren auf den Gleichungen von Terzaghi oder Gibson [7] in unterschiedlichen Weiterentwicklungen.

## II

Das im Rahmen dieses Projekts entwickelte Modell zur Simulation der Konsolidierung von Flüssigschlickern wird in Kapitel 5 vorgestellt. In der numerischen Modellierung der Flüssigschlickerdynamik ist es bisher aber nicht tragfähig eingesetzt worden, da der derzeitige Rechenaufwand für das Modell noch zu groß ist, als dass Langzeitsimulationen durchgeführt werden können, in denen der Effekt der Konsolidierung erst zum Tragen käme.

### 4. Aufbau und Betrieb eines Hafenmodells im Labor.

Das so entstehende numerische Modellverfahren muss verifiziert werden, bevor es auf komplexe Natursysteme angewendet und validiert werden kann. Hierzu wurde ein Labormodell eines Hafenbeckens aufgebaut und in diesem durch Einbringen entsprechender Feststoffe eine kontrollierte Fluid Mud Dynamik erzeugt.

Durch den Vergleich mit den numerischen Simulationen kann das Computermodell validiert bzw. Schwachstellen aufgezeigt werden.

Dieses Arbeitspaket ist in den Kapiteln 7 und 8 dargestellt.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
1.1	Die nautische Sohle . . . . .	8
1.2	Der Transport von Flüssigschlickern . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Grundlagen der deskriptiven Rheologie</b>	<b>11</b>
2.1	Das viskose Verhalten der Flüssigkeiten . . . . .	12
2.1.1	Newtonsche Fluide . . . . .	13
2.1.2	Strukturviskosität . . . . .	14
2.1.3	Shear Thickening . . . . .	16
2.1.4	Der Übergang zwischen zwei Viskositäten . . . . .	19
2.1.5	Andere Modellgesetze zur Strukturviskosität . . . . .	20
2.2	Die Fließgrenze . . . . .	20
2.2.1	Binghamsche Fluide . . . . .	20
2.2.2	Das Herschel-Bulkley-Modell (1926) . . . . .	22
2.2.3	Das Casson-Modell (1959) . . . . .	23
2.3	Thixotropie . . . . .	23
2.3.1	Das Moore-Modell (1956) . . . . .	23
2.3.2	Das Worrall-Tuliani-Modell (1964) . . . . .	24
2.4	Rheometrische Messungen . . . . .	26
2.4.1	Platte-Platte-Rotationsviskosimeter . . . . .	26
2.4.2	Platte-Konus-Rotationsviskosimeter . . . . .	28
2.4.3	Systematische Messfehler in der Rotationsviskosimetrie . . . . .	28
2.5	Zusammenfassende Folgerungen . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Die Rheologie granularer Suspensionen</b>	<b>31</b>
3.1	Dimensionsanalyse . . . . .	31
3.1.1	Der Einfluss der relativen Dichte . . . . .	32
3.1.2	Der Einfluss der rheologischen Pecletzahl . . . . .	32
3.1.3	Der Einfluss der rheologischen Zeit . . . . .	33
3.1.4	Der Einfluss der rheologischen Reynoldszahl . . . . .	33
3.2	Der Einfluss des Feststoffgehalts . . . . .	33
3.3	Die Arbeit von A. Einstein (1906) . . . . .	35
3.3.1	Sphärische Partikel in Scherströmung . . . . .	35

3.3.2	Der Einfluss der Scherrate . . . . .	37
3.4	Partikel-Partikel-Interaktionen . . . . .	38
3.4.1	Batchelor und Green (1972) . . . . .	39
3.4.2	Der Ansatz von Eilers (1941) . . . . .	39
3.5	Nichtsphärische Partikel . . . . .	39
3.5.1	Rotationsellipsoide in Scherströmung . . . . .	39
3.5.2	Orientierung von nicht-sphärischen Partikeln . . . . .	41
3.6	Der Einfluss der Korngröße . . . . .	43
3.7	Paarbildung: Die Theorie von Krieger und Dougherty . . . . .	44
3.7.1	Die Reaktionskinetik der Paarbildung . . . . .	45
3.7.2	Lebensdauern . . . . .	46
3.7.3	Die Viskosität unter Paarbildung . . . . .	47
3.8	Zusammenfassende Folgerungen . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Die Rheologie der Schlicke aus Ems und Weser</b>	<b>49</b>
4.1	Die Probenahmen in Ems und Weser . . . . .	49
4.2	Der mikroskopische Eindruck . . . . .	56
4.3	Bestimmung der Korngrößenverteilungen . . . . .	59
4.3.1	Flockenbildung im Partikelsizer . . . . .	60
4.3.2	Messergebnisse . . . . .	61
4.4	Der Glühverlust . . . . .	64
4.5	Bestimmung der Trockendichte . . . . .	64
4.6	Rheometrie der Schlickproben . . . . .	65
4.6.1	Die Fließ- und Viskositätskurven . . . . .	66
4.6.2	Auswertung nach dem Bingham-Gesetz . . . . .	67
4.6.3	Auswertung nach dem Worrall-Tuliani Modell . . . . .	72
4.6.4	Auswertung nach dem Oseen-Eilers-Ansatz . . . . .	75
<b>5</b>	<b>Konsolidierung</b>	<b>77</b>
5.1	Das Prinzip der effektiven Spannung . . . . .	77
5.1.1	Die Verteilung der Auflast im Boden . . . . .	77
5.1.2	Der Porenwasserüberdruck . . . . .	78
5.1.3	Die Bestimmung der effektiven Spannung . . . . .	79
5.1.4	Das Porositätsprofil im konsolidierten Zustand . . . . .	81
5.2	Das Darcysche Filtergesetz . . . . .	82
5.2.1	Die schleichende Strömung . . . . .	82
5.2.2	Die Durchlässigkeit granularer Materialien . . . . .	83
5.2.3	Die Standrohrspiegelhöhe . . . . .	84
5.2.4	Das Filtergesetz von Darcy . . . . .	85
5.2.5	Die Bewegung des Wasser bei der Konsolidierung . . . . .	86
5.3	Die klassische Terzaghitheorie . . . . .	87
5.3.1	Die Elastizitätseigenschaften von Böden und granularer Materie . . . . .	89
5.3.2	Zur Anwendung der Terzaghitheorie . . . . .	91

5.3.3	Die Volumenerhaltung im Zweiphasensystem . . . . .	92
5.4	Konsolidierungstheorie nach Gibson . . . . .	93
5.5	Der ebene Spannungszustand . . . . .	94
<b>6</b>	<b>Theoretische Rheologie</b>	<b>95</b>
6.1	Die Dynamik inkompressibler Kontinua . . . . .	95
6.2	Konzeptionelle Modelle zur Flüssigschlickdynamik . . . . .	97
6.2.1	Das dreidimensionale, differentielle Modell . . . . .	97
6.2.2	Das isopyknische Modell . . . . .	99
6.2.3	Geschiebetransport unter stationären, homogenen Bedingungen . . .	101
6.2.4	Ausrichtung von Schlickisopyknen auf Böschungen . . . . .	102
6.2.5	Das über die Schlickschicht gemittelte zweidimensionale Modell . . .	103
6.3	Eigenschaften Bingham'scher Fluide . . . . .	104
6.3.1	Das vertikale Geschwindigkeitsprofil . . . . .	104
6.3.2	Die Dicke der transportierten Sedimentschicht . . . . .	105
<b>7</b>	<b>Labormodell zur Verschlickung von Häfen</b>	<b>107</b>
7.1	Der Aufbau des Modells . . . . .	107
7.1.1	Überblick und Abmessungen . . . . .	108
7.1.2	Der Antrieb der Strömung . . . . .	109
7.1.3	Die Darstellung des Schlicks . . . . .	109
7.1.4	Der Messwagen . . . . .	110
7.2	Messtechniken . . . . .	110
7.2.1	ADV-Sonde für Geschwindigkeitsmessung . . . . .	110
7.2.2	TSS Portalbe-Trübungssonde für die Messung der Schwebstoffkonzentration . . . . .	113
7.2.3	Ultraschallsonde für die Ablagerungsmessung . . . . .	115
7.3	Quarzmehl als Ersatzschlick . . . . .	115
7.3.1	Physikalischer Charakter des Quarzmehls . . . . .	115
7.3.2	Rheologische Messungen . . . . .	116
7.3.3	Parametrisierung nach dem Worrall-Tuliani Modell . . . . .	117
7.4	Dichtebestimmung mit der Dichtesonde Liquiphant . . . . .	119
7.4.1	Funktionsweise des Liquiphanten . . . . .	119
7.4.2	Kalibrierung für Naturschlicke . . . . .	120
7.4.3	Kalibrierung für Quarzmehl . . . . .	127
7.4.4	Folgerungen . . . . .	129
7.5	Beschreibung der Einzelversuche . . . . .	130
7.5.1	Geschwindigkeitsmessung in reinem Wasser . . . . .	131
7.5.2	Versuch mit Quarzsuspension . . . . .	131
7.6	Zusammenfassende Bewertung . . . . .	138

<b>8</b>	<b>Numerische Simulation des Laborhafens</b>	<b>149</b>
8.1	MudSim . . . . .	149
8.2	Gitter und Diskretisierung des Modells . . . . .	153
8.3	Rand- und Anfangsbedingungen des Modells . . . . .	153
8.3.1	Randbedingung . . . . .	154
8.3.2	Anfangsbedingung . . . . .	156
8.4	Abschließende Bewertung . . . . .	156
8.4.1	Vergleich zwischen dem physikalischen und numerischen Modell . . .	156

# **Inhaltsverzeichnis**



# Kapitel 1

## Einleitung

Küstengewässer können durch die strömungsinduzierte Turbulenz Feststoffe mit einer Dichte größer als die des Wassers in Schwebelag transportieren. In strömungsberuhigten Zonen oder Zeitphasen wie der Kenterung verliert das Wasser die Fähigkeit, die Feststoffe in Suspension zu halten, womit diese zu Boden absinken und dort eine hochkonzentrierte, aber fließfähige Schicht bilden, den Flüssigschlick. Wird dieses Material nicht wieder suspendiert, konsolidiert es schließlich zu festem Boden.

Ist ein konsolidierter Endzustand erreicht, müssen solche Materialakkumulationen sehr aufwendig wieder abgetragen werden bzw. durch In Situ Conditioning soweit wieder verflüssigt werden, dass diese durch die Strömung oder gravitationelle Effekte abtransportiert werden können.

Vor Erreichen des konsolidierten Zustands haben diese hochkonzentrierten Schichten die Eigenschaften einer Flüssigkeit, die sich aber erheblich von denen eines Newtonschen Fluides unterscheiden. Man bezeichnet diese Flüssigschlickschichten englisch als Hyperconcentrated Benthic Layers (HBL) oder Fluid Mud.

Das wichtigste Beispiel für solche strömungsberuhigte Zonen, in denen sich Flüssigschlicke bilden, sind Hafenanlagen, Stauräume und Querschnittsaufweitungen. Flüssigschlicke können sich aber auch während der Kenterphase als strömungsberuhigte Zeit in den Fahrrinnen der Ästuarare bilden.

Ein Anführung der Baggerkosten aus dem Jahresbericht für Nassbaggerunterhaltungsarbeiten im Küstenbereich [1] infolge Verschlickung in den Ästuaren Ems, Weser und Elbe verdeutlicht den hohen Kostenaufwand durch Flüssigschlick. An der Ems entstanden im Jahre 2003 allein durch Verschlickung Baggerungskosten von 16 Mio EUR. Im selben Zeitraum sind an der Weser Baggerkosten von 0,22 Mio EUR und an der Elbe 3,5 Mio EUR für die Baggerung von Schlick ausgegeben worden. Die Kosten der Baggerung und Verbringung des entnommenen Materials sind stark von lokalen und regionalen Gegebenheiten abhängig und beziehen sich nur auf Baggerarbeiten der Wasser- und Schifffahrtsämter.

Die Erforschung

- der rheologischen Eigenschaften der Flüssigschlicke,
- der diese Eigenschaften bestimmenden Parameter,

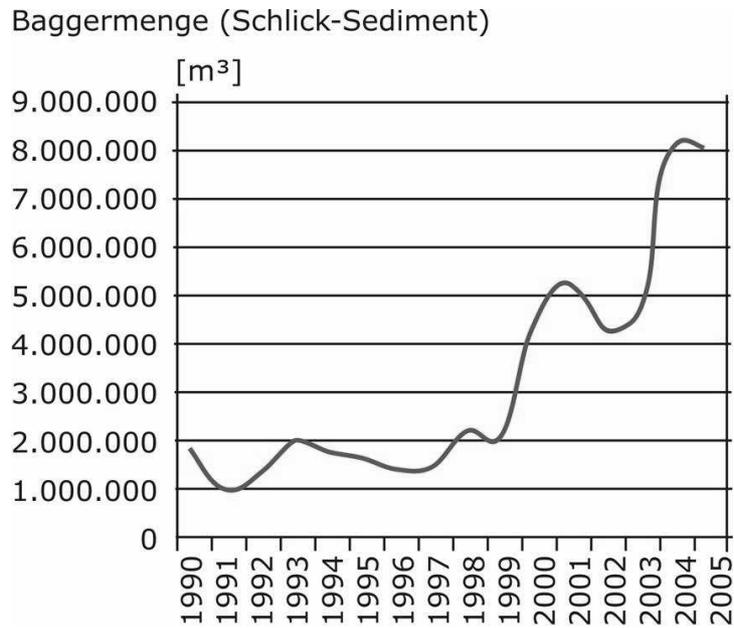


Abbildung 1.1: Entwicklung der Schlickbaggermengen im Hamburger Hafen (Quelle: HPA).



Abbildung 1.2: Die Verschlickung der Kutterhäfen im Land Wursten (hier Dorum) bereitet große Probleme.



Abbildung 1.3: Die großen Häfen haben zur Beseitigung des Schlickanfalls fortlaufend Bagger im Einsatz.

- und der Methoden zur numerischen Simulation der Dynamik von Flüssigschlick

sind vordringliche Aufgaben, um einerseits die Morphodynamik der Küstengewässer grundlegend zu verstehen und andererseits die mit der Fahrwasser- und Hafenschlickung aber auch den Stauraumverlandungen verbundenen Unterhaltungskosten zu reduzieren.

Seit den neunziger Jahren des ausgehenden Jahrhunderts sind daher ausführliche Untersuchungen zum rheologischen Verhalten von hochkonzentrierten Suspensionen in der Fachliteratur dokumentiert. Hierzu gehören die damit verbundenen Dichteströmungen im Talsperrenmanagement, aber auch Zementsuspensionen bei Felsinjektionen, das Verhalten von Bohrflüssigkeiten (drilling muds), die Eigenschaften keramischer Zusammensetzungen in der Verfahrenstechnik, und insbesondere die in den Tideästuaren anzutreffenden Fluid-Mud-Suspensionen. Deren rheologische Untersuchung dient in erster Linie der Vorausberechnung auszubaggender Mengen sowie als Grundlage für den Entwurf von Nassbaggerstrategien.

Die Bildung von Flüssigschlick ist allerdings nicht nur für die Unterhaltung von Wasserstraßen und Häfen von Bedeutung. Sammeln sich Schlickbereiche an Stränden an, so werden Wellen fast vollständig gedämpft (Dean and Darymple, 1991). Dieser Effekt wurde hat eine besondere wissenschaftliche Aufmerksamkeit am Casino Beach im Süden Brasiliens erlangt, dessen Schlickaufkommen aus der Patoslagune kommt, die in einem anderen BMBF-Projekt [?] untersucht wurde. Hier entstehen Lücken mit sehr ruhiger Wasseroberfläche von nur wenigen hundert Metern in der sonst sehr starken Brandung einzig durch Schlickablagerungen.

Entwickeln sich Flüssigschlicke in dauerhaft in der tiefen Rinne eines Ästuar, so kann es zu einer erheblichen Änderung der Tidedynamik kommen, die sich aus den Prozessen des Ein-



Abbildung 1.4: Dämpfung der Wellenenergie über Fluid Mud: Betrachtet man diese Luftaufnahme von Cassino Beach in Brasilien, so sieht man von rechts kommend die weissen Brecher der Brandungszone. Dann folgt ein ca. 1 km langer Abschnitt, auf dem keine Brandung zu erkennen ist, weil im Küstenvorfeld Fluid Mud die Wellenenergie fast vollständig dissipiert hat.

dringens der Tidewelle, der Dämpfung und deren Reflektion zusammensetzt (siehe z. B. [?]). So kann der Schlick in der Wassersäule die Strömung laminarisieren, wodurch die Dämpfung der Tidewelle wesentlich geringer ausfällt, als bei einer turbulenten Strömung. Dieser Effekt ist dann mit einer Tidehuberhöhung im Vergleich zu schlickfreien Ästuar verbunden.

Ferner ändert sich das Strandprofil: Bei einem Sandstrand nimmt die Wassertiefe in Richtung  $y$  des offenen Ozeans etwa mit  $h(y) = Ay^{2/3}$  zu. Dabei steigt der Vorfaktor  $A$  mit der Sinkgeschwindigkeit des Strandmaterials (Lee, 1995). Die Wassersäule ist also konvex. An einem Schlickstrand wird die Wassersäule über gewisse Bereiche konkav, der Zusammenhang zwischen dem Vorfaktor  $A$  und der Sinkgeschwindigkeit ist nicht mehr eindeutig.

Der vorliegende Bericht soll einen Beitrag dazu stellen, die Dynamik, d.h. die Entstehung, die Entwicklung und den Transport von Flüssigschlick auf der Grundlage der physikalischer Prozesse zu beschreiben, um deren mathematische Formulierungen in vorhandene Softwarekomponenten zu implementieren.

Dazu wird der Leser im folgenden Kapitel zunächst einmal in die Grundbegriffe der Rheologie eingeweiht, so wie sie zur Beschreibung von Flüssigschlick erforderlich sind. In Kapitel 3 werden die rheologischen Begriffe für granulare Suspensionen spezifiziert und die bekannten theoretischen Modelle hierzu dargestellt. Dieses Kapitel kann für den an der Schlickpraxis Interessierten zunächst übersprungen werden.

Die Validität des so entstandenen Modells zur Flüssigschlickdynamik soll mit Hilfe von Labormodellen und ausgewählten Referenzgebieten an der Küste überprüft werden. Dadurch werden Werkzeuge und Modelle bereitgestellt, mit denen zukünftig Maßnahmen im Zusammenhang mit dem Ausbau, dem Neubau und der Unterhaltung und dem Sedimentmanagement im Bereich der Küstengewässer optimiert werden können. Die Softwarebausteine sollen

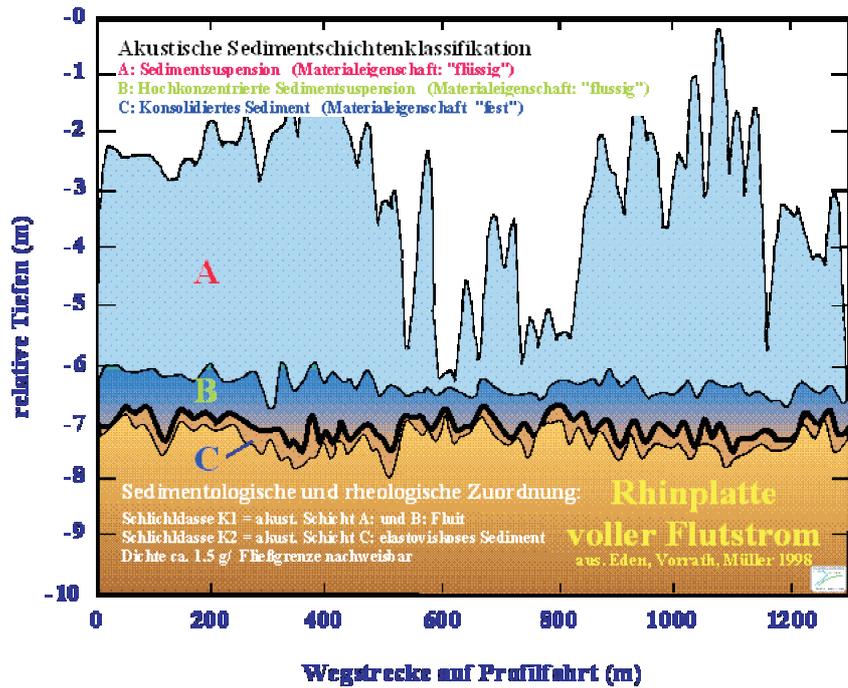


Abbildung 1.5: Feststoffprofil in der Elbe während voll entwickeltem Flutstrom.

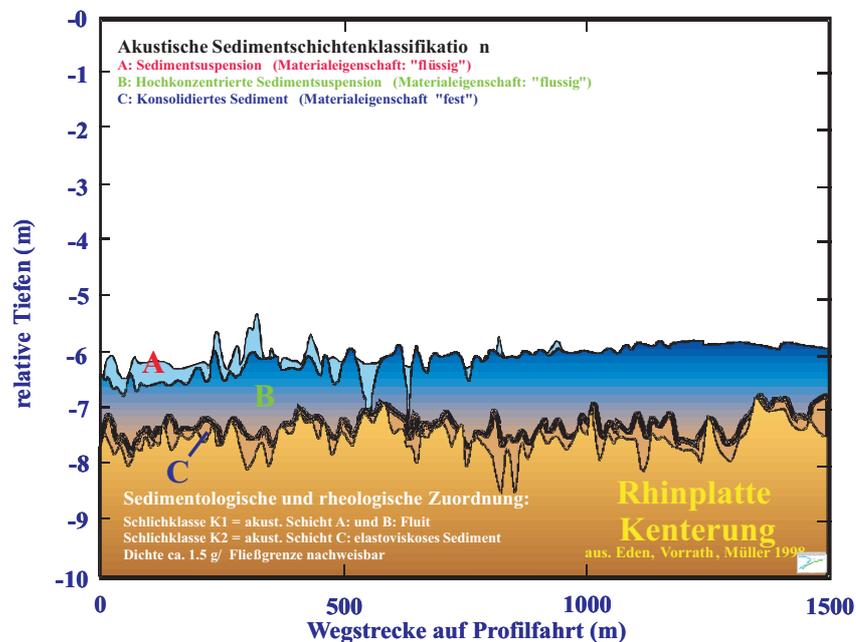


Abbildung 1.6: Feststoffprofil in der Elbe während der Kenterung.

in Forschungsk Kooperationen nationalen und internationalen Institutionen zur Anwendung zur Verfügung gestellt werden.

## 1.1 Die nautische Sohle

Die nautische Sohle bestimmt die Tiefe, bis zu der ein Gewässer noch schiffbar ist. Von der PIANC wurde 1978 eine Dichte von  $1200 \text{ kg/m}^3$  empfohlen. Wurpts [20] schlägt hier allerdings alternativ eine auf die Fließgrenze des anstehenden Schlicks bezogene Definition der nautischen Tiefe von 70 Pa vor. Hydromechanisch kann man die zweite Alternative durch einen Blick auf die exakte Formulierung für den Strömungswiderstand eines Schiffes unterstützen:

$$\vec{F} = \underbrace{\oint_{\partial\Omega} p \vec{n} dA}_{\text{Druckwiderstand}} - \underbrace{\oint_{\partial\Omega} \tau \vec{n} dA}_{\text{Reibungswiderstand}} \quad (1.1)$$

Dieser setzt sich aus einem Druckanteil und dem Reibungswiderstand zusammen. Der Tensor  $\tau$  beschreibt dabei die viskosen Spannungen, die mit der Reibung des Fluids am Schiff verbunden sind.

Den unter dem Integral auftauchenden Druck kann man recht einfach aus der Bernoulligleichung abschätzen, wenn man annimmt, dass die Schiffsgeschwindigkeit  $u_S$  vollständig am Körper gestaut und dort in einen **Staudruck** umgewandelt wird:

$$\frac{u_S^2}{2} = \frac{p_{\text{stau}}}{\rho}$$

Hat der Körper die Anströmfläche  $A$ , dann gilt für den Druckwiderstand

$$F_p = c_p A \frac{\rho u_S^2}{2}$$

wobei der Beiwert  $c_p$  alle Unzulänglichkeiten der vereinfachten Herleitung kompensiert. Für den Gesamtwiderstand folgt somit:

$$\vec{F} = c_p A \frac{\rho u_S}{2} \vec{u}_S - \oint_{\partial\Omega} \tau \vec{n} dA$$

Da ein anfahrendes Schiff zunächst die Geschwindigkeit  $u_S = 0$  hat, sind neben seinen eigenen Trägheitskräften nur die Fließgrenze  $\tau_y$  des umgebenden Fluids zu überwinden. Damit ein Schiff der Masse  $m_S$  also die Anfangsbeschleunigung  $a$  erfährt, muss die Schubkraft  $T$  mindestens

$$T \geq m_S a + c_v \tau_y A$$

Darin ist  $A$  nun die benetzte Schiffsaußenhaut und  $c_v \simeq 1$  ein Beiwert, der die Unzulänglichkeiten dieser Betrachtung berücksichtigt.

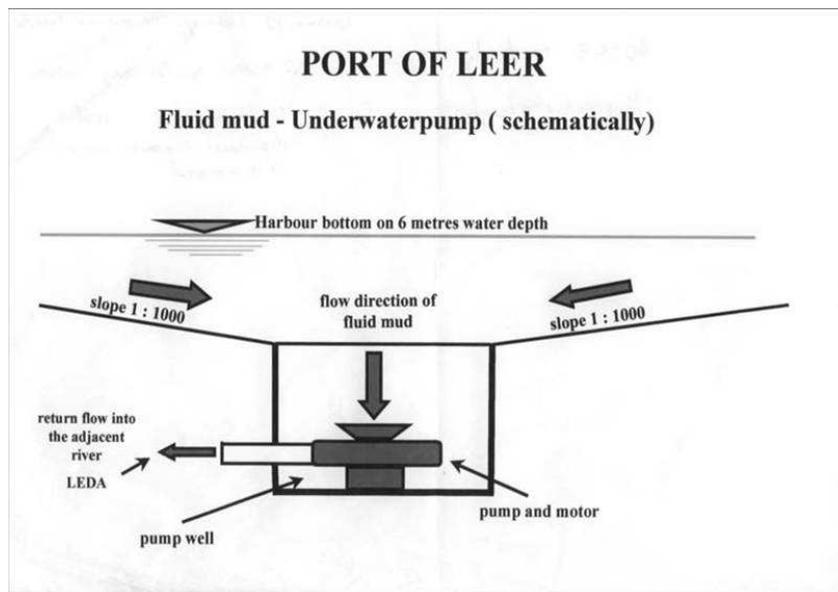


Abbildung 1.7: Das Fluid- und Bypasssystem im Hafen Leer (aus [20]).

Diese Herleitung zeigt, dass die Schiffbarkeit eines schlickhaltigen Gewässers tatsächlich durch die Fließgrenze und nicht durch die Flüssigkeitsdichte bestimmt ist.

In seiner Arbeit belegt Wurpts zudem, dass die Fließgrenze nicht nur mit dem Feststoffgehalt, sondern auch mit steigendem Methangehalt zunimmt. Da letzterer ein Maß für die anaeroben Prozesse im Flüssigschlick darstellt, kann hieraus nur gefolgert werden, dass man diesen nur hinreichend belüften muss, um die aeroben Prozesse zu fördern und die Schiffbarkeit zu gewährleisten. Ein Ziel der vorliegenden Arbeit besteht also auch darin, die Schiffbarkeit und die nautische Sohle nach beiden Kriterien mit Hilfe der numerischen Simulationen zu prognostizieren. Hierzu wäre nach dem Dichtekriterium nur die Kenntnis des Feststoffgehalts erforderlich. Aus diesem kann man dann die jeweiligen Isopyknen (Flächen gleicher Gesamtdichte) im Modellgebiet bestimmen und mit der  $1200 \text{ kg/m}^3$ -Isopykne die nautische Sohle identifizieren.

Verwendet man allerdings das Fließgrenzenkriterium, dann ist zunächst erst einmal ein berechenbarer Zusammenhang zwischen der Fließgrenze und dem Feststoffgehalt aufzustellen. Sollen zudem noch der Einfluss der Biotik auf die Fließgrenze bestimmt werden, so ist die Abhängigkeit der Fließgrenze von einem geeigneten Parameter wie dem Sauerstoffgehalt, dem Methangehalt oder der EPS-Produktion zu bestimmen. An dieser Stelle besteht allerdings weiterer Forschungsbedarf, da keiner dieser Parameter in den derzeitigen Feststofftransportmodellen berücksichtigt wird.

## 1.2 Der Transport von Flüssigschlick

Flüssigschlicke können genau wie alle anderen Flüssigkeiten durch die Hangabtriebskraft an schiefen Ebenen (Gerinneströmungen) oder aber durch Druckgradienten (Rohrströmungen) transportiert werden. Beide Prinzipien werden im Fluid- und Bypasssystem im Hafen Leer angewendet [20], um diesen von Flüssigschlick frei zu halten. Dort führt ein Gefälle von 1:1000 den Schlick in Richtung einer Pumpe, die den Schlick in einer 350 m langen DN300-Leitung in die Leda zurückführt. Diese Pumpe arbeitet bei ablaufendem Wasser jeweils zwei Stunden, also vier Stunden täglich und pumpt dabei  $4200 \text{ m}^3$  Flüssigschlick aus den bodennahen Hafenbereichen ab. Die Ausgleichswassermengen werden allerdings nicht durch Schleusungen mit dem schlickhaltigen Wasser, sondern durch ein Bypasssystem mit zudem noch sauerstoffreichem Wasser aus der Leda bereitgestellt.

Im Rahmen dieses Projektes sollen quantifizierbare Grundlagen dazu erarbeitet werden, ob und wie der dargestellte Ansatz verallgemeinerungsfähig ist. Hierzu sollen vor allem Kriterien für die in einem solchen Hafenbecken erforderliche Sohlneigung bestimmt werden. Dazu ist wie bei der nautischen Sohle zunächst einmal die Fließgrenze als Funktion des Feststoffgehaltes zu bestimmen, woraus sich in einem zweiten Schritt durch die Lösung der Bewegungsgleichungen die erforderliche Sohlneigung ergibt.

# Kapitel 2

## Grundlagen der deskriptiven Rheologie

Die Rheologie beschäftigt sich mit dem Verhalten von allen Materialien, die fließfähig sind. Während man bei der Verhaltensforschung an leidensfähigen Wesen vor allem passive Methoden, d. h. die Beobachtung anwendet, kann die Rheologie sich gleich auf die aktiven Methoden stürzen: Sie erzwingt vom Probanden, d. h. dem fließfähigen Stoff durch eine von außen aufgebrachte Belastung ein gewisses Verhalten, d. h. eine Bewegung. Die deskriptive Rheologie versucht dabei, den Zusammenhang zwischen äußerer Belastung und der Bewegung als Reaktion zunächst einmal qualitativ und dann auch quantitativ zu beschreiben. Hiernach setzt dann die theoretische Rheologie an, die das beobachtete Verhalten durch theoretische Modelle erklärt werden sollte.

Die äußere Belastung wird in rheologischen Verhaltensexperimenten durch eine Scherspannung aufgebracht. Auf diese reagiert ein Fluid mit einer kontinuierlichen Ausweichbewegung, die mit einer relativen Bewegung der Fluidschichten untereinander verbunden ist, wodurch sich diese aneinander reiben. Zur Überwindung dieser als Viskosität bezeichneten inneren Reibung ist Energie erforderlich, die dem Mechanismus der äußeren Belastung natürlich entzogen wird, wodurch er müde werden und aufgeben soll.

Eine Flüssigkeit wendet im Bild der Verhaltensforschung bleibend also die Strategie der Zermürbung an, um äußeren Belastungen sicher nicht im ersten Moment, aber langfristig zu widerstehen und wieder zur Ruhe zu kommen.

Ganz anders verhält sich da ein Festkörper: Er reagiert auf eine äußere Belastung wie eine Scherspannung durch eine kurzfristige Verformung, die allerdings nicht dauerhaft anhält, sondern innere Widerstände mobilisiert und so der äußeren Belastung standhält. Hier würde der Verhaltensforscher also lediglich eine Verformung bzw. Deformation beobachten, nicht aber eine kontinuierliche Ausweichbewegung.

Beim ideal-elastischen Festkörper ist diese Deformation proportional zur belastenden Spannung: Dies bedeutet dann natürlich auch, dass die Deformation sich vollständig zurückbildet, sobald die Belastung verschwindet. Damit entzieht der Festkörper in einem Scharmützel aus Be- und Entlastung dem belastenden System keine Energie: Der elastische Festkörper ist damit strategisch weniger erfolgreich als die Flüssigkeit, wenn es darum geht, den Belaster zur Aufgabe zu zwingen.

Diese Strategie ist allerdings auch für einen Festkörper nicht immer erfolgreich: Ist die äußere

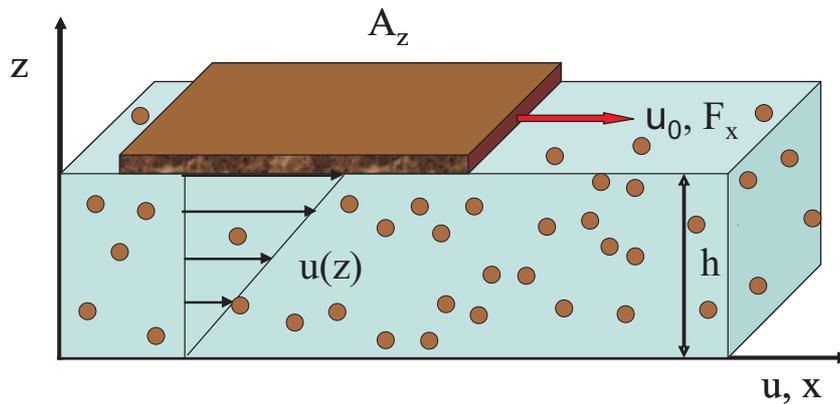


Abbildung 2.1: Die rheometrische Messung im Couetteversuch.

Belastung so groß, dass die inneren Widerstände dieser nicht mehr standhalten können, dann muss auch der Festkörper kapitulieren, er beginnt sich plastisch zu verformen.

Das trennende Bild von den viskosen Flüssigkeiten auf der einen und den elastischen Festkörpern auf der anderen Seite wird in der heutigen Materialwissenschaften allerdings nicht mehr vertreten: So weiss man, dass Flüssigkeiten auf der molekularen Ebene aus Bereichen mit Festkörperstrukturen aufgebaut sind, sich also auch wie solche verhalten. Aber auch Festkörper reagieren schon bei geringen Belastungen mit dauerhaften Deformationen. Auf der Landkarte der Materialien gibt es also eine 'Straße der Rheologie', die Flüssigkeiten und Festkörper kontinuierlich miteinander verbinden und deren Stoffeigenschaften als viskoelastisch bezeichnen.<sup>1</sup>

## 2.1 Das viskose Verhalten der Flüssigkeiten

Das grundlegende Verhaltensexperiment zur Beschreibung von Flüssigkeiten ist der Couetteversuch, welcher in der Abbildung 2.1 skizziert ist. Eine Testflüssigkeit befindet sich dabei zwischen zwei Platten, von denen die untere ruht und die obere sich mit der Geschwindigkeit  $u_0$  bewegt.

Um diese Bewegung aufrecht zu erhalten, ist eine Kraft  $F_x$  erforderlich, die auf das Fluid als Scherspannung

$$\tau = \tau_{xz} = \frac{F_x}{A_z}$$

<sup>1</sup>In der Hydromechanik spielt die Rheologie keine große Rolle, da die molekulare Viskosität des Wassers durch turbulente Effekte überdeckt wird. Die Beschreibung der chaotischen Geschwindigkeitsschwankungen durch Turbulenzmodellierung nimmt hier also die Rolle ein, die die Rheologie bei zähfließenden Fluiden inne hat.

Bei den zähfließenden Fluiden werden die Mechanismen, wie ein Stoff eigentlich fließt, nicht mehr durch turbulente Effekte überlagert. Man muss sich daher auch mit der inneren Struktur eines Fluids beschäftigen. Und damit kommen mikromechanische, elektrochemische oder sogar biologische Eigenschaften mit ins Spiel.

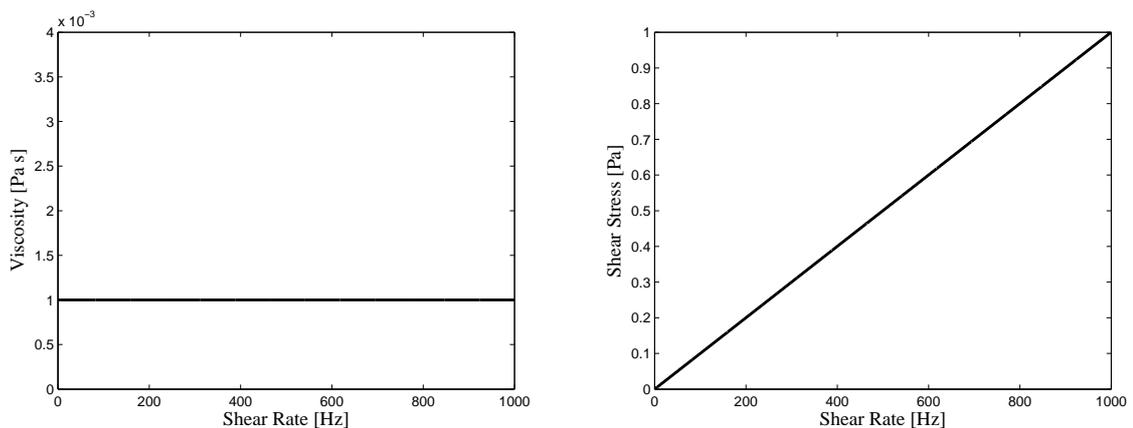


Abbildung 2.2: Viskositäts- und Fließkurve Newtonscher Fluide für  $\mu = 0.001 \text{ Pa s}$ .

wirkt.

Werden die Versuchsbedingungen so eingestellt, dass sich zwischen den zwei Platten eine laminare Strömung einstellt, dann steigt die Fließgeschwindigkeit zwischen der unteren und der oberen Platte linear an und man definiert den Quotienten

$$\dot{\gamma} = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{u_0}{h}$$

als Scherrate.

Das Ergebnis dieses Versuchs läßt sich durch die graphische Auftragung der Scherspannung über die Scherrate darstellen, man bezeichnet die sich ergebende Funktion als **Fließkurve**.

Da die Schubspannung immer aber mit der Scherrate steigen sollte, ist auch der Quotient dieser beiden Größen interessant. Man bezeichnet ihn als scheinbare dynamische Viskosität<sup>2</sup>

$$\mu = \frac{\tau}{\dot{\gamma}}$$

und die sich ergebende Auftragung dieser Größe über die Scherrate als **Viskositätskurve**.

Die Viskosität ist also ein Maß dafür, welche Spannung bzw. welcher Impulsfluss erforderlich ist, um eine Scherströmung aufrecht zu erhalten. Sie hängt natürlich von vielen Parametern, wie dem Fluid und dessen Inhaltsstoffen oder der Temperatur ab.

### 2.1.1 Newtonsche Fluide

Ist die Viskosität nicht von der Deformations- oder Scherrate abhängig, dann spricht man von einem Newtonschen Fluid. Das wichtigste Newtonsche Fluid ist Wasser. Es hat eine Viskosität von  $\mu = 0.001 \text{ Pa s}$  bei Zimmertemperatur.

<sup>2</sup>In der Literatur taucht manchmal auch der Begriff 'wahre Viskosität' auf. Sie ist als  $\mu = \frac{d\tau}{d\dot{\gamma}}$  definiert und beschreibt die Zunahme der Scherspannung mit der Scherrate.

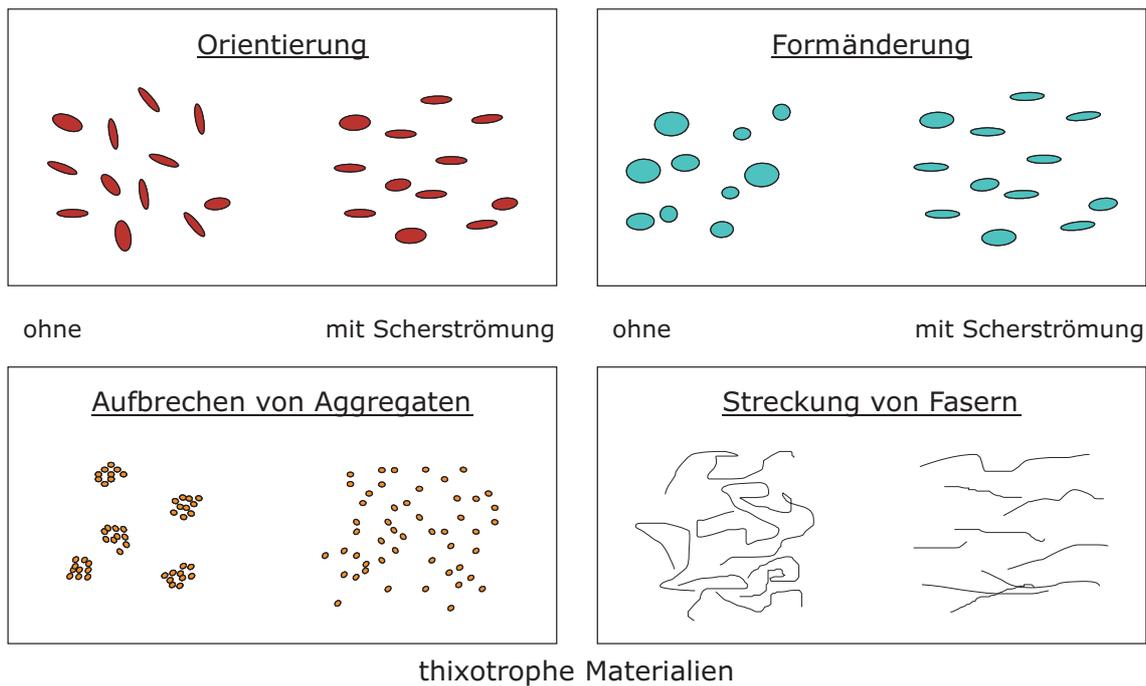


Abbildung 2.3: Ursachen von Strukturviskosität.

In der Fließkurve eines Newtonschen Fluids steigt die erforderliche Scherspannung linear mit der Scherrate (Abbildung 2.2). Noch langweiliger ist die Viskositätskurve, denn sie ist für alle Scherraten eine Konstante.

Die Konstanz der Viskosität bezieht sich allerdings nur auf die Abhängigkeit von der Scherrate. Selbstverständlich ist auch die Viskosität Newtonscher Fluide z.B. von der Temperatur abhängig.

### 2.1.2 Strukturviskosität

Schon in den frühen Arbeiten zur Rheologie wurde beobachtet, dass sich die Viskosität mit zunehmender Scherspannung reduzierte. Diesen Effekt bezeichnet man als Strukturviskosität oder scherverdünnendes Verhalten, da sich die strukturellen Eigenschaften des Inhaltsstoffes mit den wirkenden Scherspannungen ändern. Die Abbildung 2.3 erläutert, was man dabei unter strukturellen Eigenschaften zu verstehen hat. Sie zeigt die vier wichtigsten Ursachen von strukturviskosem Verhalten auf, die im folgenden vorgestellt werden sollen.

In einer granularen Suspension nicht-sphärischer Partikel ist der Strömungswiderstand des Einzelpartikels umso größer, je größer die Angriffsfläche des Partikels ist. Nicht-sphärische Partikeln ordnen sich in einer Scherströmung so, dass die längste Achse sich parallel zur Geschwindigkeit orientiert. In diesem Fall ist auch die Angriffsfläche und damit auch der Strömungswiderstand am kleinsten. Durch die Ausrichtung nicht-sphärischer Partikel im Geschwindigkeitsfeld reduziert sich also die scheinbare Viskosität des Fluids.

Derselbe Effekt kann natürlich bei Gasblasen auftreten, auch wenn diese im unbelasteten Zu-

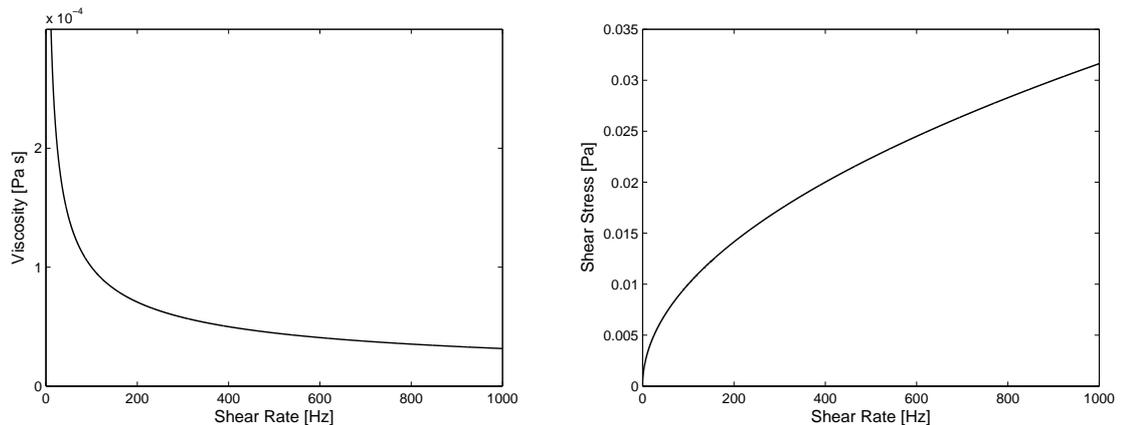


Abbildung 2.4: Viskositäts- und Fließkurve nach dem Gesetz von Ostwald-de-Waele für  $K = 0.001 \text{ (Pa s)}^2$  und  $n = 0.5$ . In einer doppelt-logarithmischen Darstellung würden sich beiden Kurven zu Geraden verformen. Ein solches strukturviskoses Verhalten ist also nur mit linearen Achsen sofort erkennbar.

stand sphärisch sind.

Sind in einem Fluid fadenartige Strukturen biologischen Ursprungs eingebunden, so werden diese in einer Scherströmung auseinandergezogen und ausgerichtet. Auch hierdurch wird die scheinbare Viskosität des Fluids erniedrigt.

Aggregate aus kleineren Partikeln und Flocken halten nur einer gewissen Scherspannung stand, bevor sie zerbrechen. Da die vielen kleineren Partikel einen geringeren Strömungswiderstand als die großen Aggregate, wird so auch die Viskosität verringert.

### Das Gesetz von Ostwald-de-Waele

Das rheologische Verhalten von strukturviskosen Fluiden wird im einfachsten Fall durch das Gesetz von Ostwald-de-Waele beschrieben, welches

$$\tau = K \dot{\gamma}^n$$

lautet. Die Abnahme der Viskosität wird darin durch eine gebrochene Potenz kleiner als Eins modelliert. Dieses Gesetz ist allerdings deshalb physikalisch nicht sinnvoll, da die scheinbare Viskosität

$$\mu = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} = K \dot{\gamma}^{n-1}$$

mit zunehmender Scherrate gegen Null geht, man dann also immer weniger Energie aufwenden muss, um das Fluid weiter zu scheren.

Das Gesetz befriedigt zudem deshalb nicht, weil die Dimension des Parameters  $K$  von der Potenz  $n$  abhängt.

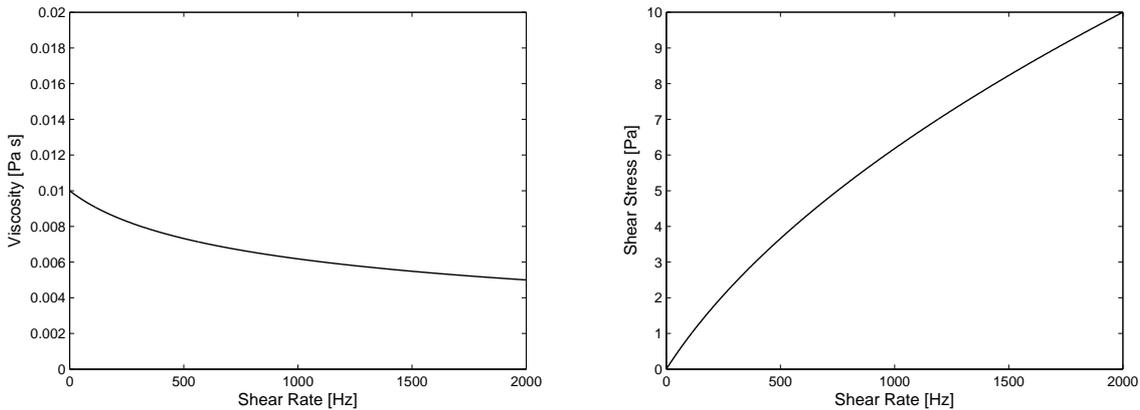


Abbildung 2.5: Viskositäts- und Fließkurve nach dem Gesetz von Ellis scher Fluide für  $\mu_0 = 0.01 \text{ Pa s}$ ,  $b = 10 \text{ Hz}/(\text{Pa s})^2$ ,  $p = 2$ .

### Das Gesetz von Ellis

Ein ähnliches Verhalten zeigt auch das Gesetz von Ellis, welches allerdings implizit ist. Es lautet:

$$\dot{\gamma} = \frac{\tau}{\mu_0} + b\tau^p$$

Auch hier nimmt die Viskosität bei großen Scherraten beliebig kleine Werte an, womit das Gesetz nicht über den gesamten Scherratenbereich anwendbar ist. Der Parameter  $p$  muss dabei größer als eins sein. Zudem hängt die Einheit des Parameters  $b$  wieder von der Potenz  $p$  ab.

### Ostwald-de-Waele oder Ellis ?

Ob sich ein scherverdünnendes Fluid nach Ellis oder Ostwald-de-Waele verhält, ist in der doppelt-logarithmischen Darstellung der Viskositätskurve zu erkennen. Hier ist die Ostwald-de-Waele-Viskosität eine Gerade, während die von Ellis zunächst horizontal verläuft und erst bei großen Scherraten abknickt. Das Gesetz von Ostwald-de-Waele beschreibt also eine fortwährende Scherverdünnung des Fluids, die schon bei kleinen Scherraten einsetzt. Anwendung findet es z. B. bei der Beschreibung der Scherverdünnung durch die Ausrichtung von nicht-sphärischen Partikeln im Geschwindigkeitsfeld.

Beim Gesetz von Ellis setzt die Scherverdünnung merklich erst bei großen Scherraten ein. Hier scheint also eine Mindestenergie erforderlich zu sein, um etwa Strukturen zu zerbrechen oder Fäden auszurichten. Daher findet es vor allem zur Beschreibung des Fließverhaltens von Polymeren bei niederen Scherraten Gebrauch.

### 2.1.3 Shear Thickening

Der zur Strukturviskosität gegenteilige Effekt bezeichnet man als Shear Thickening, d.h. die Zunahme der Viskosität mit zunehmender Scherrate. Shear Thickening setzt ab einer gewis-

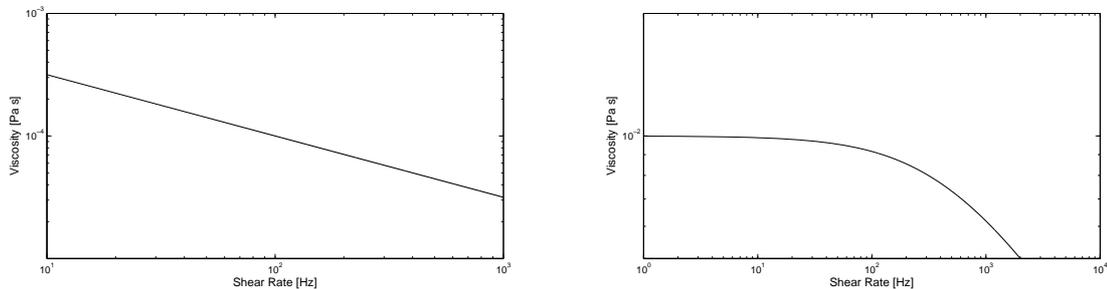


Abbildung 2.6: Die Gesetze von Ostwald-de-Waele (links) und Ellis (rechts) zeigen in der doppelt-logarithmischen Darstellung ein sehr unterschiedliches Verhalten.

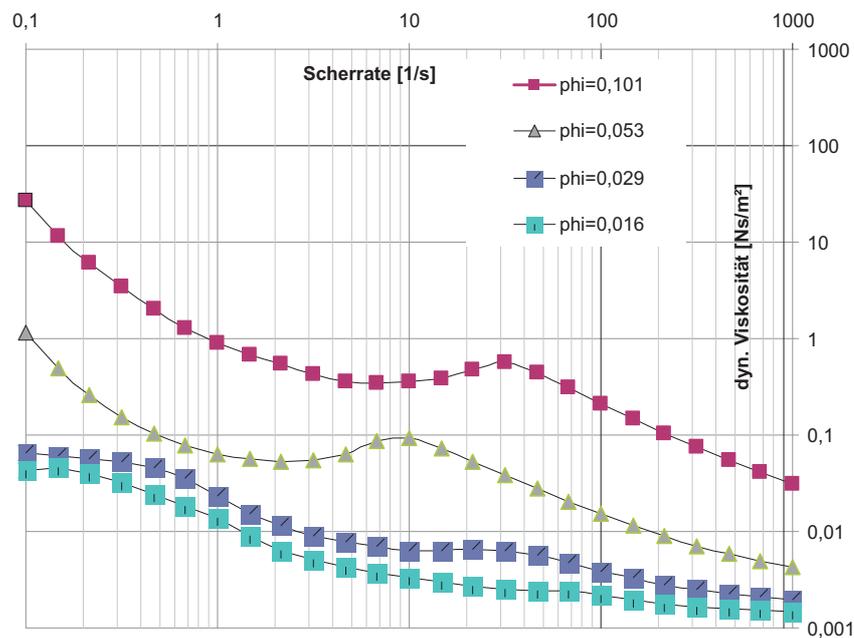


Abbildung 2.7: Die Viskosität eines Weserschlicks für verschiedene Feststoffgehalte in Abhängigkeit von der Scherrate. Mit Zunahme der Scherrate nimmt die Viskosität durch Strukturviskosität zunächst ab, dann durch Shear Thickening zu, um schließlich bei sehr hohen Scherraten wieder abzunehmen.

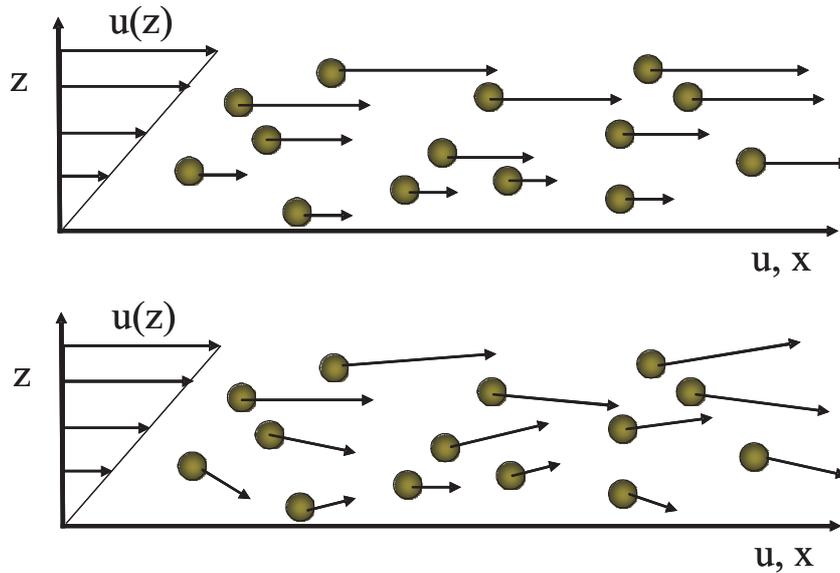


Abbildung 2.8: In einer granularen Suspension ohne Shear Thickening bewegen sich die Partikel laminar in Richtung der Hauptströmung. Ist die Turbulenz im Trägerfluid zwischen den Partikeln hinreichend groß, so beginnen auch diese sich senkrecht zur Hauptströmungsrichtung fluktuierend zu bewegen, wodurch der Impulsaustausch und damit die Viskosität erhöht wird.

sen kritischen Scherrate  $\dot{\gamma}_{crit}$  ein. Diese nimmt nach Barnes [2] mit abnehmenden Partikeldurchmesser zu. Um so größer der Feststoffgehalt in der Suspension, desto früher setzt Shear Thickening ein.

Als Ursache des Shear Thickenings wird in der Regel das Einsetzen der Turbulenz zwischen den Partikeln angesehen. Diese führt dazu, dass auch die Partikel, die bei kleinen Scherraten den mittleren Geschwindigkeiten folgen, sich also in einer Geschwindigkeitslamelle bewegen, nun auch fluktuierende Geschwindigkeitsanteile senkrecht zur Hauptströmung bekommen. Hierdurch erhöht sich der Impulsaustausch in Richtung des Geschwindigkeitsgradienten und damit die Viskosität.

### Das Gesetz von Sisko

beschreibt das Shear Thickening, wobei die Viskosität gegen einen Wert  $\mu_\infty$  konvergiert. Es hat die gleiche Form wie das Gesetz von Ellis,

$$\dot{\gamma} = \frac{\tau}{\mu_\infty} + b\tau^p$$

bloß dass der Parameter  $p$  kleiner eins ist.

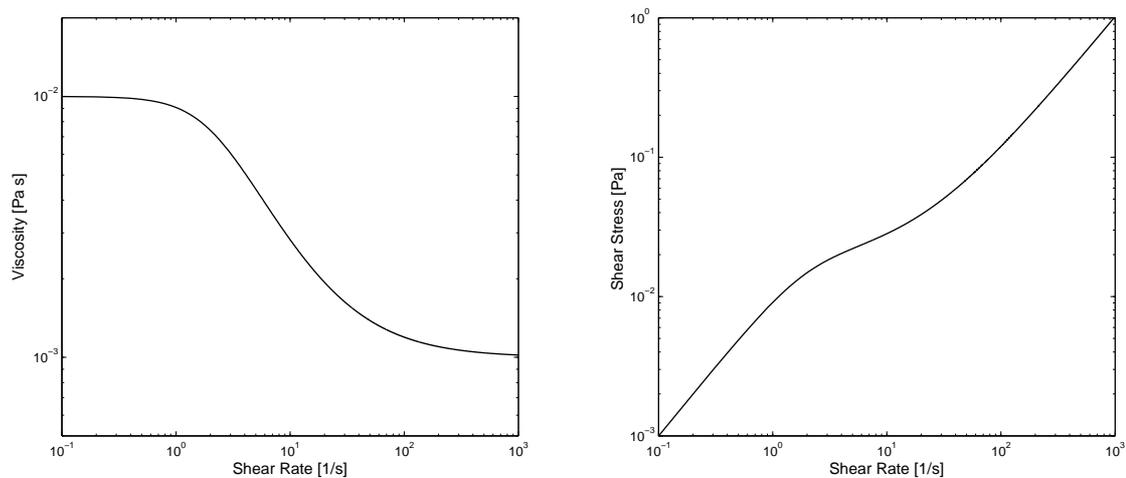


Abbildung 2.9: Viskositäts- und Fließkurve nach dem Gesetz von Carreau für  $\mu_0 = 0.01$  Pa s,  $\mu_\infty = 0.001$  Pa s,  $a = 0.5$  s,  $p = 0.49$ .

### 2.1.4 Der Übergang zwischen zwei Viskositäten

In der Realität sollte die scheinbare Viskosität bei großen Scherraten einen Endwert annehmen, wenn sich alle Partikel im Strömungsfeld ausgerichtet haben. Daher gibt es einige rheologische Modellgesetze, die einen Übergang von einer Anfangsviskosität  $\mu_0$  bei kleinen Scherraten zu einer Endviskosität  $\mu_\infty$  bei sehr großen Scherraten darstellen.

#### Das Gesetz von Carreau

lautet:

$$\mu = \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{(1 + (a\dot{\gamma})^2)^p} + \mu_\infty$$

Darin ist  $a$  die Carreau-Konstante und  $p$  der Carreau-Exponent.

#### Das Gesetz von Carreau-Gahleitner

verallgemeinert das Quadrat im Gesetz von Carreau in der Form:

$$\mu = \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{(1 + (a\dot{\gamma})^b)^p} + \mu_\infty$$

Als weitere rheologische Modellgesetze zum Übergang zwischen zwei Viskositäten sind die von Carreau-Yasuda, Cross, Phillips-Deutsch und Vinogradov-Malkin zu nennen.

Ein Spezialfall ist die Annahme einer unendlich hohen Anfangsviskosität, so wie sie die Modellgesetze von Blau und Quemada annehmen.

### 2.1.5 Andere Modellgesetze zur Strukturviskosität

- Eyring-Prandtl-Ree  $\dot{\gamma} = a \sinh\left(\frac{\tau}{b}\right)$
- Steiger-Ory  $\dot{\gamma} = a\tau + b\tau^3$

## 2.2 Die Fließgrenze

Belastet man einen Festkörper wie im Couetteversuch durch eine Scherspannung, so verformt er sich elastisch und verbleibt dann in dieser neuen Position. Erhöht man die Scherspannung zunehmend, dann wird eine Grenze erreicht, ab der der Stoff sich irreversibel verformt. Dabei können verschiedene Verhaltensfälle auftreten: Bei einer plastischen Verformung zerbricht der Körper an irgendwelchen Bruchkanten, die sich dann so verkeilen, dass er der Belastung nun widerstehen kann. In anderen Fällen werden Teile von der Oberfläche des Körpers abgelöst, die durch die Scherspannung forttransportiert werden. Man spricht in diesem Fall von Erosion oder Abrasion. Beim Fließen stellt sich ein Bewegungsbild wie in Abbildung 2.1 ein, d. h. alle Bereiche des Körpers beginnen sich untereinander gleichmäßig zu verformen.

In der Rheologie betrachtet man nur dieses Verhalten, wobei die Fließgrenze mit  $\tau_y$  (y für engl. yield stress) bezeichnet wird. Sie kann prinzipiell in jedes explizite rheologische Gesetz der Form  $\tau = f(\dot{\gamma})$  durch

$$\tau = \tau_y + f(\dot{\gamma})$$

eingebbracht werden. Wir wollen einige spezielle Gesetze hervorheben.

### 2.2.1 Bingham'sche Fluide

Im Gesetz von Bingham (1922) wird ein Stoff nach dem Überschreiten der Fließgrenze zu einem Newtonschen Fluid. Die inneren Spannungen in einem Bingham'schen Fluid berechnen sich also nach:

$$\tau = \mu_B \dot{\gamma} + \tau_y$$

Unterhalb des Scherungsmoduls  $\tau_y$  ist ein Bingham'sches Fluid kein Fluid, sondern verhält sich wie ein elastischer Festkörper, der auf die äußeren Belastungen mit reversiblen Verformungen reagiert. Die Viskosität eines elastischen Körpers kann dabei als mit dem Wert Unendlich belegt gedacht werden, da eine Spannungsbelastung in diesem Fall mit einer verschwindenden Deformationsrate verbunden ist.

Das Scherungsmodul ist sicherlich eine Funktion der Feststoffkonzentration im Fluid. Bingham nahm dabei eine lineare Beziehung zwischen Konzentration und Scherungsmodul an, er hat ein solches Verhalten für Mischungen von Lithoponen in Leinöl bei Konzentrationen über 50 % gemessen.

Das Bingham'sche Modell ist heute sehr kritisch zu betrachten und sollte auch nicht verwendet werden, obwohl es ein historischer Meilenstein der Rheologie ist. Das größte Problem besteht

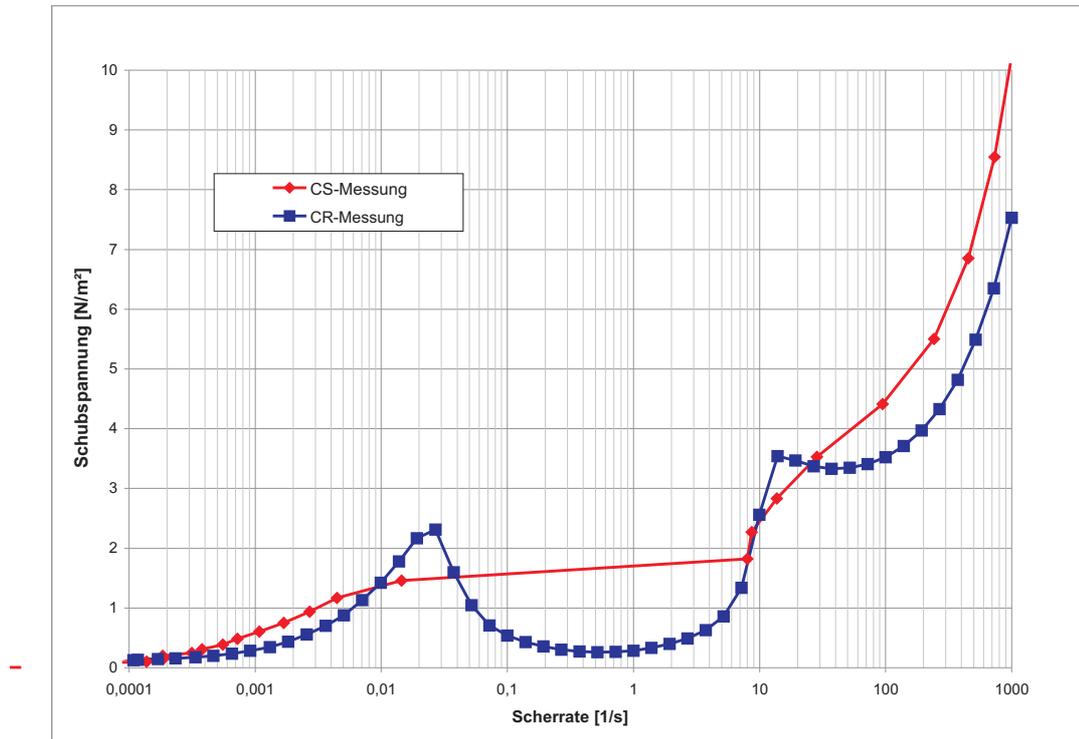


Abbildung 2.10: Vergleich der Scherspannungsergebnisse für das CSS- und das CSR-Messprinzip.

in der Unstetigkeit des prognostizierten Verhaltens eines Stoffes, der bei Belastungen unterhalb des Scherungsmoduls sich wie ein Festkörper verhält und dann beim Erreichen dieses Grenzwerts sehr abrupt zu einem Fluid wird.

### Bestimmung des Scherungsmoduls

Das Scherungsmodul ist experimentell schwierig zu bestimmen, da es laut Definition die Scherspannung bei gegen Null gehender Scherrate bedeutet. Daher hängen die Ergebnisse oft von der Art der rheologischen Messung ab [14].

Grundsätzlich wird in einem Rheometer der Zusammenhang zwischen Scherspannung und Scherrate gemessen. Dabei ist es hier aber entscheidend, ob man die Scherspannung als Funktion der Scherrate oder umgekehrt misst. Im ersten Fall spricht man von einem **CSR-Rheometer** (CSR - Controlled Shear Rate). Hier wird eine Scherrate eingestellt und die dazu erforderliche Scherspannung gemessen. Dieses Prinzip ist aber für Bingham'sche Fluide ungeeignet, da man hier die für eine Bewegung erforderliche Scherspannung ja erst bestimmen will.

Bei einem **CSS-Rheometer** (CSS - Controlled Shear Stress) wird eine Scherspannung eingestellt und die dadurch produzierte Scherrate bestimmt. Nur bei diesem Messprinzip stellt sich bei Scherspannungen unterhalb des Scherungsmoduls keine Scherung d.h. Rotation ein.

Bei den indirekten Methoden werden die rheometrischen Daten zur Scherrate Null extrapoliert. Ein besseres Verfahren besteht darin, die Gültigkeit eines rheologischen Modellgesetzes

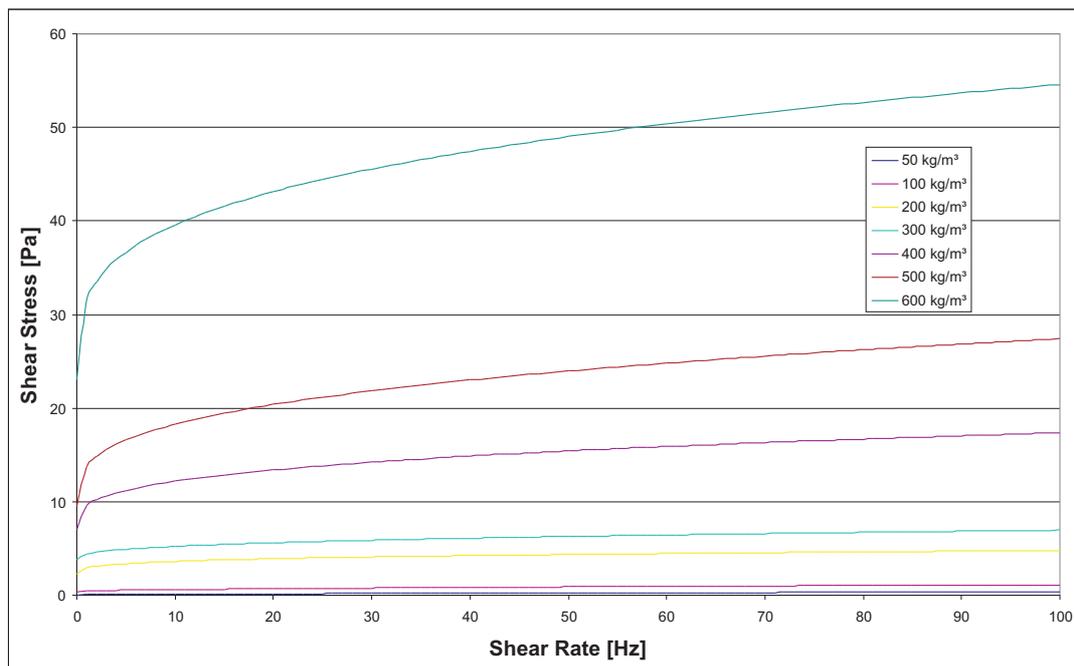


Abbildung 2.11: Die rheologischen Eigenschaften von 'Westwald Clay' in Abhängigkeit von der Feststoffkonzentration als Herschel-Bulkley-Funktionen (aus: de Wit, 2005 [5]).

anzunehmen und das Scherungsmodul dann durch Curve Fitting zu bestimmen. In einigen Experimenten bekommt man auch eine direkte Messung des Scherungsmoduls.

### 2.2.2 Das Herschel-Bulkley-Modell (1926)

W.H. Herschel und R. Bulkley haben vier Jahre später in einem Aufsatz die Konsistenz einer Lösung von Gummi in Benzol untersucht. Verwendet haben sie dabei die Kapillarröhrenmethode zur Messung der Viskosität. Hier wird das Fluid über einen Trichter durch eine Kapillare gegossen. Gemessen wird dabei die Ausflusszeit in Abhängigkeit von der Füllhöhe über dem Trichter. Hieraus wird dann mit dem Hagen-Poiseuilleschen Gesetz die Viskosität bestimmt. Das Herschel-Bulkley-Modell [8] geht wie das Bingham'sche Modell von einer Schwelle für die Schubspannung aus, ab der sich das Fluid zu bewegen beginnt. Danach steigt die erforderliche Schubspannung allerdings nicht linear sondern gebrochen rational mit der Deformationsrate:

$$\tau = \tau_y + q\dot{\gamma}^\alpha$$

Für den Zusammenhang zwischen der Gummikonzentration im Lösungsmittel Benzol und dem Schermodul bekommen die Autoren nichtlinearen, eher quadratischen Zusammenhang heraus.

Definiert man die Viskosität ganz allgemein als Ableitung der Scherspannung nach der Deformationsrate, dann wird diese mit zunehmender Deformationsrate immer kleiner. Um diese

von der konstanten Viskosität der Newtonschen Fluide zu unterscheiden, spricht man hier auch von scheinbarer Viskosität.

P.J. de Wit hat die Koeffizienten des Herschel-Bulkley-Modells in Abhängigkeit von der Feststoffkonzentration für verschiedene Schlicke mit einem Viskosimeter gemessen (Abbildung 2.11). Es zeigt sich grundsätzlich eine Zunahme der kritischen Schubspannung, eine Zunahme des Vorfaktors  $q$  und eine Abnahme der Potenz  $\alpha$  mit der Feststoffkonzentration.

### 2.2.3 Das Casson-Modell (1959)

Ein anderes nützliches Modell ist das von Casson:

$$\sqrt{\tau} = \sqrt{\tau_y} + \sqrt{\mu_C \dot{\gamma}}$$

Im Gegensatz lassen sich die Parameter recht einfach graphisch bestimmen, wenn man die Quadratwurzel der Scherspannung gegen die Quadratwurzel der Scherrate aufträgt.

Das bekannteste Fluid, welches dem Casson-Modell zu folgen scheint, ist Blut.

## 2.3 Thixotropie

Als Thixotropie bezeichnet man eine Hysterese in der rheologischen Kurve eines Fluids. Diese ist folgendermaßen zu erklären. Bei zunehmender Schubspannung müssen jeweils innere Bindungen gebrochen werden, um einen neuen Scherzustand aufrecht zu erhalten. Wird die Scherrate dann reduziert, so ist zur Aufrechterhaltung dieses Zustandes nun eine geringere Schubspannung erforderlich, da viele Bindungen schon gebrochen sind.

Es erfordert dann eine gewisse Zeit als auch eine Freiheit von Scherbelastung, daß die strukturellen Bindungen wiederhergestellt werden.

### 2.3.1 Das Moore-Modell (1956)

Eine Erweiterung des Bingham'schen rheologischen Modells ist das Moore-Modell. Es nimmt eine Abhängigkeit der kritischen Schubspannung und der Viskosität von der inneren Struktur des Fluids an. Dabei wird davon ausgegangen, daß sowohl die Viskosität als auch die kritische Spannung gemeinsam mit zunehmender Festigkeit wachsen oder mit abnehmender Festigkeit fallen.

Sei  $\lambda_S \in [0, 1]$  der Anteil der Partikelpaare, die einer stabilen Bindung lagern, d.h. sich in der Mulde des elektrochemischen Wechselwirkungspotentials befinden. Der sogenannte Strukturparameter  $\lambda_S$  ist somit eins, wenn alle Partikel stabil gebunden sind, die Suspension ist somit vollständig geliert. Für  $\lambda_S = 0$  haben sich im Fluid keine Kornaggregate wie Flocken gebildet. Moore und Davies nehmen nun an, daß sich sowohl das Schermodul als auch die Viskosität als lineare Interpolation des Strukturparameters in der Form

$$\tau = (\tau_y + \lambda_S \tau'_y) + (\mu_\infty + \lambda_S \mu') \dot{\gamma}$$

darstellen lassen.

### 2.3.2 Das Worrall-Tuliani-Modell (1964)

W.E. Worrall und S. Tuliani [19] entwickelten das Modell von Moore und Davis so weiter, dass sie der Änderung einer Struktur dargestellt durch den Parameter  $\lambda_S$  auch eine gewisse Zeit zusprachen. Ähnlich wie im Moore-Modell nehmen sie an, dass man die Schubspannung aus drei Anteilen bestimmen muss:

$$\tau = \tau_y + \mu_0 \dot{\gamma} + \Delta\mu \dot{\gamma} \lambda_S$$

Somit hat die Viskosität den Wert  $\mu_0$ , wenn alle inneren Strukturen gebrochen sind und den Wert  $\mu_0 + \Delta\mu$ , wenn alle inneren Bindungen aufgebaut sind.

Für die zeitliche Änderungen des Strukturanteils nehmen sie nun eine dynamische Gleichung der Form

$$\frac{d\lambda_S}{dt} = b_{floc}(1 - \lambda_S) - a_{break} \dot{\gamma} \lambda_S$$

an. Darin stellt der erste Term auf der rechten Seite das Wachstum von Bindungen, der zweite Term die Zerstörung durch die Scherrate dar. Diese gewöhnliche Differentialgleichung hat die allgemeine Lösung:

$$\lambda_S(t) = \frac{b_{floc}}{a_{break} \dot{\gamma} + b_{floc}} - \left( \frac{b_{floc}}{a_{break} \dot{\gamma} + b_{floc}} - \lambda_{S,0} \right) e^{-(a_{break} \dot{\gamma} + b_{floc})t}$$

Somit ist die Gleichgewichtsrate von Bindungen bei einer gegebenen Scherrate

$$\frac{d\lambda_S}{dt} = 0 \Rightarrow \lambda_S = \frac{b_{floc}}{a_{break} \dot{\gamma} + b_{floc}}$$

Erhöht man die Scherrate in einer rheologischen Messung nur hinreichend langsam, so dass der Anteil der inneren Bindungen immer im Gleichgewicht mit der Scherrate ist, dann ergibt sich für die erforderliche Scherspannung:

$$\tau = \tau_y + \mu_0 \dot{\gamma} + \frac{\Delta\mu b_{floc} \dot{\gamma}}{a_{break} \dot{\gamma} + b_{floc}}$$

Das Worrall-Tuliani-Modell beschreibt die rheologischen Eigenschaften eines Fluids durch insgesamt vier Parameter. Es nimmt einen starken linearen Anstieg der erforderlichen Schubspannung bei kleinen Deformationsraten und einen geringeren, aber linearen Anstieg bei größeren Deformationsraten an. Zwischen diesen beiden Bereichen der Deformationsrate findet ein nichtlinearer Übergang statt (siehe Abbildung 2.12).

Worrall und Tuliani entwickelten ihr Modell für Tonsuspensionen in der Keramikindustrie. Sie bekamen für das Verhältnis der Parameter:

$$\frac{b_{floc}}{a_{break}} \simeq 25 \dots 80 \text{ Hz.}$$

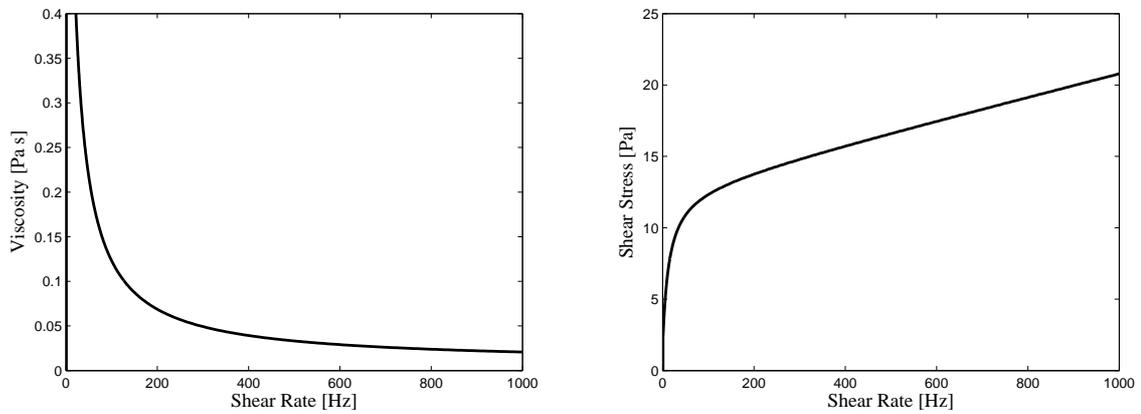


Abbildung 2.12: Viskositäts- und Fließkurve nach dem Gesetz von Worrall-Tuliani. Die Scher-rate wird so langsam erhöht, dass der Strukturparameter sich im Gleichgewicht befindet.

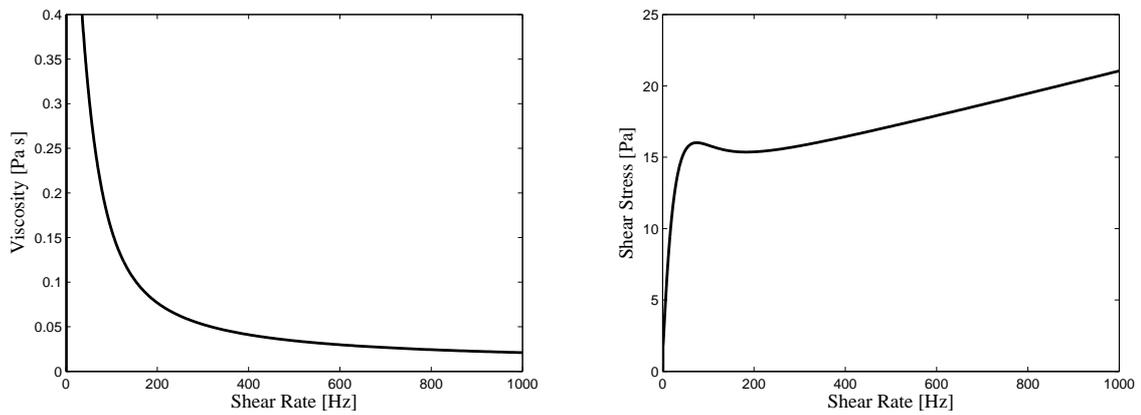


Abbildung 2.13: Viskositäts- und Fließkurve nach dem Gesetz von Worrall-Tuliani. Die Scher-rate wird so schnell erhöht, dass der Strukturparameter sich nicht mehr im Gleichgewicht befindet.

## 2.4 Rheometrische Messungen

Der Couetteversuch stellt das Messprinzip, durch welches die Viskosität definiert ist, anschaulich dar. Zur exakten Bestimmung der Viskosität eignet er sich wegen der unregelmäßigen Geometrie allerdings nicht. Lange Zeit wurde die Viskosität mit Kapillarrheometer bestimmt. Hier fließt die Testflüssigkeit aus einem Behälter durch ein Röhrchen aus. Gemessen wird dann die Zunahme der Flüssigkeit im Auffangbehälter mit der Zeit.

Beim Das Couette-Viskosimeter ist die Testflüssigkeit zwischen zwei konzentrischen Zylindern angebracht. Bei den meisten Anordnungen rotiert dabei der innere gegen den äußeren Zylinder und man misst das erforderliche Drehmoment, um die Rotation aufrecht zu erhalten. Im folgenden sollen die heutigen Rotationsviskosimeter genauer beschrieben werden. Eine kritische Analyse der Beschränkungen der verschiedenen Messverfahren gibt [14].

### 2.4.1 Platte-Platte-Rotationsviskosimeter

Das Problem des Couette-Vesuchs besteht also darin, dass einen der Scherspannung ausgelieferten Bereich und einen freien Bereich gibt. Dies kann verhindert werden, wenn man das Messprinzip von einer Translation auf eine Rotation bzw. Torsion überträgt. Ein solches Torsionsviskosimeter ist in Abbildung 2.14 dargestellt.

Durch die Rotation der oberen kreisförmigen Platten bildet sich dort ein Geschwindigkeitsfeld aus, welches dem der Abbildung 2.15 entspricht. Hier ist es allerdings vorteilhaft die Anordnung in Polarkoordinaten zu beschreiben. Darin werde mit  $u_r$  die Radialgeschwindigkeit bezeichnet, von der angenommen werden kann, dass sie Null ist.  $u_\theta$  bezeichne die Umlaufgeschwindigkeit. Sie ist an der unteren, ruhenden Platte Null und steigt zur oberen Platte auf deren Rotationsgeschwindigkeit an:

$$u_\theta(r, \theta, z) = \omega r \frac{z}{h}$$

Hier ist  $h$  der Abstand zwischen der oberen und der unteren Platte. Somit bildet sich eine Scherung in Umlaufrichtung aus, deren Scherrate mit

$$\dot{\gamma}(r) = \frac{\omega r}{h}$$

vom Mittelpunktsabstand  $r$  abhängig ist. Nach der Definition der Viskosität ist damit die Scherspannung

$$\tau_{z\theta} = \mu \dot{\gamma} = \mu \frac{\omega r}{h}$$

verbunden. Darin muss die Viskosität allerdings keine Konstante sein, sondern kann selbst von der Scherrate abhängen.

Diese Scherspannung wird durch das Drehmoment  $M$  des Antriebs überwunden. Die mit diesem Moment verbundene Kraft ergibt sich durch Integration der Scherspannung  $\tau_{z\theta}$  über die Kreisfläche:

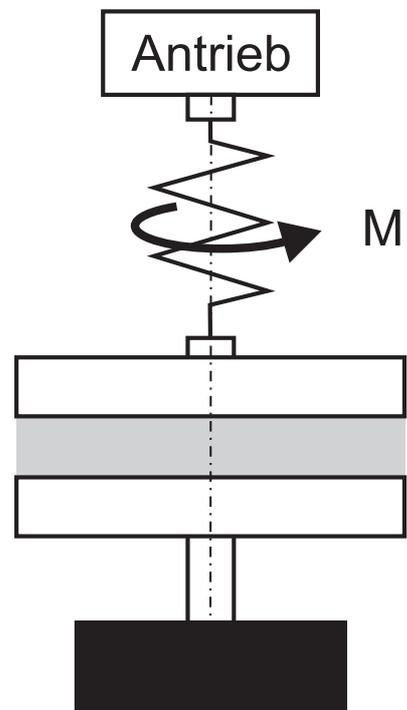


Abbildung 2.14: Ansicht des MCR 51-Rheometers der Firma Anton Paar. Beim Platte-Platte-Rotationsversuch befindet sich die Flüssigkeit zwischen zwei kreisförmigen Scheiben, deren eine sich über der anderen dreht. Angetrieben wird die obere Platte durch das Drehmoment  $M$ , welches die Rotationsgeschwindigkeit  $\omega$  erzeugt.

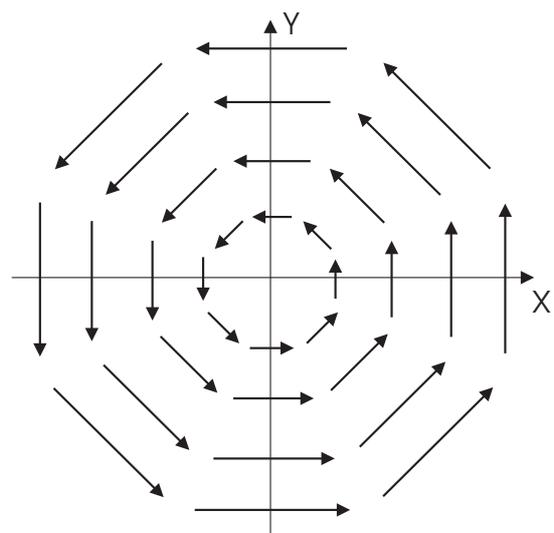


Abbildung 2.15: Kreisförmiges Vektorfeld. Länge und Richtung der einzelnen Vektoren gelten jeweils in ihrer Mitte.

$$M = \int_0^R \int_0^{2\pi} r \tau_{z\theta} 2\pi r d\theta dr = \int_0^R 4\pi^2 r^2 \tau_{z\theta} dr$$

Ist nun die Viskosität über die gesamte Kreisfläche konstant (Newtonsches Fluid) dann folgt:

$$M = \int_0^R 4\pi^2 r^2 \mu \frac{r\omega}{h} dr = \frac{\pi^2 R^4 \mu \omega}{h},$$

womit sich diese als

$$\mu = \frac{Mh}{\pi^2 R^4 \omega}$$

bestimmt.

Im allgemeinen Fall eines nichtnewtonschen Fluids kann man aus dem Verlauf des Drehmoments  $M$  als Funktion der Kreisfrequenz  $\omega$  auf die Viskositätskurve durch eine Integraltransformation schließen.

Natürlich muss man mit dieser Anordnung prüfen, ob die sich einstellende Strömung tatsächlich linear ist. Dazu kann man das Experiment z.B. beim halben Plattenabstand wiederholen und verifizieren, ob man die gleichen Viskositätswerte erhält.

## 2.4.2 Platte-Konus-Rotationsviskosimeter

Die Variabilität der Scherrate bei der Platte-Platte-Anordnung lässt sich ganz einfach beheben, wenn man die obere Platte durch einen Konus mit dem Öffnungswinkel  $\alpha$  ersetzt. Dieser Winkel beträgt etwa  $1^\circ$ , ist also sehr klein. Dann ist der Abstand zur oberen Platte vom Radius abhängig,  $h(r) = r \tan \alpha$ . Die Scherrate ist dann

$$\dot{\gamma} = \frac{\omega}{\tan \alpha}$$

vom Radius unabhängig.

## 2.4.3 Systematische Messfehler in der Rotationsviskosimetrie

In der Praxis darf die Spitze des Konus natürlich mit der unteren Platte in Berührung kommen und auf ihr rotieren. Daher wird die Spitze einfach abgeschnitten, wodurch zwischen der oberen und unteren Platte ein Spalt entsteht. Bei der Rheometrie granularer Suspensionen ist zu beachten, dass der Korndurchmesser wesentlich kleiner als dieser Spaltabstand (max. 1/5 des Spaltabstands) ist, damit diese sich nicht verkanten. Bei einem Spaltabstand von  $50 \mu\text{m}$  sollte das suspendierte Korn kleiner als  $10 \mu\text{m}$  sein.

Ferner sollte die Messzeit für jeden Datenpunkt mindestens bei  $T_{mess} = 1/\dot{\gamma}$  liegen.

Erkennt man in der Fließkurve (und nur dort) eine Abnahme der Scherspannung mit zunehmender Scherrate, so ist zu überprüfen, ob eine Spaltentleerung stattgefunden hat.

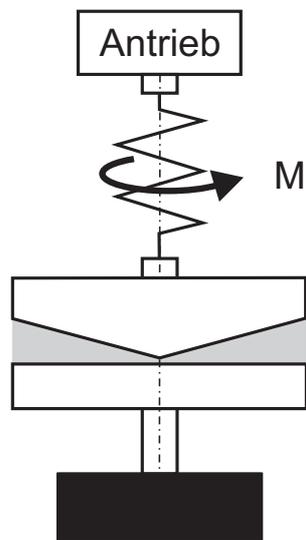


Abbildung 2.16: Platte-Konus-Rheometer.

Versuchsart	Daten	Messtechnische Vorgabe	Ergebnis
Rotation CSR	Rohdaten	Kreisfrequenz $\omega$	Drehmoment $M$
	Rheologische Messgrößen	Scherrate $\dot{\gamma}$	Schubspannung $\tau$
Rotation CSS	Rohdaten	Drehmoment $M$	Kreisfrequenz $\omega$
	Rheologische Messgrößen	Schubspannung $\tau(Pa)$	Scherrate $\dot{\gamma} (s^{-1})$
Oszillation CSD	Rohdaten	Auslenkwinkel $\varphi(t)$ (mrad)	Drehmoment $M(t)$ (mNm), Phasenverschiebungswinkel $\delta(^{\circ})$
	Rheologische Messgrößen	Deformation $\gamma(t)$ (%)	Schubspannung $\tau(t)(Pa)$ , Phasenverschiebungswinkel $\delta(^{\circ})$
Oszillation CSS	Rohdaten	Drehmoment $M(t)$ (mNm)	Auslenkwinkel $\varphi(t)$ (mrad), Phasenverschiebungswinkel $\delta(^{\circ})$
	Rheologische Messgrößen	Schubspannung $\tau(t)(Pa)$	Deformation $\gamma(t)$ (%), Phasenverschiebungswinkel $\delta(^{\circ})$

Tabelle 2.1: Zusammenhang zwischen Versuchsart und messtechnischen und rheologischen Parametern (nach Meyger, 2000)

Versuch	Ergebnis / Auswertung
Fliesskurve CSR (Rotation)	Viskosität $\eta$ (scherratenabhängig)
Fliesskurve CSS (Rotation)	Fliessgrenze $\tau_f$ nach Modellfunktionen
Amplituden-Schub-Test CSS (Oszillation)	viskoelastisches Verhalten ( $G'$ , $G''$ ) Cross-Over Point
Amplitudentest CSD (Oszillation)	linear-viskoelastischer Bereich (LVE-Bereich)
Frequenztest CSD (Oszillation)	viskoelastisches Verhalten ( $G'$ , $G''$ ) (frequenzabhängig)
Thixotropie Oszillation CSD	Thixotropieverhalten (Veränderung von $G'$ )
Thixotropie Oszillation-Rotation-Oszillation CSD / CSR	Thixotropieverhalten (Veränderung von $G'$ )
Zeittest CSD (Oszillation)	Zeitverhalten, hier: zeitliche Veränderung von $G'$ $G'(t=1200s)/G'(t=15s)$

Tabelle 2.2: Rheometerversuche und deren Auswertung

## 2.5 Zusammenfassende Folgerungen

1. In Flüssigschlickern können drei Arten von Strukturviskosität auftreten:

- Orientierung von nichtsphärischen Partikeln
- Ausrichtung von Fasernstrukturen
- Zerbrechen von Flocken

Eine mikroskopische Analyse sollte hier über die Möglichkeit des Auftretens Auskunft geben.

2. Da der Fließgrenze bei Flüssigschlickern eine erhebliche Bedeutung zukommt, sollte in rheometrischen Untersuchungen das CSS-Verfahren angewendet werden.
3. Das Gesetz von Worrall-Tuliani beinhaltet sowohl die Fließgrenze, Strukturviskosität als auch thixotropes Verhalten.
4. Die Steigerung der Scherspannung sollte bei thixotropen Schlickern hinreichend langsam vollzogen werden, damit eventuelle Strukturen sich immer im Gleichgewicht mit der aktuellen Scherrate befinden.

# Kapitel 3

## Die Rheologie granularer Suspensionen

Schlicke bestehen in einer ersten Annäherung aus Wasser und einer granularen festen Phase. Die rheologischen Eigenschaften einer solchen granularen Suspension hängen also von

- der inneren Reibung im Trägerfluid selbst, beschrieben durch dessen Viskosität  $\mu_0$ ,
- dem Strömungswiderstand des Trägerfluids an den suspendierten Partikeln,
- und bei größeren Partikelkonzentrationen der Kontaktreibung zwischen den Partikeln

ab. In diesem Kapitel soll zunächst das Zusammenspiel der verschiedenen Einflussgrößen in einer granularen Suspension auf die Viskosität mittels der Dimensionsanalyse bestimmt werden. Danach soll basierend auf der bahnbrechenden Arbeit von Einstein von der Umströmung eines Einzelpartikels auf die rheologischen Eigenschaften einer Gesamtheit von Partikeln geschlossen werden. Hierauf aufbauend werden die Partikel-Partikel-Interaktionen, Elliptizität und die Paarbildung als mögliche Ursachen der Abweichung von den Einsteinschen Ergebnissen vorgestellt.

### 3.1 Dimensionsanalyse

Die Viskosität einer granularen Suspension hängt von den Materialeigenschaften einerseits der suspendierten Feststoffe und andererseits des Trägerfluids ab. Ferner spielt aber auch der dynamische Zustand des Fluids eine Rolle. Die Materialeigenschaften der suspendierten, als sphärisch angenommenen Partikel werden durch den repräsentativen Korndurchmesser  $d$  und die Korndichte  $\rho_S$  dargestellt; im Fluid seien sie mit der Teilchenzahldichte  $n$  vorhanden. Das Trägerfluid sei newtonsch, es habe die Dichte  $\rho$  und die Viskosität  $\mu$ . Der dynamische Zustand des Systems werde durch die thermische Energie  $kT$ , Scherrate  $\dot{\gamma}$  und die Zeit  $t$  bestimmt:

$$\mu = \mu(d, \rho_S, n, \mu_0, \rho, kT, \dot{\gamma}, t)$$

Würde man jeden Einzelparameter durch 10 Messwerte diskretisieren, diese aber mit jedem anderen Einzelparameter kombinieren, entstünde ein Programm von  $10^8$ , d. h. einhundert-

millionen Messungen. Mit Hilfe von Buckingham's  $\pi$ -Theorem lassen sich die acht Einflussgrößen aber zu  $8 + 1 - 3 = 6$  dimensionslosen Größen zusammenstellen, die die die Verhältnisse der Einflussgrößen untereinander berücksichtigen. Diese sind [17]:

- Die relative Viskosität  $\mu_r = \mu/\mu_0$
- Der auf das Volumen bezogene Feststoffgehalt  $\phi = 1/6\pi d^3 n$
- Die relative Dichte  $\varrho_r = \varrho_S/\varrho$
- Die rheologische Reynoldszahl  $Re_{\dot{\gamma}} = \varrho_0 d^2 \dot{\gamma}/(4\mu_0)$
- Die rheologische Pecletzahl  $Pe_{\dot{\gamma}} = 3/4\pi\mu_0 d^3 \dot{\gamma}/kT$
- Die rheologische Zeit  $t_r = 8tkT/(\mu_0 d^3)$

Damit bleibt die Abhängigkeit

$$\mu_r = \mu_r(\phi, \varrho_r, Re_{\dot{\gamma}}, Pe_{\dot{\gamma}}, t_r)$$

zu untersuchen. Sicherlich wird der Foststoffgehalt  $\phi$  eine wichtige Rolle in der Rheologie granularer Suspensionen spielen. Der Einfluss der vier verbleibenden dimensionslosen Gruppen soll nun diskutiert werden.

### 3.1.1 Der Einfluss der relativen Dichte

In der Literatur geht man zumeist von Suspensionen aus, in denen sich die Partikel weder absetzen noch auftreiben. Die relative Dichte  $\varrho_r$  wird zu eins angenommen und ihr Einfluss nur sehr selten behandelt. Für Schlick liegt die relative Dichte etwa zwischen 2.6 und 2.8, sie schwankt also nicht erheblich. Daher wird auch hier davon ausgegangen, dass sie auf die Variation der Viskosität der granularen Suspension keinen wichtigen Einfluss hat. Es bleibt allerdings zu beachten, dass viele experimentelle und theoretische Untersuchungen unter der Annahme  $\varrho_r = 1$  durchgeführt wurden. Diese sind damit nicht direkt auf Schlickverhältnisse mit  $\varrho_r = 2.65$  zu übertragen.

### 3.1.2 Der Einfluss der rheologischen Pecletzahl

Die rheologische Pecletzahl vergleicht den Einfluss der thermischen Energie mit der Energie der Scherung. Bei sehr niedrigen Pecletzahlen spielen thermische Bewegungen und die Brownsche Molekularbewegung eine große Rolle, man spricht dann von Brownschen Suspensionen. Für einen Schlick ( $d = 63 \mu\text{m}$ , Viskosität des Wassers, Temperatur  $20^\circ\text{C}$ ) liegt die rheologische Pecletzahl bei:

$$Pe_{\dot{\gamma}} = 3/4\pi\mu_0 d^3 \dot{\gamma}/kT = 1.25 \cdot 10^5 s \dot{\gamma} \gg 10^3$$

Hiernach sollte thermische Effekte wie die Brownsche Molekularbewegung keinen Einfluss auf die Rheologie des Schlicks haben. Phasenübergänge des Wassers, wie Eisbildung sind von dieser Betrachtung natürlich ausgenommen. Im folgenden wird die Abhängigkeit von der rheologischen Pecletzahl also ausgeschlossen und nicht weiter untersucht.

### 3.1.3 Der Einfluss der rheologischen Zeit

Für die typischen Parameter des Schlicks liegt die rheologische Zeit bei:

$$t_r = 8tkT/(\mu_0 d^3) \simeq 10^{-3} \text{Hz} \cdot t$$

Dies bedeutet, dass alle, die Rheologie beeinflussenden Prozesse im Bereich der Millisekunde relaxieren. Somit hat die Zeit keinen Einfluss auf Parametrisierung der rheologischen Eigenschaften eines aus Ton- oder Schluffkugeln bestehenden Schlicks.

Tatsächlich sind für Schlicke aber zeitabhängige rheologische Prozesse bekannt, die sich daraus erklären, dass diese sich eben nicht aus harten Kugeln zusammensetzen.

### 3.1.4 Der Einfluss der rheologischen Reynoldszahl

Die rheologische Reynoldszahl

$$Re_{\dot{\gamma}} = \rho_0 d^2 \dot{\gamma} / (4\mu_0)$$

skaliert die Scherrate in der Suspension. Damit ist die Rheologie nicht-newtonsch, wenn die rheologische Reynoldszahl einen Einfluss hat. Nur für sehr kleine Werte dieser Kenngröße ist Fluidodynamik also newtonsch. Der Einfluss der rheologischen Reynoldszahl und damit der Scherrate wird später detailliert untersucht.

Zusammenfassend bleibt die Abhängigkeit

$$\mu_r = \mu_r(\phi, Re_{\dot{\gamma}})$$

zu untersuchen.

## 3.2 Der Einfluss des Feststoffgehalts

Die wichtigste Kenngröße einer granularen Suspension charakterisiert das Verhältnis von Wasser zu gelöstem Feststoff, dargestellt durch den volumetrischen Feststoffanteil  $\phi$ . Seinem Einfluss auf die Rheologie wollen wir uns in diesem Abschnitt widmen.

Wir betrachten eine Couetteströmung in einer Suspension aus sphärischen Partikeln. Man kann nun in einer ersten Näherung annehmen, dass sich die zur Bewegung der Platte erforderliche Kraft aus der viskosen Kraft des Trägerfluids und den Strömungswiderstandskräften an den  $N$  in der Suspension gelösten Partikeln zusammensetzt. Die dabei zu verrichtende Arbeit ist das Produkt aus Widerstandskraft und Geschwindigkeit:

$$W = F_x u_0 = \tau_{xz} A_z u_0 = \mu \frac{\partial u}{\partial z} A_z u_0$$

Die Arbeit, die mit der Überwindung des Strömungswiderstands der Flüssigkeit an den Partikeln verbunden ist, bekommt man aus der Widerstandsformel für Kugeln bei kleinen Reynoldszahlen nach Stokes

$$F_W = 3\pi\mu_0 du_r,$$

wobei  $u_r$  die relative Anströmgeschwindigkeit des Partikels ist.

Ist  $n$  die Partikeldichte pro Volumen  $A_z h$  der Couette-Strömung, dann ist die zur Überwindung des Strömungswiderstandes an allen Partikeln erforderliche Arbeit:

$$W_W = N F_W u_r = n A_z h 3\pi\mu_0 du_r u_r$$

Bleibt zu beantworten, wie groß die Relativgeschwindigkeit des Partikels in der Scherströmung ist. Dazu betrachten wir nochmals die Anströmung eines Partikels durch die lineare Scherströmung in Abbildung 3.1. Da sich das Partikel mit der auf es treffenden mittleren Anströmgeschwindigkeit fortbewegt, ist die Relativgeschwindigkeit von Partikel und Strömung in dessen Zentrum Null, nicht aber an dessen Rändern. Auf der oberen Partikelsphäre wird im Mittel die Relativgeschwindigkeit  $\frac{d}{4} \frac{\partial u}{\partial z}$  vorherrschen, auf der unteren Partikelhälfte  $-\frac{d}{4} \frac{\partial u}{\partial z}$ . Für die energetischen Betrachtungen können wir also eine Relativgeschwindigkeit ansetzen, die sich aus den beiden Beträgen in oberer und unterer Kugelhälfte ergibt:

$$u_r = \frac{d}{2} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{d}{2} \dot{\gamma}$$

In der Gesamtarbeit ist nun noch der viskose Widerstand der Trägerflüssigkeit zu berücksichtigen:

$$W_{ges} = \mu_0 \frac{\partial u}{\partial z} A u_0 + n A h 3\pi\mu_0 d \frac{d^2}{4} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 = \mu_0 \frac{\partial u}{\partial z} A u_0 + n A h 3\pi\mu_0 d \frac{d^2}{4} \frac{\partial u}{\partial z} \frac{u}{h}$$

Im letzten Term wurde der Geschwindigkeitsgradient durch das lineare Geschwindigkeitsprofil ersetzt. Klammert man nun gemeinsame Größen aus, dann bekommt man:

$$W_{ges} = A u_0 \mu_0 \frac{\partial u}{\partial z} \left( 1 + n h 3\pi d \frac{d^2}{4} \frac{1}{h} \right)$$

Ersetzt man die Teilchenzahldichte durch den Feststoffanteil  $\phi = n \frac{\pi}{6} d^3$  ein, so ergibt sich:

$$W_{ges} = A u_0 \mu_0 \frac{\partial u}{\partial z} \left( 1 + \frac{9}{2} \phi \right)$$

bzw. für die Viskosität einer granularen Suspension:

$$\mu = \mu_0 \left( 1 + \frac{9}{2} \phi \right)$$

Die Viskosität der Suspension steigt also linear mit der Konzentration der suspendierten Partikel. Sie ist nach diesem Ergebnis nicht abhängig von der Partikelgröße oder deren Verteilung, der Partikelform oder Art des Dispergierzustands.

Ferner zeigt die Herleitung, dass in der Viskosität granulärer Suspensionen **zeitabhängige Effekte** auftreten dann können, wenn das Geschwindigkeitsfeld des Trägerfluids sehr variabel ist.

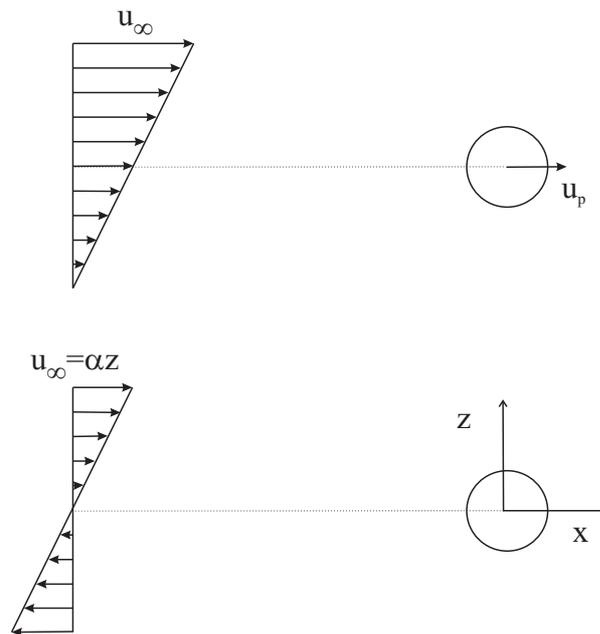


Abbildung 3.1: Ein Partikel in einer Scherströmung bewegt sich mit der mittleren Anströmgeschwindigkeit. Im unteren Bildteil ist die Anströmung in einem Bezugssystem dargestellt, welches sich mit dem Partikel bewegt.

### 3.3 Die Arbeit von A. Einstein (1906)

Der große Nachteil der vorgestellten elementaren mechanistischen Betrachtungsweise ist die Unkenntnis der Relativgeschwindigkeit zwischen Fluid und Partikel und damit die Abschätzung des Strömungswiderstandes am Einzelpartikel. Genau diesen Anteil hat Einstein untersucht, indem er eine reine Scherströmung am Partikel angenommen hat.

#### 3.3.1 Sphärische Partikel in Scherströmung

Betrachten wir nun ein Partikel in einer Scherströmung, welches sich aber mit dem mittleren Geschwindigkeitsfeld fortbewegt. Die Situation ist in Abbildung 3.1 dargestellt.

Das Partikel wird sich mit der mittleren auf es wirkenden Geschwindigkeit fortbewegen, die genau im Mittelpunkt der Kugel angenommen wird. Damit wirkt auf das sich mitbewegende Partikel nur eine reine Scherströmung der allgemeinen Darstellung (mit Summenkonvention):

$$u_{i,\infty}(z) = \alpha_{ik} x_k$$

Setzt man nun den Ursprung des Koordinatensystems in den Mittelpunkt des Partikels, nimmt eine Strömung in  $x$ -Richtung, die in  $z$ -Richtung geschert ist, so wird dieses von einem Geschwindigkeitsfeld

$$u_\infty(z) = \alpha_{xz} z$$

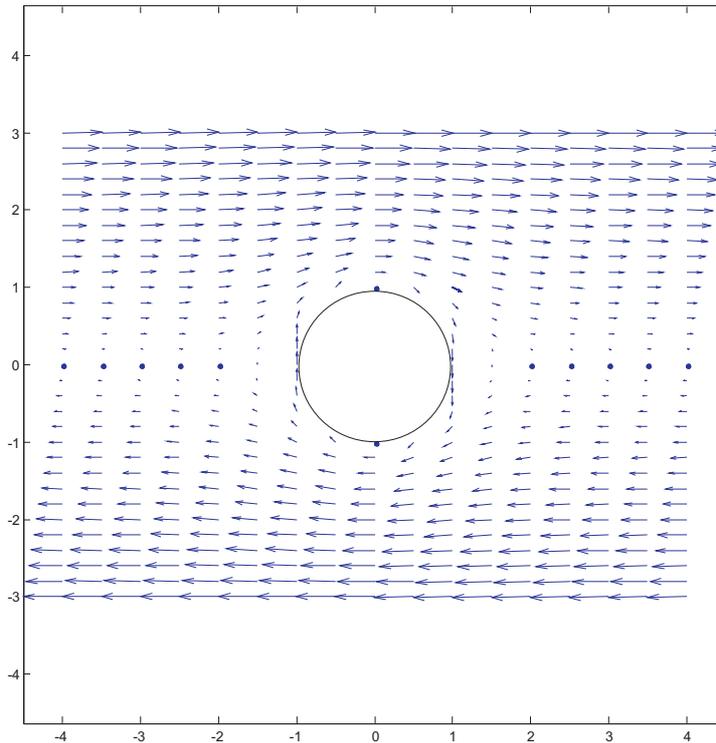


Abbildung 3.2: Umströmung eines Partikel in einer Scherströmung.

angeströmt. Mit dieser Randbedingung hat Einstein [?] (A. Einstein, Eine neue Bestimmung der Moleküldimensionen, 1906) nun die Differentialgleichungen der schleichenden Strömung

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0$$

$$\operatorname{grad} p = \rho\nu \operatorname{div} \operatorname{grad} \vec{u}$$

gelöst. Bei den Impulsgleichungen werden darin die advektiven Terme vernachlässigt, ferner ist die Strömung stationär. Die Lösung dieses Problems lautet in Indexschreibweise:

$$u_i = \alpha_{ik} x_k + \frac{5}{2} \left( \frac{R^5}{r^4} - \frac{R^3}{r^2} \right) \alpha_{kl} n_i n_k n_l - \frac{R^5}{r^4} \alpha_{ik} n_k$$

$$p = p_0 - 5\rho\nu \frac{R^3}{r^3} \alpha_{ik} n_i n_k$$

Darin ist der Ortsvektor  $r = (x, y, z)$  und  $\vec{n}$  der Normaleneinheitsvektor in Richtung des Ortsvektors mit den Komponenten  $n_i = x_i / \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

Die konstruktive Lösung lehnt eng an dem konstruktiven Beweis von Stokes an. Das Geschwindigkeitsfeld wird wieder in einen wirbelfreien  $\phi$  und einen wirbelbehafteten Anteil  $\vec{w}$  zerlegt,  $\vec{u} = \vec{\nabla}\phi + \vec{w}$ . Letzterer soll eine Lösung der Laplacegleichung sein, die für  $r \rightarrow \infty$  gegen die

Ausgangsscherung konvergiert. Wir haben bei Oseen eine solche Lösung schon kennengelernt, sie besteht aus der Ableitung der radialen Abstandsfunktion:

$$w_i = C \frac{\alpha_{ik} x_k}{r^3}$$

Nun bestimmen wir den wirbelfreien Anteil  $\phi$  so, dass die Divergenz des Geschwindigkeitsfelds Null ist:

$$0 = \operatorname{div} \operatorname{grad} \phi + C \frac{\alpha_{kk} r^2 - 3(a_{ik} x_k) x_i}{r^5}$$

1. Wie sieht diese DGL in kartesischen Koordinaten für  $a_{xz} = a$ ,  $a_{ij} = 0$  sonst aus?
2. Mit welcher Testlösung kann man diese DGL dann in eine gewöhnliche überführen?
3. Wie sieht diese Testlösung dann in Indeschreibweise aus?

Auch diese Gleichung wird durch eine Testlösung in eine gewöhnliche Differentialgleichung überführt, die analytisch gelöst werden kann. Die Randbedingungen im Unendlichen und auf der Kugeloberfläche erbringen das gewünschte Resultat.

### 3.3.2 Der Einfluss der Scherrate

Wir haben in diesem Kapitel untersucht, wie ein (im Unendlichen) ungestörtes Geschwindigkeitsfeld, welches durch  $\bar{u}_i$  bezeichnet sei, durch das Vorhandensein eines Partikels verändert wird. Schaut man von weitem, so wird dieses ungestörte Geschwindigkeitsfeld im räumlichen Mittel auch tatsächlich angenommen. Die Störungen des Geschwindigkeitsfelds durch kleine Partikel sind, solange es sich um nur wenige Partikel handelt, nur sehr geringfügig, sie seien mit  $u'_i$  bezeichnet. Dann ist die tatsächliche Geschwindigkeit durch

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i$$

gegeben. Dieser Ansatz erinnert an die Reynoldszerlegung eines turbulenten Geschwindigkeitsfelds und tatsächlich funktioniert der nun folgende Formalismus auch genauso. Man setzt diese Zerlegung in die Navier-Stokes-Gleichungen ein und fragt, wie man die ungestörte Bewegung berechnen oder anders, welchen Einfluss die Störungen auf das räumlich gemittelte Geschwindigkeitsfeld haben. In der Turbulenztheorie werden hierfür die Reynoldsgleichungen hergeleitet, die als Cauchygleichungen mit den inneren Spannungen

$$\tau_{ij} = \mu_0 \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \overline{\rho u'_i u'_j}$$

darstellbar sind. Der Mittlungsbalken stellt hier aber eine räumliche Mittlung dar,  $\mu_0$  sei die molekulare Viskosität des Fluids.

Was bedeutet dies in der Anwendung auf das Couette-Experiment zur Ausmessung der Viskosität eines Fluids, welches nun aber suspendierte Partikel enthält? Auch hier wird man annehmen, dass die erforderliche Kraft pro Fläche zur Bewegung der Auflageplatte proportional zur

Bewegungsgeschwindigkeit der Platte  $u_0$  und umgekehrt proportional zum Abstand  $h$  ist. Der Vorfaktor  $\mu$  ist nun aber die Viskosität der gesamten Suspension:

$$\tau_{zx} = \mu \frac{u_0}{h} = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$$

Die tatsächlich im Fluid wirkende Spannung ist aber die Reynoldsspannung, wobei sich die Mittlung auf den gesamten zwischen den Platten eingeschlossenen Raum beziehen muss. Somit gilt:

$$\mu_0 \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \overline{\rho u' w'} = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$$

Damit folgt für die Viskosität einer Suspension formal:

$$\mu = \mu_0 \left( 1 - \overline{\rho u' w'} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^{-1} \right)$$

Damit hängt die Viskosität einer Suspension einerseits von den Details der Partikelumströmung und andererseits auch von der wirkenden Scherrate ab.

Das von ihm vorgestellte Geschwindigkeitsfeld kann man nun bezüglich seines Impulsflusses (der die Viskosität beinhaltet) mit dem originären Geschwindigkeitsfeld ohne sphärischem Partikel vergleichen. Fügt man nun eine Suspension aus Partikeln zusammen, die das Strömungsfeld beeinflussen, bekommt man mit der Einsteinschen Lösung den Strömungswiderstand auf das Partikel. Man bekommt dann:

$$\mu = \mu_0 \left( 1 + \frac{5}{2} \phi \right) \quad \text{für } \phi < 0.04$$

bei kleinen Konzentrationen und schleichenden Strömungen. Darin ist  $\phi = 1 - n$  der Feststoffanteil pro Volumen. Man bezeichnet den Faktor  $A = 5/2$  hierin auch als **intrinsische Viskosität**.

Eine Verallgemeinerung für größere Partikelkonzentrationen soll nach Einstein die Beziehung

$$\mu = \mu_0 \frac{1 + \frac{1}{2} \phi}{1 - \phi} \quad \text{für } \phi < 0.2$$

Es hat sich gezeigt, dass mit den Einsteinschen Ansätzen bei Suspensionen mit breiten Partikelgrößenverteilungen meist zu niedrige Viskositäten berechnet werden.

### 3.4 Partikel-Partikel-Interaktionen

Die Arbeit von Einstein basiert auf der Umströmung eines Partikels. Die Viskosität der granularen Suspension wird aus der Multiplikation der Einzelpartikeleffekte auf die entsprechende Teilchenzahldichte hochgerechnet. Dies kann natürlich nur für kleine Teilchenzahlkonzentrationen richtig sein, da hier noch keine Wechselwirkungen zwischen den Partikeln stattfinden.

### 3.4.1 Batchelor und Green (1972)

Diese Wechselwirkungen zwischen den Partikeln gehen nicht erst beim Zusammenstoß zweier Partikel los, sondern beginnen schon dort, wo das durch das eine Partikel gestörte Geschwindigkeitsfeld auf ein zweites Partikel wirkt.

Für diesen Fall haben Batchelor und Green 1972 [3] die theoretische Lösung

$$\mu = \mu_0 \left( 1 + \frac{5}{2}\phi + 7.6\phi^2 \right)$$

für die Viskosität der granularen Suspension angegeben.

### 3.4.2 Der Ansatz von Eilers (1941)

Bei noch größeren Feststoffanteilen geht das Fluid in einen festen Stoff über; die scheinbare Viskosität nimmt dann beliebig hohe Werte an, so dass kein Fließen mehr möglich ist.

Eine Realisierung dieser Idee ist der Ansatz von Eilers [6]:

$$\mu = \mu_0 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{A\phi}{1 - \frac{\phi}{\phi_{max}}} \right)^2 \quad \text{mit} \quad A = \frac{5}{2}$$

Er liefert für  $\phi = \phi_{max}$  eine unendlich hohe Viskosität,  $\phi_{max}$  ist also die Volumenkonzentration, bei der die Suspension zu einem festen Stoff wird. Eilers hat für  $\phi_{max}$  den Wert 0.74 angenommen.

Der Ansatz von Eilers geht in den von Einstein über. Dies wird ersichtlich, wenn der Ausdruck ausquadriert wird und die Konzentration gegen Null geht:

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} \mu = \lim_{\phi \rightarrow 0} \mu_0 \left( 1 + \frac{A\phi}{1 - \frac{\phi}{\phi_{max}}} + \frac{1}{4} \frac{A^2\phi^2}{\left(1 - \frac{\phi}{\phi_{max}}\right)^2} \right) = \lim_{\phi \rightarrow 0} \mu_0 (1 + A\phi)$$

Abbildung 3.3 zeigt die drei Ansätze von Einstein, Batchelor und Eilers im Vergleich.

## 3.5 Nichtsphärische Partikel

Die ideale Form der Kugel wird in einem Schlick von keinem Partikel angenommen. Natürlich ist es unmöglich, den Einfluss der unendlich vielen Abweichungen auf die Rheologie granularer Suspensionen zu untersuchen. Wichtig ist es dennoch, die möglichen Effekte der Nichtsphärizität zu kennen.

### 3.5.1 Rotationsellipsoide in Scherströmung

Das Geschwindigkeitsfeld der Umströmung von rotationsellipsoidalen Partikeln in einer reinen Scherströmung ist 1922 von Jeffery [9] untersucht worden. Ein solches Partikel mit den Halbachsen  $a$ ,  $b$  und  $c$  kann durch

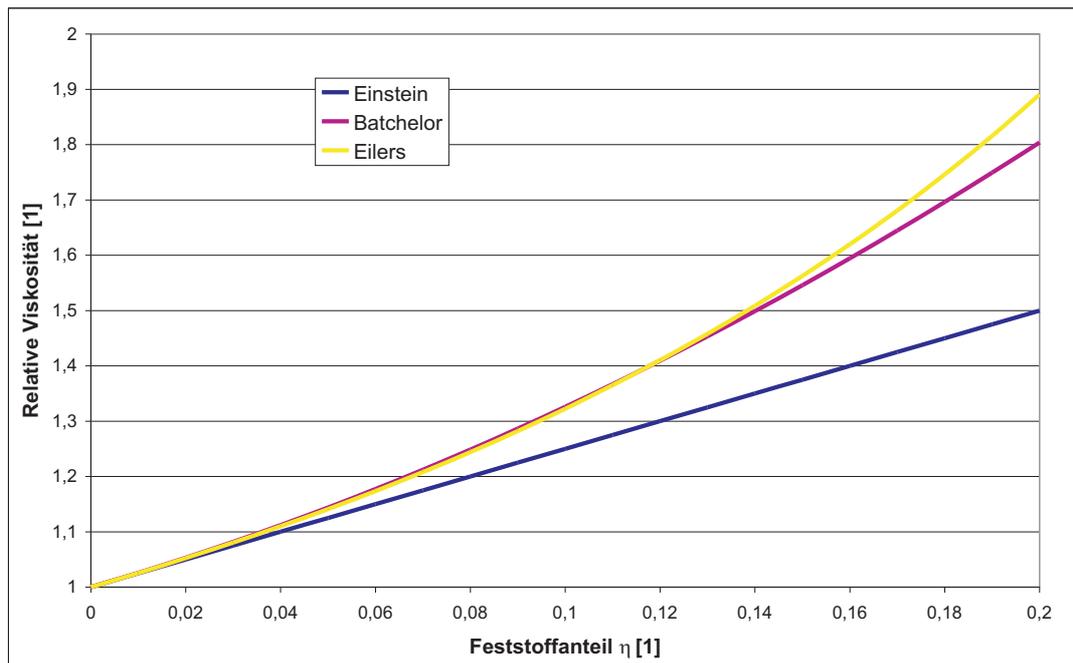


Abbildung 3.3: Die relative Viskosität als Funktion des Feststoffgehalts nach den Ansätzen von Einstein, Batchelor und Eilers ( $\phi_{max} = 0.7$ ). verschiedenen Ansätzen. Ferner sind die Ergebnisse für die Viskosität von Weser- und Emsschlicken bei hohen Scherraten dargestellt. Der Vergleich zeigt, dass die Modellvorstellung einer granularen Suspension nicht ausreichend ist, die Eigenschaften von Schlicken zu erklären.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

parametrisiert werden. Auch hier wird das Problem nur für die schleichende Strömung gelöst. Die ausgeschriebene Darstellung der Lösung auch unter Zuhilfenahme vieler Abkürzungen drei Seiten ein. In der Folge wurden verschiedene kürzere Darstellungen gesucht. So findet man für die Abweichung  $u'_i$  von dem mittleren gescherten Geschwindigkeitsfeld den allgemeinen Ansatz:

$$u'_i = D_{jk} \left( -\frac{3x_i x_j x_k}{2r^5} + \frac{x_j \delta_{ik} - x_k \delta_{ij}}{r^3} \right)$$

Für den Tensor der Vorfaktoren  $D_{jk}$  werden Ausdrücke in Abhängigkeit von der Geometrie des Rotationsellipsoids, von seiner Ausrichtung und Winkelgeschwindigkeit im Geschwindigkeitsfeld und der Scherrate angegeben. Kennt man nun diese Größen, so kann man in Analogie zum Einsteinschen Ansatz die Viskosität dieser Suspension bestimmen.

### 3.5.2 Orientierung von nicht-sphärischen Partikeln

Weicht die Gestalt der Partikel von der Kugelförmigkeit ab, dann sind in einem ruhenden Fluid in keiner Weise bezüglich ihrer Orientierung geordnet. Mit dem Aufbau einer Scherströmung beginnen sich die Partikel so im Geschwindigkeitsfeld zu orientieren, dass sich ihre lange Achse in Strömungsrichtung ausrichtet, so dass ihr Strömungswiderstand minimiert wird.

Die Viskosität des Fluids nimmt damit so lange ab, bis alle Partikel sich im Strömungsfeld vollständig ausgerichtet haben.

Zur theoretischen Beschreibung des Einflusses von ellipsoidalen Partikeln auf die Viskosität des Fluids benötigt man zunächst eine Beschreibung der Ellipsoidalität der Partikel. Im sogenannten Jeffery-Peterlin-Saito-Ansatz [9], [15] wird vom Partikel angenommen, dass dieses im Äquatorialschnitt kreisförmig (Radius  $a$ ) ist und die senkrecht dazu liegende Achse (Radius  $b$ ) einen anderen Wert haben kann. Der Wert  $p = a/b$  gibt dann das Verhältnis der beiden Achsen zueinander an. Für **prolate Partikel** (pfeifenförmig) ist  $p > 1$  und für **oblate Partikel** (scheibenförmig) ist  $p < 1$ . Der Zusammenhang mit dem Corey-Shape-Faktor ist:

$$CSF = \frac{1}{\sqrt{p}}$$

Das Geschwindigkeitsfeld der Umströmung eines solchen ellipsoidalen Partikels in einer reinen Scherströmung ist 1922 von Jeffery [9] untersucht worden. Er gibt für die Abweichung  $u'_i$  von dem mittleren gescherten Geschwindigkeitsfeld den allgemeinen Ansatz

$$u'_i = D_{jk} \left( -\frac{3x_i x_j x_k}{2r^5} + \frac{x_j \delta_{ik} - x_k \delta_{ij}}{r^3} \right)$$

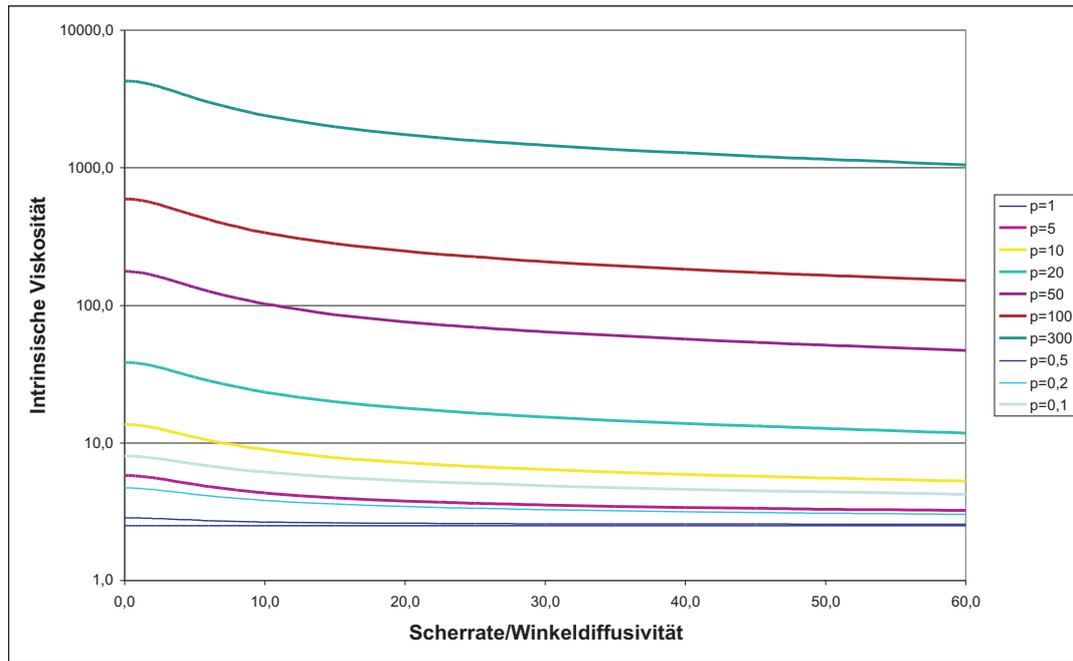


Abbildung 3.4: Intrinsic Viskosität von Rotationsellipsoiden.

an. Für den Tensor der Vorfaktoren  $D_{jk}$  werden Ausdrücke in Abhängigkeit von der Geometrie des Rotationsellipsoids, von seiner Ausrichtung und Winkelgeschwindigkeit im Geschwindigkeitsfeld und der Scherrate angegeben. Kennt man nun diese Größen, so kann man in Analogie zum Einsteinschen Ansatz die Viskosität dieser Suspension bestimmen.

Die Ausrichtung der Partikel zur Strömungsrichtung wird durch eine Verteilungsfunktion  $F(\theta, \phi, t)$  beschrieben. Die zeitliche Entwicklung dieser Verteilungsfunktion wird durch zwei Prozesse bestimmt: Zunächst werden die Partikel durch die angreifenden Strömungskräfte gedreht, d.h. sie erhalten eine Rotationsgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$ . Gleichzeitig treiben aber durch die Brownsche Molekularbewegung ausgelöste diffusive Kräfte die Partikel wieder in die Gleichverteilung der Richtungen zurück. Dieser Prozess sei durch eine Winkeldiffusionskonstante  $\Theta$  beschrieben. Die Winkelverteilungsfunktion der einzelnen Partikel ergibt sich also durch die Lösung der Transportgleichung:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \text{div}(\vec{\omega}F - \Theta \text{grad} F) = 0$$

Kennt man daraufhin die Verteilung der Ausrichtung, kann können die hydromechanischen Kräfte auf das Partikel, wodurch man über den Energieverlust die Viskosität und auch das Drehmoment auf das Partikel bestimmt werden.

Eine solche Theorie ist natürlich nicht mehr analytisch lösbar. Hier wurde die Lösung auf verschiedene Integrale zurückgeführt, die dann numerisch lösbar sind. Deren Lösung wurde 1954 auf dem Mark I Computer<sup>1</sup> des Harvard Computation Laboratory durchgeführt, wodurch

<sup>1</sup>Der Mark I war ein in den USA zwischen 1943 und 1944 vollständig aus elektromechanischen Bauteilen

die in Abbildung 3.4 dargestellten Werte für die intrinsische Viskosität prolater Partikel als Funktion des Verhältnisses von Scherrate  $\dot{\gamma}$  zu Winkeldiffusionskoeffizient  $\Theta$  ergeben. Die Ergebnisse zeigen, dass die intrinsische Viskosität und damit auch die allerhöchstens um einen Faktor vier mit zunehmender Scherrate abnimmt.

### 3.6 Der Einfluss der Korngröße

Der fundamentalen Bedeutung des Strömungswiderstand einer Kugel gerecht werdend wurden in der Geschichte der Hydromechanik Verbesserungen des Stokesschen Ansatzes gesucht, die auch für größere Reynoldszahlen gelten. Die wichtigste analytische Verbesserung für die Umströmung einer Kugel wurde dabei von Oseen 1927 veröffentlicht. Hiernach bekommt der Strömungswiderstand die Form:

$$F_W = 3\pi\mu_0 du_r \left( 1 + \frac{3}{16} \frac{du_r \varrho_0}{\mu_0} \right)$$

Diese Gleichung bleibt bis zu Reynoldszahlen von etwa fünf gültig. Im Unterschied zu Stokes steigt der Widerstand zunächst linear, dann aber quadratisch mit der Anströmgeschwindigkeit. Wir wollen diese Formel erstmalig dazu verwenden, die Viskosität einer granularen Suspension zu bestimmen. Dazu betrachten wir wieder die Energie, die erforderlich ist, eine Suspension mit  $N = nAh$  Partikeln zu scheren

$$W_W = N F_W u_r = nAh 3\pi\mu_0 du_r \left( 1 + \frac{3}{16} \frac{du_r \varrho_0}{\mu_0} \right) u_r$$

und ersetzen hier wieder die Relativgeschwindigkeit zwischen Partikel und Fluid  $u_r$  durch die grobe Abschätzung  $\dot{\gamma}d/2$ :

$$W_W = nAh 3\pi\mu_0 \frac{d^3}{4} \dot{\gamma}^2 \left( 1 + \frac{3}{32} \frac{d^2 \dot{\gamma} \varrho_0}{\mu_0} \right)$$

Zu dieser Arbeit muss wieder die Arbeit zur Überwindung der viskosen Kräfte im Trägerfluid addiert werden:

$$W_{ges} = \mu_0 \frac{\partial u}{\partial z} A u_0 + nAh 3\pi\mu_0 \frac{d^3}{4} \dot{\gamma}^2 \left( 1 + \frac{3}{32} \frac{d^2 \dot{\gamma} \varrho_0}{\mu_0} \right)$$

Das Ausklammern gemeinsamer Terme liefert

$$W_{ges} = A\mu_0 u_0 \frac{\partial u}{\partial z} \left( 1 + n 3\pi \frac{d^3}{4} \left( 1 + \frac{3}{32} \frac{d^2 \dot{\gamma} \varrho_0}{\mu_0} \right) \right)$$

---

gebauter Computer. Der Rechner wurde von Howard H. Aiken von der Harvard-Universität in Cambridge, Massachusetts, entwickelt und hatte ein Gewicht von 35 Tonnen sowie eine Frontlänge von 16 Metern. Der Rechner wurde von der US-amerikanischen Marine zwischen 1944 und 1959 für ballistische Berechnungen genutzt.

und somit für die Viskosität einer granularen Suspension:

$$\mu = \mu_0 \left( 1 + \frac{9}{2} \phi \left( 1 + \frac{3}{32} \frac{d^2 \dot{\gamma} \rho_0}{\mu_0} \right) \right) = \mu_0 \left( 1 + \frac{9}{2} \phi \left( 1 + \frac{3}{8} Re_{\dot{\gamma}} \right) \right)$$

Dieser Ansatz prognostiziert verschiedene Effekte:

1. Der Ansatz spiegelt die aus der Dimensionsanalyse gewonnene Abhängigkeit vom Feststoffanteil und der rheologischen Reynoldszahl wider.
2. Der Ansatz prognostiziert ein Shear Thickening, welches aus dem quadratischen Wachsen des Strömungswiderstands mit der Relativgeschwindigkeit und somit der Scherrate resultiert.
3. Bei gleicher Feststoffkonzentration steigt die Viskosität mit dem Korndurchmesser.
4. Er bietet mit dem Korndurchmesser damit auch eine Ausgangsbasis zur Entwicklung von Modellen zur Beschreibung von Strukturviskosität.

In Verallgemeinerung dessen kann man den Übergang zum festen Stoff nach Eilers sowie die Einflüsse der Nichtspherizität durch den erweiterten Ansatz

$$\mu = \mu_0 \frac{1 + A\phi \left( 1 + \frac{3}{32\nu} d^2 \dot{\gamma} \right)}{1 + \phi/\phi_{max}}$$

berücksichtigen. Ersetzt man den Flockendurchmesser nun durch den Strukturparameter  $\lambda_S$  in der Form,

$$d = d_0 + \lambda_S \Delta d = d_0 + \frac{b_{floc}}{a_{break} \dot{\gamma} + b_{floc}} \Delta d$$

d. h. man nimmt an, dass die maximale Größe der Flocken  $d_0 + \delta d$  ist.

$$\mu = \mu_0 \frac{1 + A\phi \left( 1 + \frac{3}{32\nu} \left( d_0 + \frac{b_{floc}}{a_{break} \dot{\gamma} + b_{floc}} \Delta d \right)^2 \dot{\gamma} \right)}{1 + \phi/\phi_{max}}$$

### 3.7 Paarbildung: Die Theorie von Krieger und Dougherty

Bis 1959 ist man davon ausgegangen, dass Strukturviskosität bei einer Suspension von spärlichen Partikeln nicht auftreten kann. In diesem Jahr wurde von Irvin M. Krieger und Thomas J. Dougherty [10] strukturviskoses Verhalten bei sphärischen Partikeln auf die Bildung von Teilchenpaaren und deren Dissoziation bei großen Scherraten zurückgeführt. Die Bildung solcher Teilchenpaare kann man in vielen Suspensionen beobachten: Kommen zwei Teilchen zu nahe zusammen, so tanzen sie wie die Derwische umeinander, um sich dann wieder voneinander zu lösen.

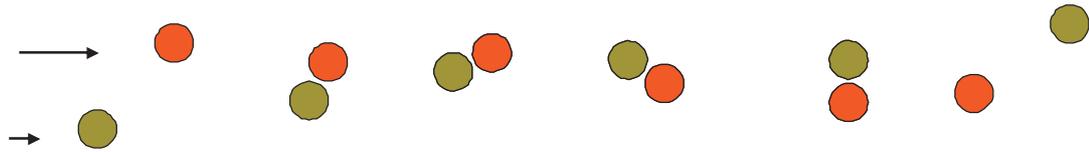


Abbildung 3.5: Der Sambatanz der Partikel in einer Scherströmung.

### 3.7.1 Die Reaktionskinetik der Paarbildung

Für die Teilchen der Suspension wird angenommen, dass diese entweder als Einzelteilchen oder als Paare (Hanteln, engl. dumbbell) existieren. Die Reaktionsrate zur Bildung von Hanteln ist  $k_f$ , sie werden entweder durch thermische Bewegungen (Reaktionsrate  $k_B$ ) oder durch Scherspannungen (Reaktionsrate  $k_s$ ) zerstört. Die Teilchenzahldichten  $n_1$  und  $n_2$  ergeben sich also aus der reaktionskinetischen Gleichung

$$\frac{dn_2}{dt} = k_f n_1^2 - (k_b + k_s) n_2$$

womit im Gleichgewicht

$$\frac{n_2}{n_1^2} = \frac{k_f}{k_b + k_s} = \frac{k_f}{k_b} \left(1 + \frac{k_s}{k_b}\right)^{-1}$$

gilt. Die Viskosität der granularen Suspension hängt nun von den Teilchenkonzentrationen in Konformität mit der Einsteinschen Theorie in der Form<sup>2</sup>

$$\mu = (1 + f_1 n_1 + f_2 n_2) \mu_0$$

ab.

Im Folgenden betrachten die Autoren zwei Spezialfälle: Bei vollkommener Abwesenheit einer Scherung seien  $\tilde{n}_1$  und  $\tilde{n}_2$  die Teilchenzahlen. In diesem Fall ist natürlich  $k_s = 0$  und es gilt:

$$\frac{\tilde{n}_2}{\tilde{n}_1^2} = \frac{k_f}{k_b}$$

Damit ist:

$$\frac{n_2}{n_1^2} = \frac{\tilde{n}_2}{\tilde{n}_1^2} \left(1 + \frac{k_s}{k_b}\right)^{-1}$$

Krieger und Dougherty nehmen nun an, dass überhaupt nur eine kleine Anzahl von Partikeln Paare bildet, dass also  $n_1 \simeq \tilde{n}_1$ :

$$n_2 = \tilde{n}_2 \left(1 + \frac{k_s}{k_b}\right)^{-1}$$

<sup>2</sup>In der Originalarbeit fehlt die 1, dies macht im Endergebnis allerdings keinen Unterschied.

Die Viskosität  $\tilde{\mu}$  ist im Fall verschwindender Scherspannungen

$$\tilde{\mu} = (1 + f_1\tilde{n}_1 + f_2\tilde{n}_2)\mu_0 = (1 + f_1n + (f_2 - 2f_1)\tilde{n}_2)\mu_0 = (1 + f_1(n - 2\tilde{n}_2) + f_2\tilde{n}_2)\mu_0$$

Dabei wurde die Beziehung für die gesamte Teilchenzahldichte

$$n = n_1 + 2n_2 = \tilde{n}_1 + 2\tilde{n}_2$$

ausgenutzt. Mit  $n_1 \simeq n \gg 2\tilde{n}_2$  gilt:

$$\tilde{\mu} \simeq (1 + f_1n + f_2\tilde{n}_2)\mu_0 \simeq (1 + f_1n_1 + f_2\tilde{n}_2)\mu_0$$

Bei einer unendlich hohen Scherrate sind Teilchenpaare dissoziiert, d.h.  $n_2 = 0$ . Die Viskosität ist dort:

$$\mu_\infty = (1 + f_1n_1)\mu_0$$

Damit kann man alle Viskositäten zusammen zu

$$\frac{\mu - \mu_\infty}{\tilde{\mu} - \mu_\infty} = \frac{n_2}{\tilde{n}_2} = \left(1 + \frac{k_s}{k_b}\right)^{-1}$$

kombinieren.

### 3.7.2 Lebensdauern

Die Reaktionsraten sind umgekehrt proportional zu den mittleren Lebensdauern der einzelnen Zustände. Seien also  $t_b$  die mittlere Lebensdauer eines Doublets, welches einzig durch thermische Bewegungen und  $t_s$  die Lebensdauer eines Doublets, welches durch Scherung dissoziiert wird. Dann gilt:

$$\frac{\mu - \mu_\infty}{\tilde{\mu} - \mu_\infty} = \left(1 + \frac{t_b}{t_s}\right)^{-1}$$

Geht man nun davon aus, dass das Doublet dann zerstört wird, wenn es senkrecht zur Scherung orientiert ist, dann ist  $\pi/2$  der Winkel, der bis zum Lebensende des Doublets maximal zurückgelegt werden muss. Der mittlere zurückzulegende Winkel in die Instabilität sei also  $\alpha_1\pi/2$ . Die Rotationsgeschwindigkeit ist  $\omega = |D_{ik}|$ . Damit ist die mittlere Lebensdauer unter Scherung:

$$t_s = \alpha_1\pi/(2|D_{ik}|)$$

Das Doublet kann aber auch thermisch durch die Brownsche Molekularbewegung dissoziiert werden. Ist  $D$  die Diffusionskonstante der Partikel im Fluid, dann hat dieses nach der Zeit  $t_b$  den mittleren Weg

$$\bar{x}^2 = 2Dt_b$$

zurück gelegt. Damit das Doublet als dissoziiert gilt, sollte diese Wegstrecke mindestens der Radius sein:

$$\alpha_2 R^2 = 2Dt_b$$

Die Diffusionskonstante  $D$  ist bei der Brownschen Molekularbewegung

$$D = \frac{kT}{6\pi R\mu} \quad \text{mit} \quad k = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$$

womit sich für die Lebensdauer durch thermische Dissoziation

$$t_b = 3\pi\mu\alpha_2 R^3 / kT$$

ergibt.

### 3.7.3 Die Viskosität unter Paarbildung

Damit folgt für die Viskosität letztendlich mit  $\alpha = \alpha_2/\alpha_1$ :

$$\frac{\mu - \mu_\infty}{\tilde{\mu} - \mu_\infty} = \left(1 + \frac{|\tau|}{\tau_c}\right)^{-1} \quad \text{mit} \quad \tau_c = \frac{\alpha kT}{3R^3}$$

bzw.

$$\mu = \mu_\infty + (\tilde{\mu} - \mu_\infty) \frac{\tau_c}{(\tau_c + |\tau|)} \quad \text{mit} \quad \tau_c = \frac{\alpha kT}{3R^3}$$

Der Ansatz besagt folgendes:

- Die Viskosität fällt mit zunehmender Scherspannung von einem Anfangswert  $\tilde{\mu}$  auf einen Endwert  $\mu_\infty$ .
- Die Viskosität fällt dabei umso steiler und schneller, desto kleiner  $\tau_c$  ist.
- die Viskosität fällt bei größerer Temperatur flacher ab, weil die thermische Dissoziation hier schon mehr Arbeit leistet.
- Die Viskosität fällt mit zunehmender Teilchengröße steiler ab, da die Scherspannung größere Doubletten leichter dissoziiert.

Krieger und Dougherty haben ihre Theorie experimentell für polymere Partikel mit Durchmessern im Bereich von  $10^{-7}$  bis  $10^{-8}$  Metern bestätigen können. Hier bekommt  $\tau_c$  Werte im Pascal-Bereich. Für größere Partikel sinkt  $\tau_c$  dann sehr schnell ab, wodurch die Viskosität sofort ihren Endwert annehmen würde.

### 3.8 Zusammenfassende Folgerungen

- Die Viskosität eines Schlicks ist im wesentlichen vom Feststoffgehalt  $\phi$  und der rheologischen Reynoldszahl  $Re_{\dot{\gamma}}$  abhängig:

$$\mu_r = \mu_r(\phi, Re_{\dot{\gamma}})$$

Es sich im Folgenden noch zeigen, dass der Durchmesser der Partikel in Schlicken nicht erheblich schwankt, so dass eine Abhängigkeit in der Form

$$\mu_r = \mu_r(\phi, \dot{\gamma})$$

zu untersuchen bleibt.

- Die Abhängigkeit vom Feststoffgehalt  $\phi$  lässt sich in der Form

$$\mu = \mu_0 (1 + A\phi)$$

darstellen. Für höhere Feststoffgehalte kommen höhere Potenzen von  $\phi$  hinzu, so dass auch ein Ansatz

$$\mu = \mu_0 \exp(A\phi)$$

Erfolg versprechen kann.

Der Vorfaktor  $A$  heißt intrinsische Viskosität. Er hat nach Einstein den Wert  $5/2$ , kann aber durch Paarbildung und bei nichtsphärischen Partikeln wesentlich höhere Werte annehmen.

# Kapitel 4

## Die Rheologie der Schlicke aus Ems und Weser

Zur Modellierung der Dynamik der Flüssigschlicke im Ems- und im Weserästuar sind zunächst einmal die rheologischen Eigenschaften der dortigen Schlicke zu erfassen und zu beschreiben. Hierzu wurden in beiden Ästuaren Schlickproben genommen, was im folgenden Abschnitt beschrieben wird.

Darauf folgend wird die Aufbereitung der Proben im Labor und das Messprogramm beschrieben. Der Abschnitt 4.3 stellt dann die Ergebnisse zu den Korngrößenverteilungen, Abschnitt 4.4 zu Glühverlust und Sedimentdichte dar.

Das Kapitel schließt mit den Ergebnissen der rheologischen Untersuchungen.

### 4.1 Die Probenahmen in Ems und Weser

Die Probennahme der Flüssigschlickproben konnten aus Gründen der nautischen Sicherheit nur in den Randbereichen der Fahrrinnen und in einzelnen Hafengebieten der Ems und der Weser erfolgen.

Alle Proben wurden im Zeitraum vom 27. August bis zum 11. September 2008 entnommen. Die Messstellen, die Probennummern, das Datum und die Uhrzeit der Probennahmen sind in der folgenden Tabelle 4.1 wiedergegeben. Die Abbildungen 4.2 bis 4.6 zeigen die Probenahmeorte.

Die Proben in der Ems wurden mit Unterstützung der WSA Emden mit einem an der Professur für Wasserbau entwickelten Schürfkübel genommen. Die Proben in der Weser konnten mit Unterstützung der Bremenports mit Hilfe eines Van-Fehn-Greifens genommen werden.

Alle Proben wurden im Labor für Hydromechanik für Wasserbau der Universität der Bundeswehr in München einheitlich nach dem im folgenden beschriebenen Vorgehensmodell analysiert.

Kennung	Breite	Länge	Datum	Gefäße
Ems 1	53° 18' 36,28"	7° 20' 31,26"	28.Aug.2008 11:30	E10, E11, E12
Ems 2	53° 20' 30,92"	7° 11' 18,18"	27.Aug.2008 11:30 - 12:30	E1, E2
Ems 3	53° 20' 10,82"	7° 11' 1,72"	28.Aug.2008 9:00	E6, E7, E8, E9
Ems 4	53° 19' 46,98"	7° 8' 44,19"	27.Aug.2008 17:00	E3
Ems 6	53° 19' 10,77"	7° 16' 46,18"	27.Aug.2008 17:00	E5
Weser 1	53° 33' 59,01"	8° 32' 55,43"	11.Sep.2008 8:00 - 13:00	W1, W2
Weser 2	53° 36' 18,96"	8° 30' 30,82"	11.Sep.2008 8:00 - 13:00	W3-W7
Weser 3	53° 32' 27,26"	8° 34' 43,32"	11.Sep.2008 8:00 - 13:00	W8-W17
Weser 4	53° 32' 12,38"	8° 34' 42,42"	11.Sep.2008 8:00 - 13:00	W18-W27
Weser 5	53° 29' 44,51"	8° 30' 2,18"	11.Sep.2008 8:00 - 13:00	W32-W35

Tabelle 4.1: GPS-Koordinaten und Zeitpunkte der Probenahmeorte in Ems und Weser



Abbildung 4.1: Zur Lage der Probenahmenstellen Ems

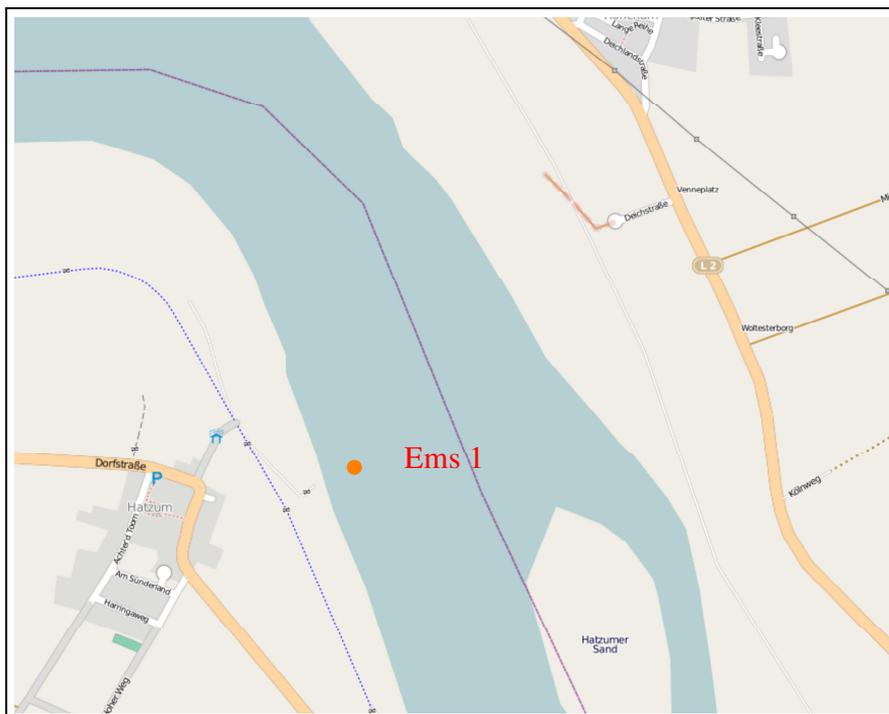


Abbildung 4.2: Zur Lage der Probenahmestelle Ems 1



Abbildung 4.3: Zur Lage der Probenahmestellen Ems 2, Ems 3



Abbildung 4.4: Zur Lage der Probenahmenstellen Ems 4



Abbildung 4.5: Zur Lage der Probenahmenstelle Ems 6



Abbildung 4.6: Zur Lage der Probenahmenstellen Weser

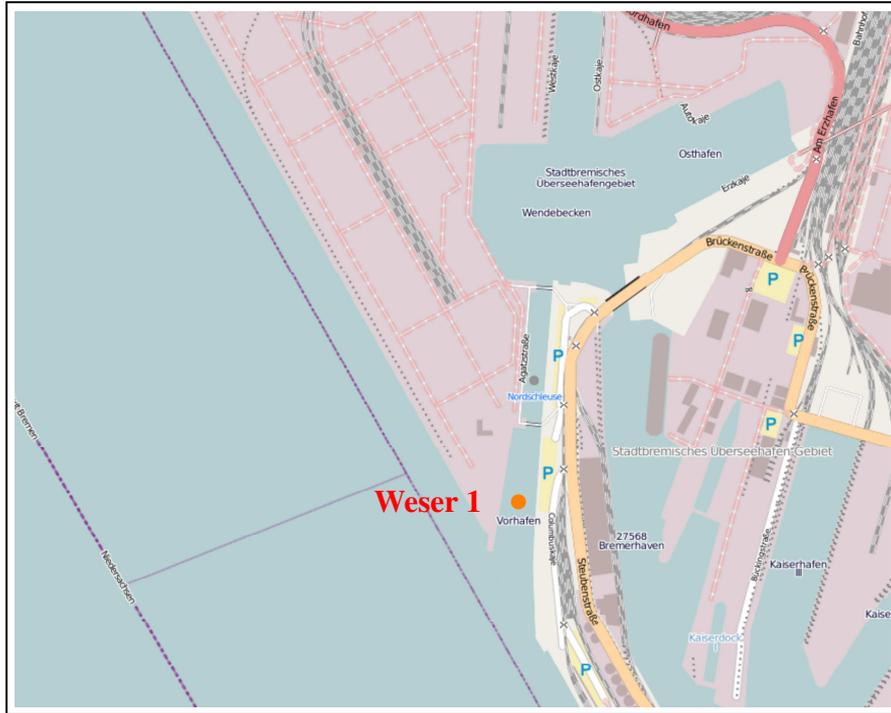


Abbildung 4.7: Zur Lage der Probenahmenstelle Weser 1



Abbildung 4.8: Zur Lage der Probenahmenstelle Weser 2



### Die Nasssiebung

Die in den Ästuaren gewonnenen Proben bestanden zum großen Teil aus Schlick, der mehr oder weniger große Anteile an Sand enthielt. In den Proben waren zudem Schnecken und Muscheln und manchmal anthropogene Kleinteile zu finden. Eine rheologische Analyse der originären Proben war daher nicht möglich.

Im Rahmen dieses Projektes wurde sich daher auf die Feinsedimente vom Schluffkorn abwärts beschränkt. Dabei sollte der darin enthaltene Mikrozoobenthos und Mikrophytobenthos weitgehend erhalten bleiben.

Daher wurden alle Proben durch ein 0.063mm-Sieb gesiebt und anschließend durch Papierfilter filtriert.

## 4.2 Der mikroskopische Eindruck

In Abbildung 4.11 stehen die Partikel der verbleibenden Grobschlufffraktion im Vordergrund. Diese lichtdurchlässigen Körner mineralischen Ursprungs erscheinen hell im Mikroskopbild. Ihre Kornform ist prolat, die Längsachse ist etwa doppelt so lang wie die Querachse ( $p \approx 2$ ).

Abbildung 4.12 sind dagegen immer wieder Partikel der Feinschlufffraktion im Bereich von etwa  $10 \mu\text{m}$  zu finden. Sie erscheinen fast sphärisch ( $p < 1.5$ ).

In Abbildung 4.13 ist ein Bakterienhaufen zu erkennen. Bakterien sind etwa  $0.5$  bis  $5 \mu\text{m}$  große Einzeller, die zusammen mit den Blaualgen die Gruppe der Prokaryonten bilden, die keinen Zellkern besitzen. Bakterien können extrazelluläre polymere Substanzen, d. h. Schleim bilden. In diesem werden Substanzen zur Nährstoffaufnahme gespeichert und gepalten. Im EPS werden aber auch andere Partikel, wie mineralische Tone gebunden, wodurch sich Flocken bilden.

Normalerweise sind die Bakterienhaufen kugelförmig. Bei geringem Nährstoffangebot bilden sie fadenartige Strukturen aus, die Geflechte und Gerüste formen. Mit dieser Überlebensstrategie vergrößern sie ihre Oberfläche zum Einfangen von Nährstoffen.

Als einzellige Tiere mit sehr verschiedenartigen Organellen ernähren sich die Protozoen (Urtierchen) von den Bakterien. Sie sind einige  $10 \mu\text{m}$  groß. In der rechten unteren Ecke des Bakterienhaufens ist dunkler ein solches Urtierchen zu erkennen.

Bakterien ernähren sich autotroph durch Photosynthese, verwerten organische Materialien (z. B. Fäulnisbakterien) oder oxidieren anorganische Materialien (z. B. Eisen, Stickstoff, Schwefelwasserstoff). So zeigt die Abbildung 4.14 im Zentrum ein solches Pflanzenrestteilchen, welches den Bakterien als Nahrung dient. Die braunen, unscharfen Flocken im Hintergrund sind wieder Bakterienansammlungen.

Zusammenfassend zeigt die Abbildung 4.15 das Spektrum der mineralische Fraktionen vom Grob- zum Feinschluff, sowie durch EPS zusammengefügte Bakteriengeflechte.

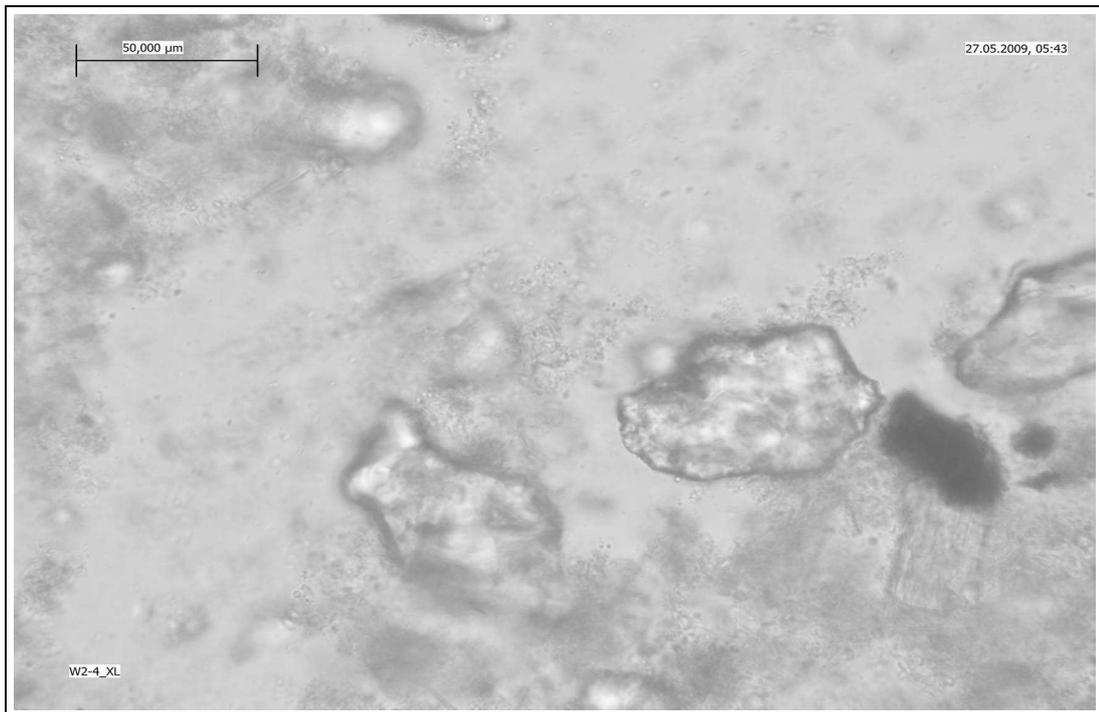


Abbildung 4.11: Mikroskopische Aufnahme der Probe Weser 2.

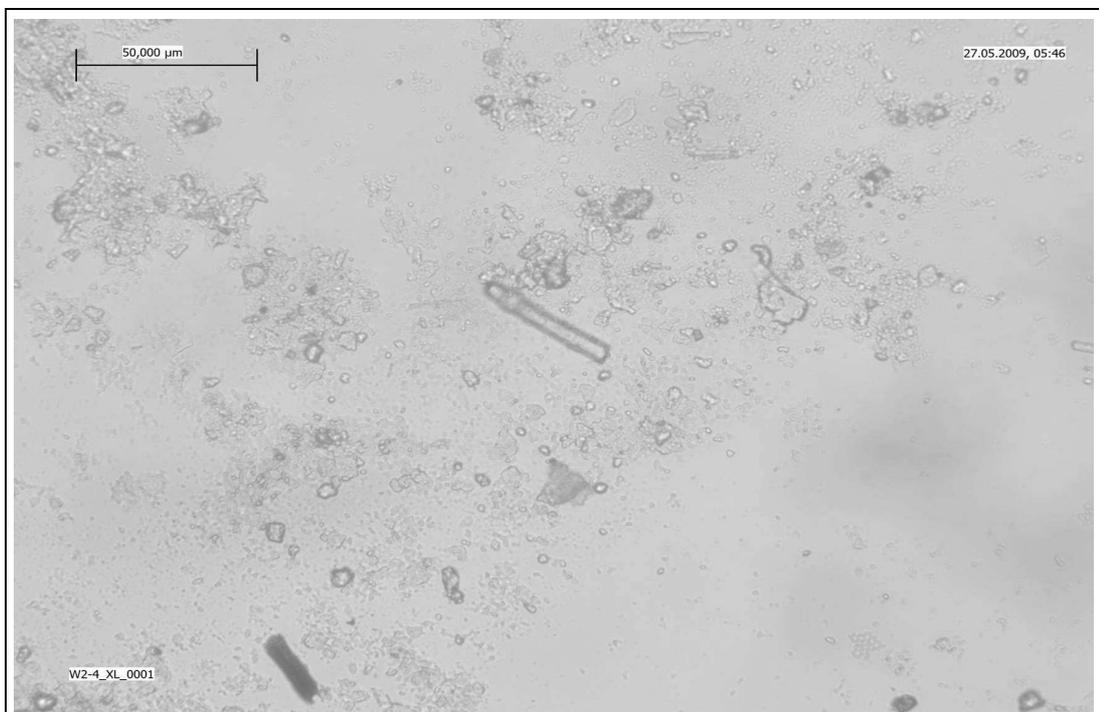


Abbildung 4.12: Mikroskopische Aufnahme der Probe Weser 2.

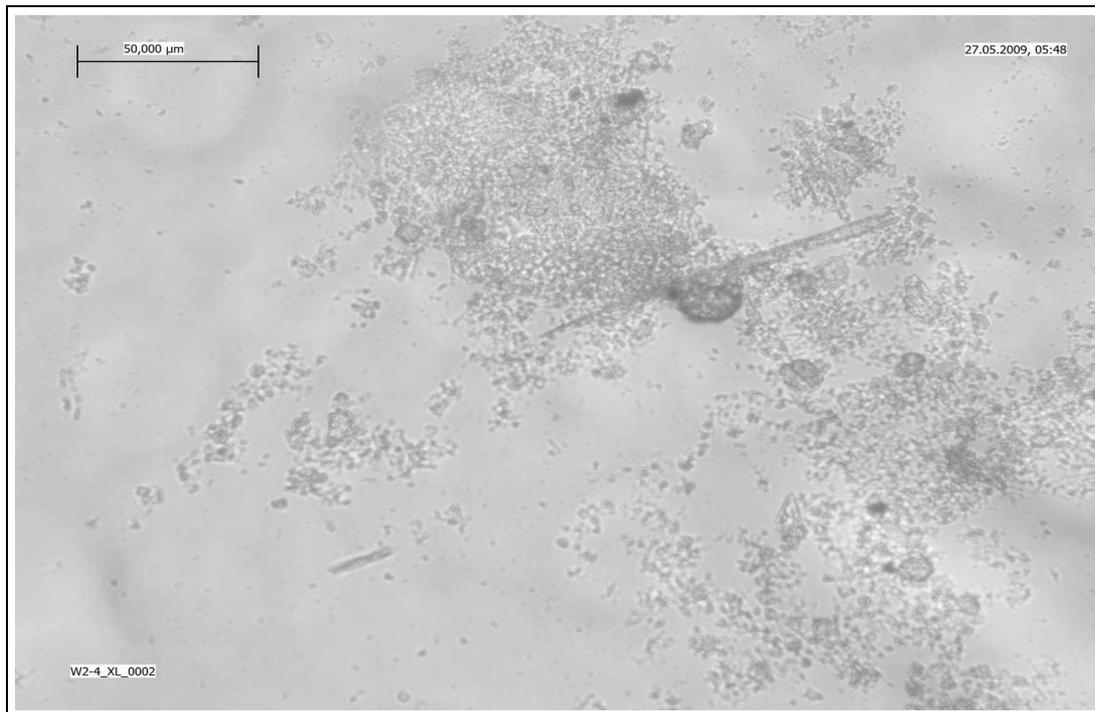


Abbildung 4.13: Mikroskopische Aufnahme der Probe Weser 2.

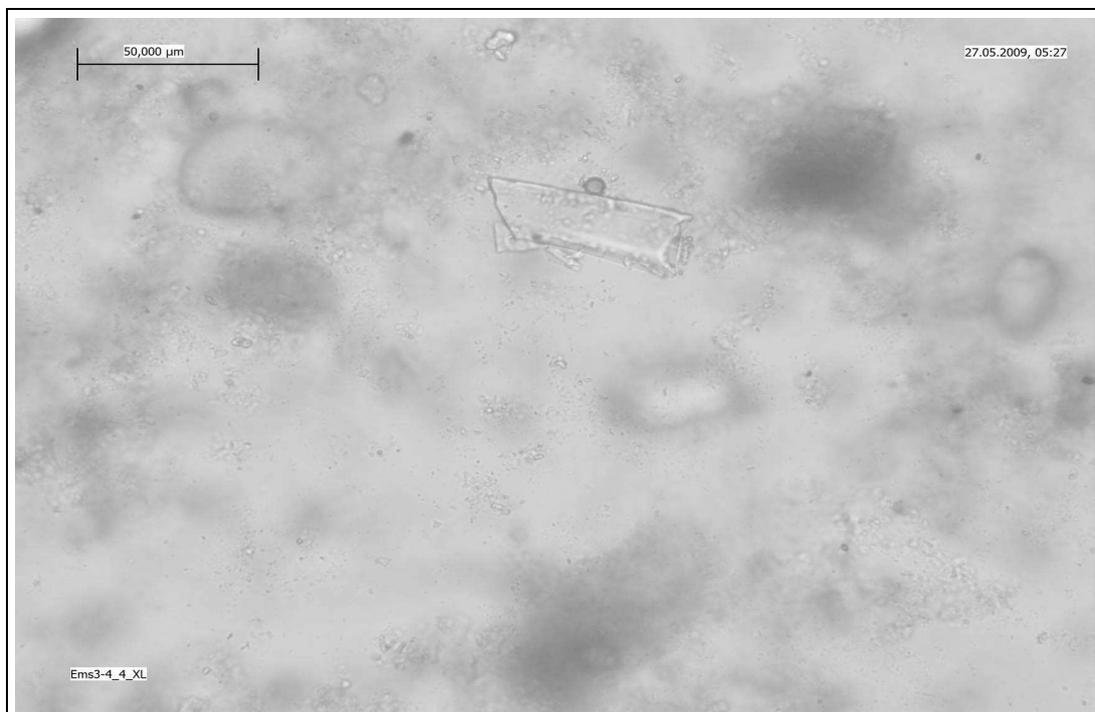


Abbildung 4.14: Mikroskopische Aufnahme der Probe Ems 3.

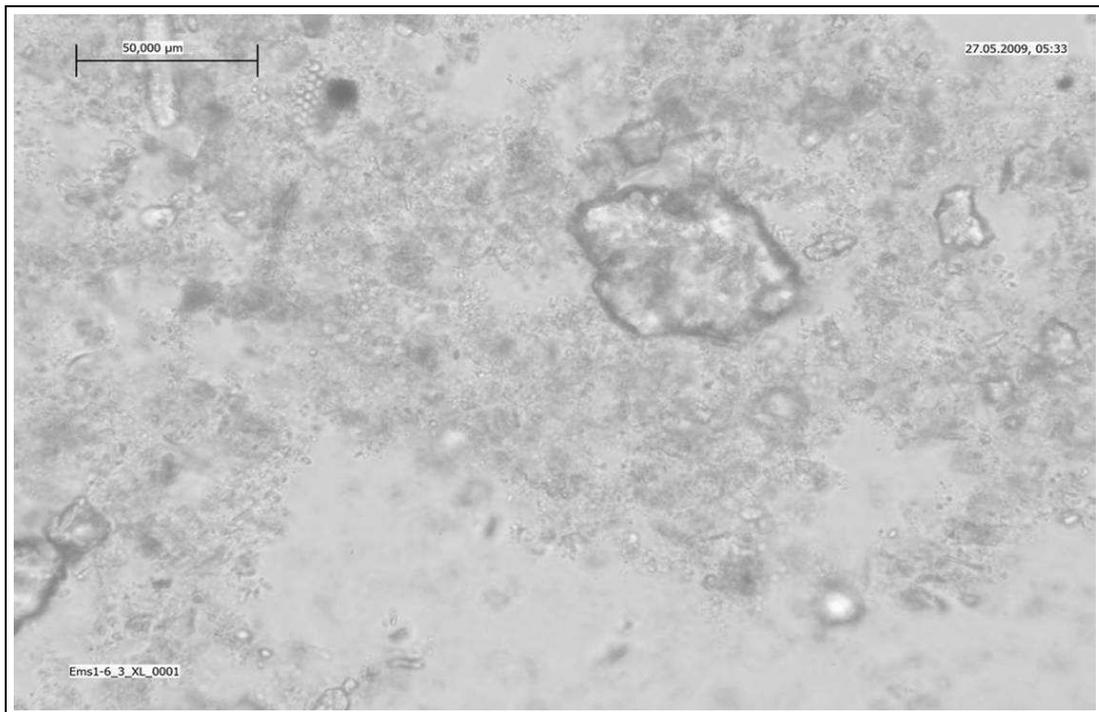


Abbildung 4.15: Mikroskopische Aufnahme der Probe Ems 6.

### 4.3 Bestimmung der Korngrößenverteilungen

Darauf folgend wurden die Korngrößenverteilungen der Nassproben mit einem Laser-Streulichtspektrometer, dem Partikelanalysator HORIBA LA-950 bestimmt. Das Gerät arbeitet auf der Grundlage der statischen Laserlichtstreuung (gemäß DIN/ISO 13320) und wurde für höchste Anforderungen in Bezug auf Sicherheit, Genauigkeit, Flexibilität und Bedienbarkeit entwickelt.

Die Proben können im gesamten Messbereich von von  $0,01 \mu\text{m}$  bis  $3000 \mu\text{m}$  ohne Umstellungen am Gerät analysiert werden (Single Range).

#### Funktionsprinzip laut Herstellerangaben

Die spezielle Anordnung des segmentierten Vorwärtsdetektors und der Seit- und Rückwärtsdetektoren, gekoppelt mit dem Einsatz von 2 Lichtquellen mit unterschiedlichen Wellenlängen, erlaubt die Vermessung der gesamten Partikelgrößenverteilung einer Probe in nur einem Messdurchgang.

Bei feinsten Partikeln sorgt eine blaue LED-Lichtquelle für deutliche Signale in großen Streuwinkeln. Diese Signale werden durch die neuartigen 4-Kanal-Detektoren mit erhöhter Empfindlichkeit und einer extrem hohen Auslesefrequenz von 5000 Messwerten pro Sekunde erfasst.

Für Partikel im Millimeterbereich (bis zu 3 mm) ist es notwendig, Beugungsmuster mit sehr kleinen Streuwinkeln zu erfassen. Diese kleinen Streuwinkel liegen naturgemäß nahe dem Hin-



Abbildung 4.16: Ansicht des Partikelsizers HORIBA LA-950

tergrundsignal des eigentlichen Laserstrahls. Durch die Vergrößerung der optischen Weglänge wurde das Signal-/Rausch-Verhältnis wesentlich verbessert und ermöglicht so noch genauere Messungen.

Im Vergleich zu herkömmlichen Geräten verfügt das LA-950 über einen um das 4-fache verlängerten optischen Strahlengang. Ein neu entwickelter segmentierter Multi-Element-Detektor mit besonderer Anordnung und erhöhter Empfindlichkeit der Einzeldetektoren erlaubt es, das von großen Partikeln in geringen Winkeln gebeugte Licht genau zu erfassen.

### 4.3.1 Flockenbildung im Partikelsizer

Bei der Bestimmung der Korngrößenverteilung offenbarte sich die besonders hohe Kohäsivität der Schlicke in beeindruckender Weise bei der mehrfachen Wiederholung einer Messung mit dem Partikelsizer.

Die Abfolge einer solchen Messreihe zeigen die Abbildungen 4.17 bis 4.19. Während bei der ersten Messung alle Partikel kleiner als  $63 \mu\text{m}$  sind, zeigt sich in der darauf folgenden Messung ein Peak bei ca. 1 mm und in der dritten Messung sogar Partikel, deren Durchmesser noch darüber liegen.

Da alle Proben im Vorfeld dieser Messung auf eine maximale Korngröße von  $63 \mu\text{m}$  ausgesiebt wurden, kann hier nur auf eine schnelle Flockenbildung im Partikelsizer geschlossen werden. Um möglichst genaue Messergebnisse zu erzielen, muss man die Nassproben so schnell wie

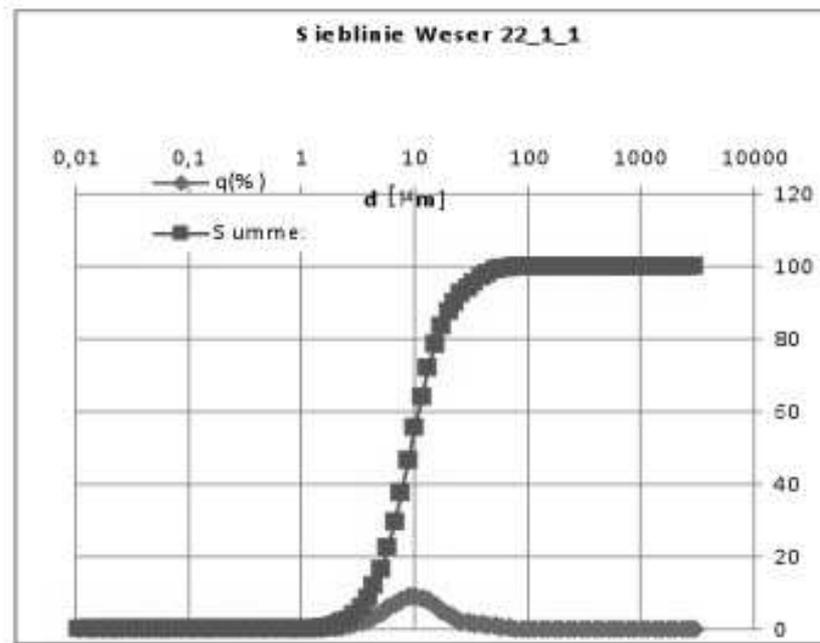


Abbildung 4.17: Korngrößenverteilung der Probe Weser 4 nach der ersten Messung mit dem Partikelsizer.

möglich im Partikelsizer analysieren und das Ergebnis sofort auf eine mögliche Flockenbildung verifizieren.

### 4.3.2 Messergebnisse

Die Messergebnisse der Korngrößenverteilungen von Proben Ems und Weser sind in Abbildung 4.20 dargestellt.

Fast alle Kurven zeigen die typische Form der Gaußschen Normalverteilung, wenn man die Korngrößenachse logarithmisch darstellt.

Alle Verteilungen weisen ferner fast keinen Anteil unter einem  $\mu\text{m}$  auf, der Tonanteil liegt in allen Proben (außer Weser1 und Weser2) unter zwei Prozent.

Da die Ergebnisse auf den ersten Blick sehr ähnlich zu sein scheinen, sind die Kennwerte der Korngrößenverteilungen in der Tabelle 4.2 genauer beschrieben. Aus dieser Tabelle ist erkennbar, dass die Medianwerte der Korngröße der aller Proben ähnlich sind. Alle Proben lassen sich nach Median- und Mittelwert als Mittelschluff (mU) bezeichnen.

Zur weiteren Analyse wurde die Ungleichförmigkeitszahl  $C_u$  untersucht. Der Wert der Ungleichförmigkeitszahl lässt folgende Aussagen über die Proben zu:

$C_u \leq 5$ : gleichförmige Probe

$C_u = 5-15$ : ungleichförmige Probe

$C_u \geq 15$ : sehr ungleichförmige Probe

Laut Tabelle 4.2 sind alle Proben demnach gleichförmig, am ehesten geht die Probe Weser1 in Richtung Ungleichförmigkeit.

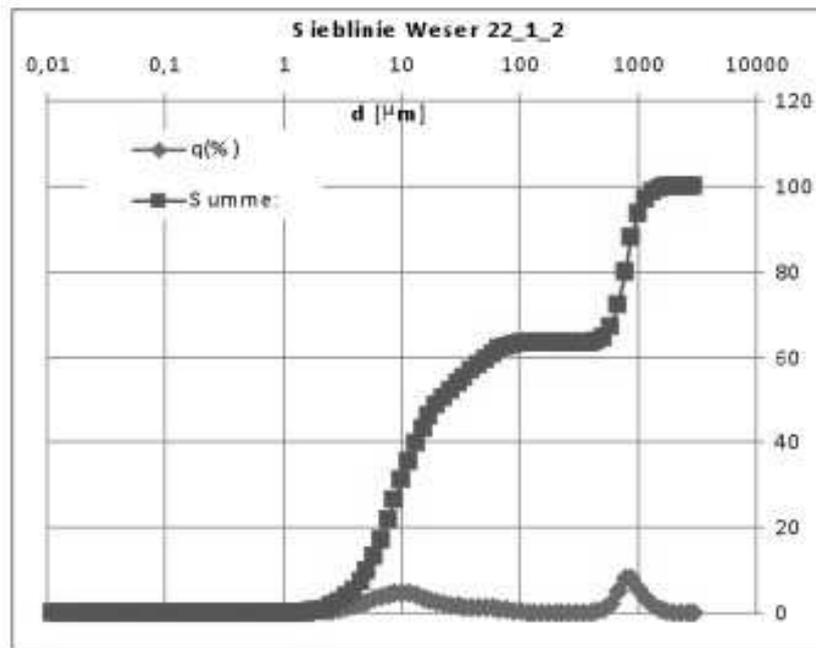


Abbildung 4.18: Korngrößenverteilung der Probe Weser 4 nach der zweiten Messung ca. 1 Stunde später mit dem Partikelsizer.

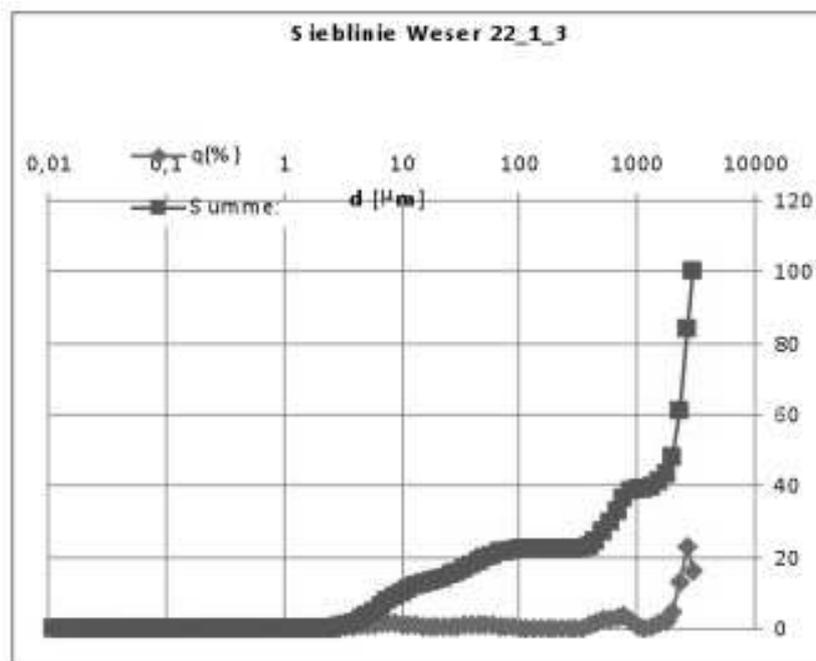


Abbildung 4.19: Korngrößenverteilung der Probe Weser 4 nach der dritten Messung ca. 2 Stunden später mit dem Partikelsizer.

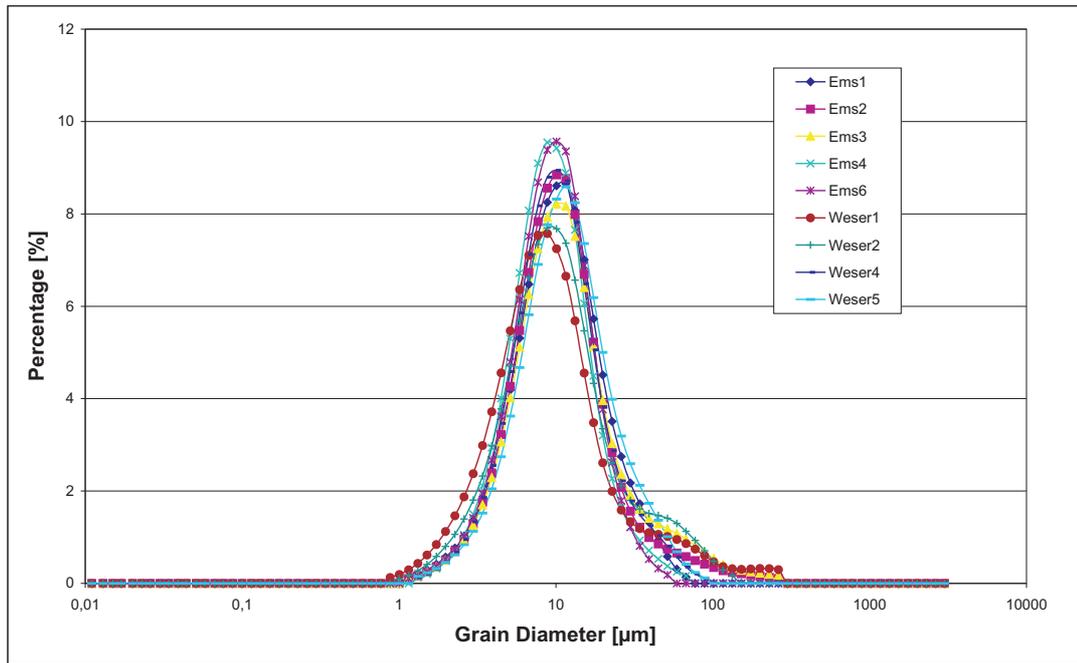


Abbildung 4.20: Zusammenstellung aller Sieblinie der Proben aus Ems und Weser.

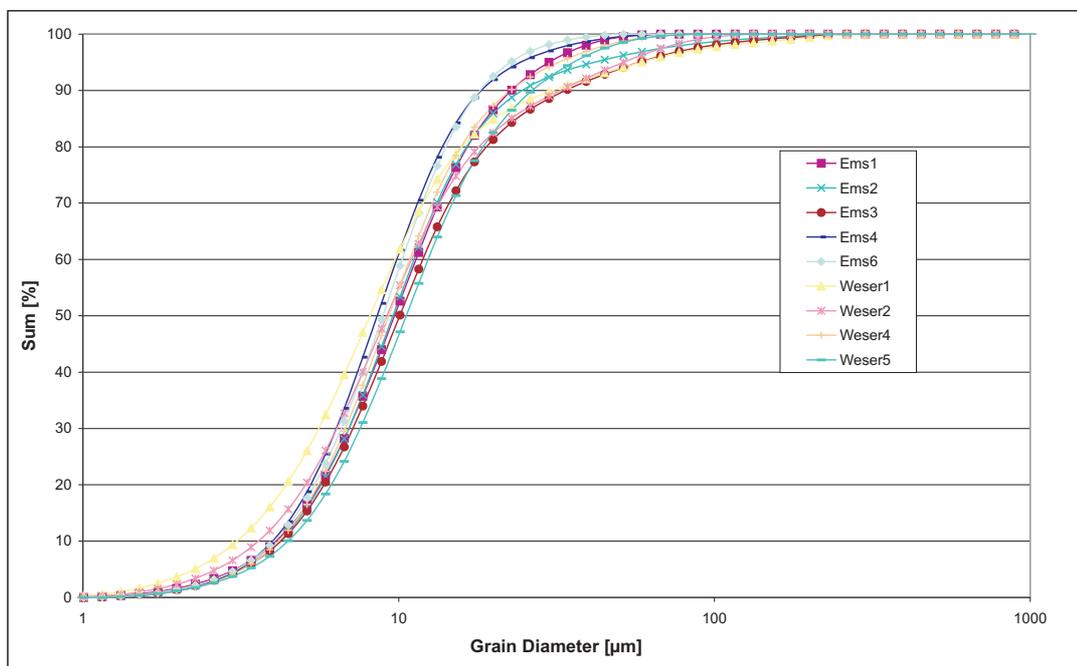


Abbildung 4.21: Zusammenstellung aller Summenkurven der Korngrößen der Proben aus Ems und Weser.

Tabelle 4.2: Analyse der Korngrößenverteilung von Proben Ems und Weser

Probe	$d_{50}[\mu m]$	$d_m[\mu m]$	$d_{10}[\mu m]$	$d_{60}[\mu m]$	$Cu = \frac{d_{60}}{d_{10}}$	Tonanteil [%]
Ems1	9,69	12,00	4,07	11,34	2,79	
Ems2	9,68	16,33	4,24	11,30	2,67	
Ems3	10,08	17,15	4,21	11,93	2,83	
Ems4	8,54	10,42	3,98	9,86	2,48	
Ems6	8,90	10,34	4,02	10,26	2,55	
Weser1	8,11	15,83	3,06	9,75	3,19	
Weser2	9,18	14,63	3,58	10,99	3,07	
Weser3	9,30	12,07	4,14	10,84	2,62	
Weser4	10,64	18,48	4,29	12,76	2,97	
Weser5	10,56	13,60	4,46	12,40	2,78	

Zusammenfassend läßt sich kein eindeutig quantifizierbarer Unterschied in den einzelnen Proben feststellen. Eine Abhängigkeit der rheologischen Ergebnisse von der Korngröße wird sich also nicht feststellen lassen werden, auch wenn alle Proben sehr gleichförmig sind.

## 4.4 Der Glühverlust

Zur Bestimmung des organischen Anteils wird für einen Teil der Trockenprobe der Glühverlust nach DIN 815 bestimmt. Die Probe wird bei Temperaturen von über 500°C in einem Muffelofen so lange geglüht, bis keine Gewichtsabnahme mehr festzustellen ist. Das Abkühlen der Proben erfolgt in einem Exsikkator.

Die Ergebnisse sind in der Tabelle 4.3 zusammengefasst.

## 4.5 Bestimmung der Trockendichte

Zur Bestimmung der Trockendichte wurde ein Teil der Nassprobe in einem Trockenofen bei 105 °C getrocknet und dann gemahlen.

Die Bestimmung der Dichte von Sediment- und Schwebstoffproben mit einem gewöhnlichen Pyknometer erfordert oftmals viel Zeit und ist, wenn viele sehr kleine Porenräume vorhanden sind, oft nicht genau genug.

Das hier verwendete Gerät Pycnomatic ATC verwendet das Gas Helium zur Volumenbestimmung der Proben. Die Gasteilchen sind klein genug, um selbst in kleinste Porenräume (Porenweite  $10^{-10}$  m) vorzudringen und diese in die Bemessung einbeziehen zu können. Es ist auch möglich, mit dem Pyknomer die Dichte von Flüssigkeiten zu bestimmen.

In einem Pyknometer wird die Probe in eine Kammer eingebracht, aus der dann die Luft gepumpt wird. Aus einer zweiten mit einem Edelgas gefüllten Kammer wird nun das Edelgas in das Vakuum der Probenkammer gefüllt. Aus dem Druckverlust schließt die Software dieses



Abbildung 4.22: Ansicht des Pycnometers Pycnomatic ATC.

Messgeräts auf das Volumen der eingebrachten Probe. Über deren Gewicht und die Beziehung  $\rho = M/V$  lässt sich schließlich die Trockendichte ohne Hohlräume bestimmen.

Zu dem Gerät gibt es auch eine passende Software, um die Auswertung zu erleichtern. Die Verbindung zwischen PC und Gerät erfolgt über ein serielles Kabel an einem COM-Port.

Das Programm zeigt alle Aktionen an, die das Gerät macht und stellt die aktuelle Temperatur (in °C) sowie den Druck (in bar) dar. Auf dem Fließschema wird, wie am Gerät selbst, durch eine rote Leuchte grafisch dargestellt, welches Ventil offen ist. Nach einer Messung oder Kalibrierung kann der Report abgespeichert oder mit anderen Programmen digital weiterverarbeitet werden.

## 4.6 Rheometrie der Schlickproben

Das wichtigste Ziel der rheologischen Untersuchungen besteht darin, die Abhängigkeit der Viskosität nicht nur von der Scherrate sondern auch vom Feststoffanteil qualitativ und quantitativ zu bestimmen. Hierzu wurden alle Proben so mit Wasser verdünnt, dass sich Feststoffvolumenkonzentrationen von jeweils 5.5%, 7%, 8.5% und 10% einstellen. Alle Messungen wurden bei einer konstanten Temperatur von 20°C mit einem MCR 51-Rheometer der Firma Anton Paar durchgeführt.

Die Messung werden in einem Bereich der Scherrate  $\dot{\gamma}$  zwischen 0,0001 und 1000 1/s mit einer

Es funktioniert nach dem Searle-Prinzip, bei dem der Messkörper rotieren kann und die untere Platte fest ist. Vom Hersteller stehen verschiedene Messkörper bzw. Messsysteme zur

Kennung	Masse Probe g	Tiegel leer g	Tiegel trocken g	Tiegel gegläht g	TR	GV%	Rhotrocken $kg/m^3$
Ems 1	1,649	16,308	17,930	17,830	98,34	6,13	2606,18
Ems 2	2,403	26,926	29,269	29,100	97,49	7,21	2524,35
Ems 3	2,437	37,462	39,835	39,610	97,36	9,48	2525,01
Ems 4	2,089	27,982	30,037	29,908	98,39	6,29	2625,74
Ems 6	2,466	17,789	20,206	20,049	97,99	6,48	2602,46
Weser 1	2,170	29,012	31,146	31,036	98,32	5,14	2587,86
Weser 2	2,295	28,459	30,705	30,527	97,86	7,92	2595,82
Weser 3	1,525	13,041	14,423	14,397	94,45	8,27	2542,13
Weser 4	2,436	27,279	29,670	29,493	98,19	7,41	2585,80
Weser 5	1,625	14,040	15,623	15,477	97,48	9,22	2561,53

Tabelle 4.3: Gluehverluste und Sedimentdichte

Verfügung (unter anderem Platte-Platte, Kegel-Platte, Kugelmesssysteme).

Mit dem Gerät können sowohl Rotations- als auch Oszillationsversuche durchgeführt werden. Es sind schubspannungs-, scherraten- oder deformationsgeregelte Messungen möglich (CSS=controlled shear stress, CSR=controlled shear rate, CSD=controlled shear deformation). Die Tabelle 2.1 gibt einen Überblick über die Messmethoden.

Das Messgerät bietet sowohl Platte-Platte- und Platte-Konus-Einsätze.

Das Messgerät wird von dem Softwarepaket Rheoplus begleitet. Mit diesem steuert man sowohl das Messgerät und legt die Randbedingungen für die einzelnen Tests fest. Die Software ermöglicht ferner die Ergebnisse zu visualisieren und verschiedene rheologische Gesetze an die gemessenen Fließ- und Viskositätskurven zu fitten.

#### 4.6.1 Die Fließ- und Viskositätskurven

Betrachten wir zunächst die in Abbildung 4.23, links, dargestellte Fließkurve. Sie enthält die Abhängigkeit der erforderlichen Scherspannung von der Scherrate für die vier unterschiedlichen Verdünnungsstufen. Da die Scherung der Suspension umso schwieriger ist, je mehr Feststoffanteil die Probe enthält, stellt die oberste Kurve einen Feststoffgehalt von 10% dar, darunter folgen 8.5%, 7% und 5.5%.

Bleiben wir zunächst bei der oberen Kurve. Bei den ersten Messpunkten an der y-Achse wirkt wohl eine dort abzulesende Scherspannung, sie führt aber zu einer vernachlässigbar kleinen Scherrate. Hieraus lässt sich die Fließgrenze als die Scherspannung ablesen, bei der die Scherbewegung einsetzt. Ganz offensichtlich fällt die Fließgrenze mit abnehmendem Feststoffgehalt. Doch zurück zur obersten Kurve. Ist die Fließgrenze erst einmal überschritten, dann springt die Scherrate sofort auf. Dieses Verhalten ist vergleichbar mit dem einer leicht eingestroteten Schraube oder einem fest auf einem Konservenglas verschraubten Deckel, die wenn erst einmal durch ein starkes Moment gelöst, dann aber ruckartig viel zu schnell drehen. Ein entsprechendes ruckartiges Anspringen der Bewegung ist auch bei einem Feststoffgehalt von 8.5%, weniger bei 7% und 5.5% zu erkennen.

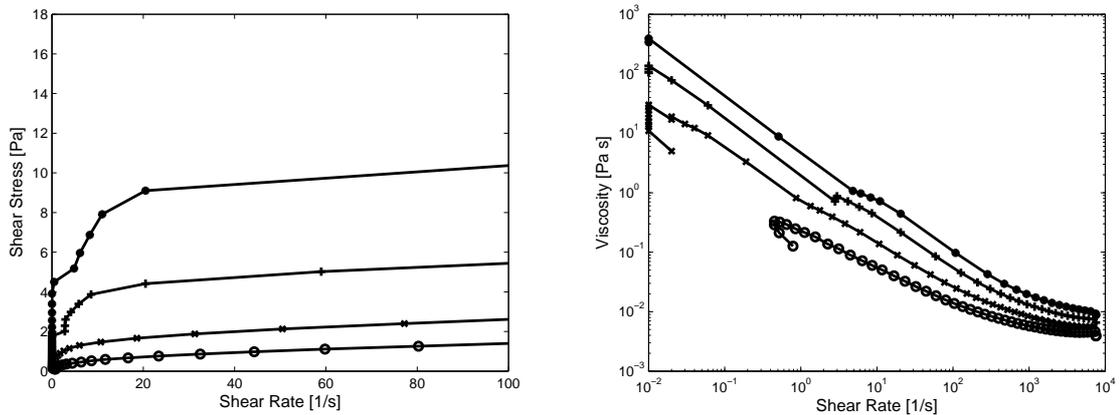


Abbildung 4.23: Fließ- und Viskositätskurve der Probe Ems 1.

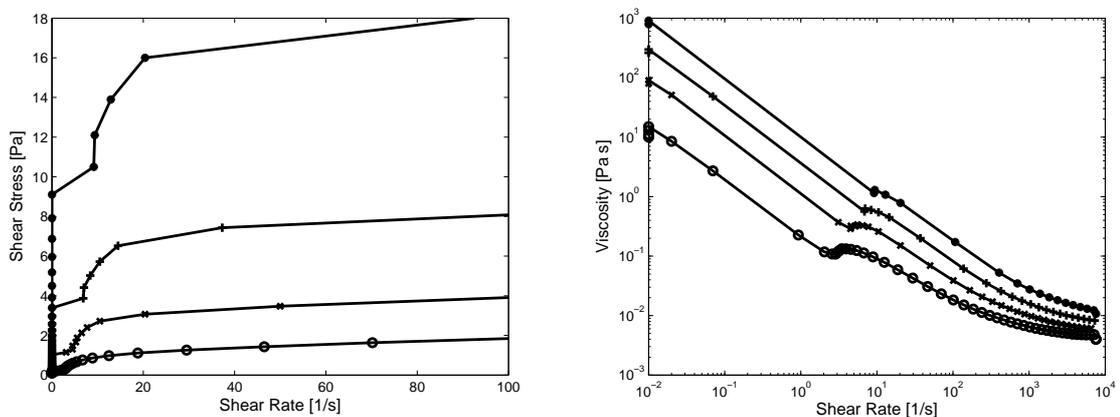


Abbildung 4.24: Fließ- und Viskositätskurve der Probe Ems 2.

Bei der weiteren Erhöhung der Scherspannung erfolgt zunächst ein sehr langsamer Anstieg der Scherrate. Dieser wird aber mit weiter zunehmender Scherspannung immer größer. Im Flüssigschlick werden also die inneren Strukturen gebrochen, so dass die Rotationsbewegung immer leichter von statten geht.

Vergleichen wir die einzelnen Proben untereinander so zeigt die Probe Ems2 die höchsten und die Probe Weser1 die niedrigsten Scherspannungen. Entsprechende Verhaltensauffälligkeiten sind für die Probe Ems2 in der Korngrößenverteilung, noch in der Trockendichte oder dem Glühverlust zu erkennen. Die Probe Weser1 hat allerdings auch den geringsten Glühverlust und den größten Tonanteil.

#### 4.6.2 Auswertung nach dem Bingham-Gesetz

Die Rheoplus-Software bietet die Möglichkeit, verschiedene rheologische Gesetze an die gewonnenen Messungen zu fitten. Die CSS-Messungen der Ems- und Weserschlicks zeigen

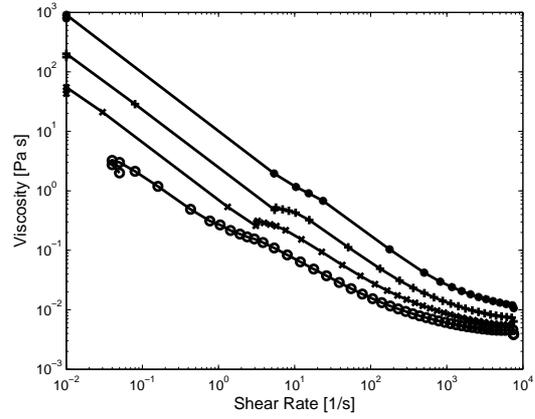
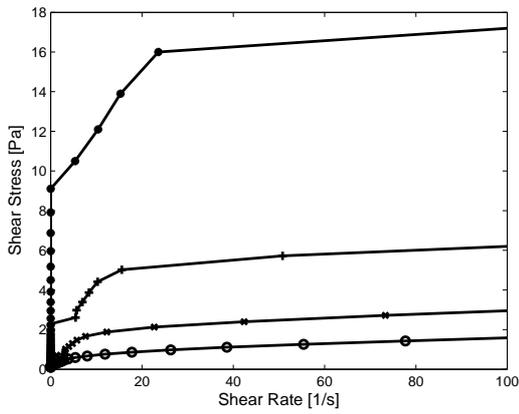


Abbildung 4.25: Fließ- und Viskositätskurve der Probe Ems 3.

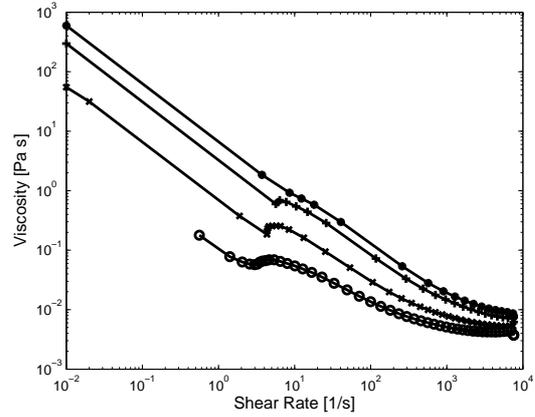
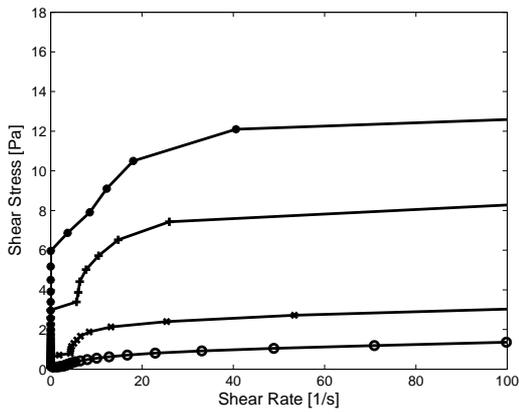


Abbildung 4.26: Fließ- und Viskositätskurve der Probe Ems 4.

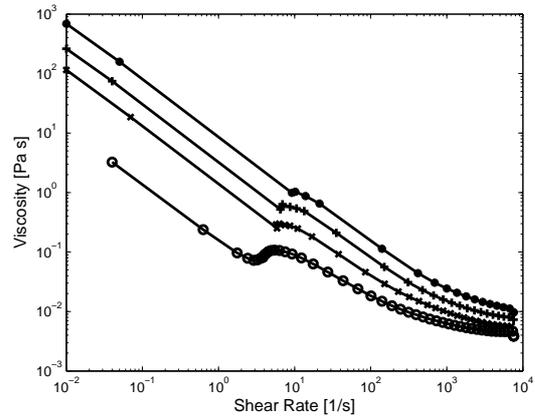
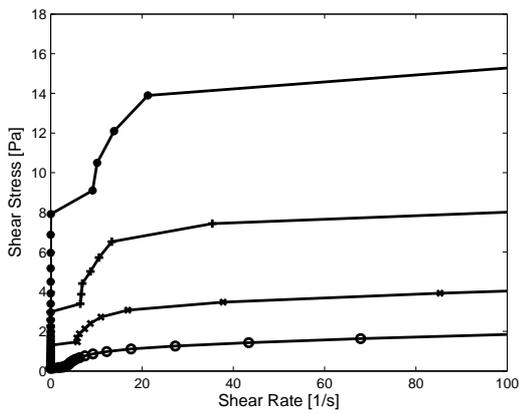


Abbildung 4.27: Fließ- und Viskositätskurve der Probe Ems 6.

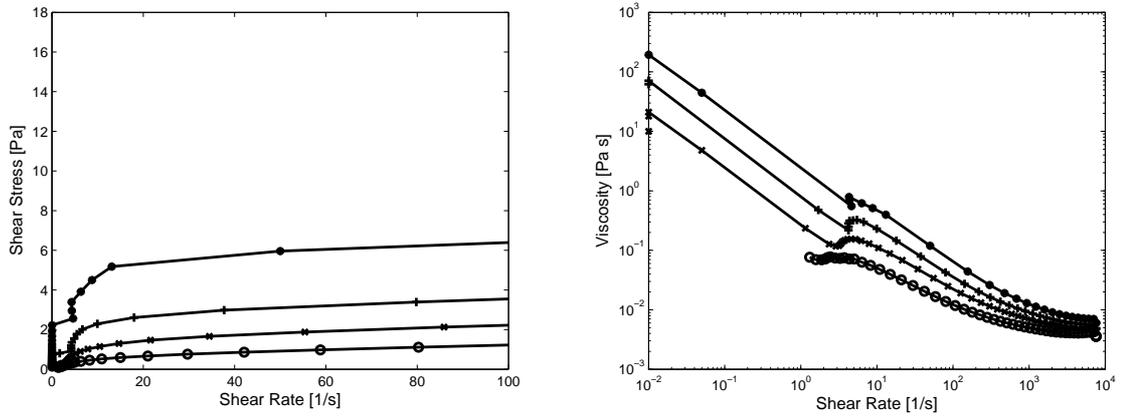


Abbildung 4.28: Fließ- und Viskositätskurve der Probe Weser 1.

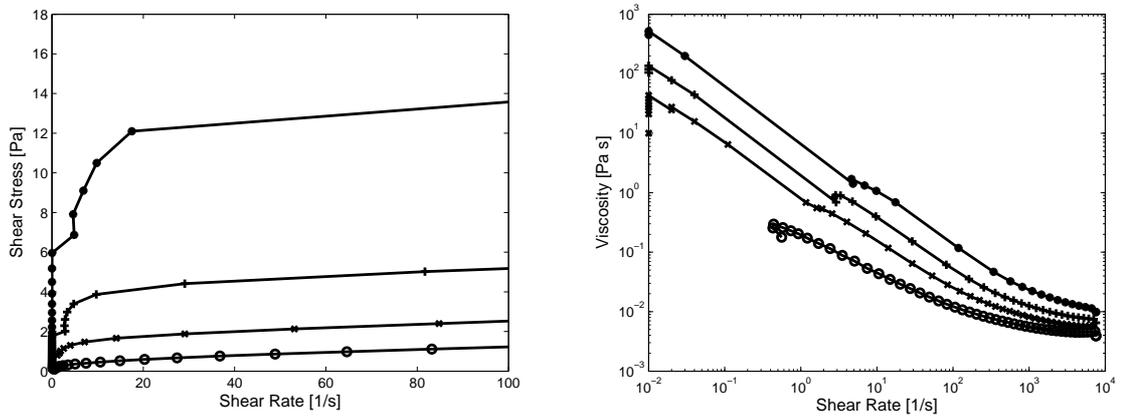


Abbildung 4.29: Fließ- und Viskositätskurve der Probe Weser 2.

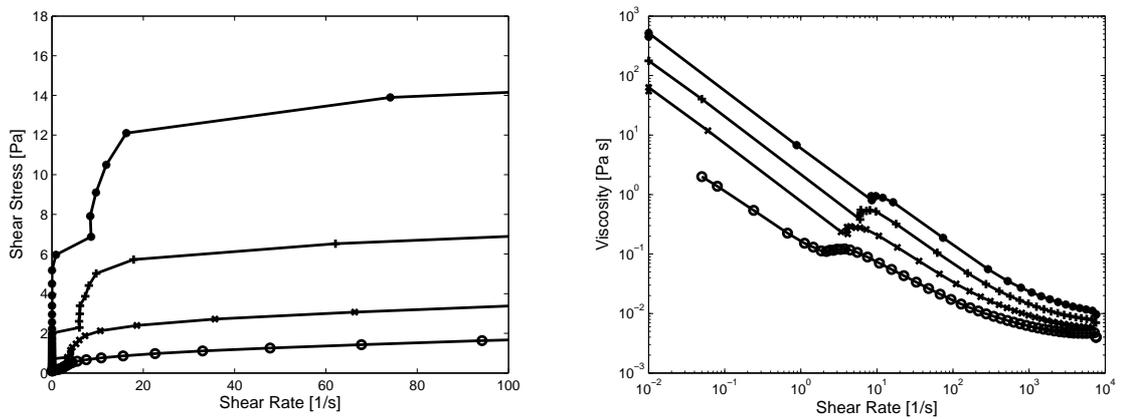


Abbildung 4.30: Fließ- und Viskositätskurve der Probe Weser 3.

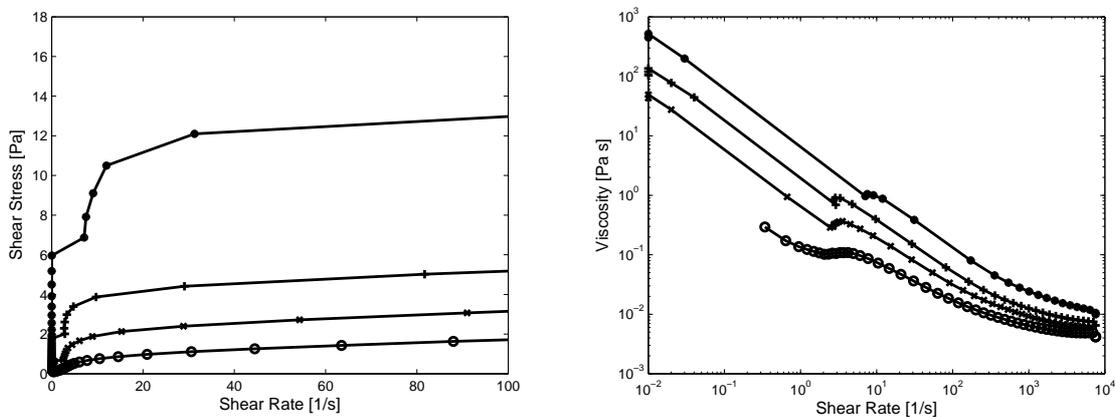


Abbildung 4.31: Fließ- und Viskositätskurve der Probe Weser 4.

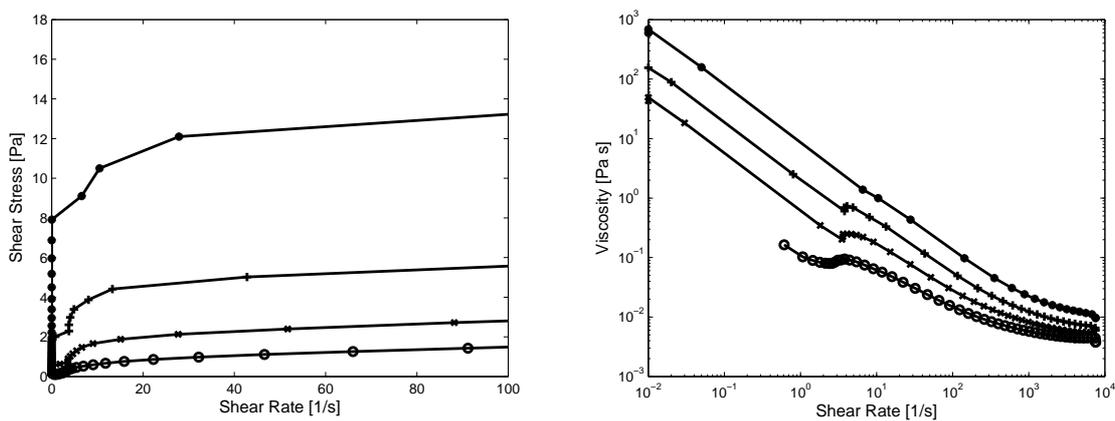


Abbildung 4.32: Fließ- und Viskositätskurve der Probe Weser 5.

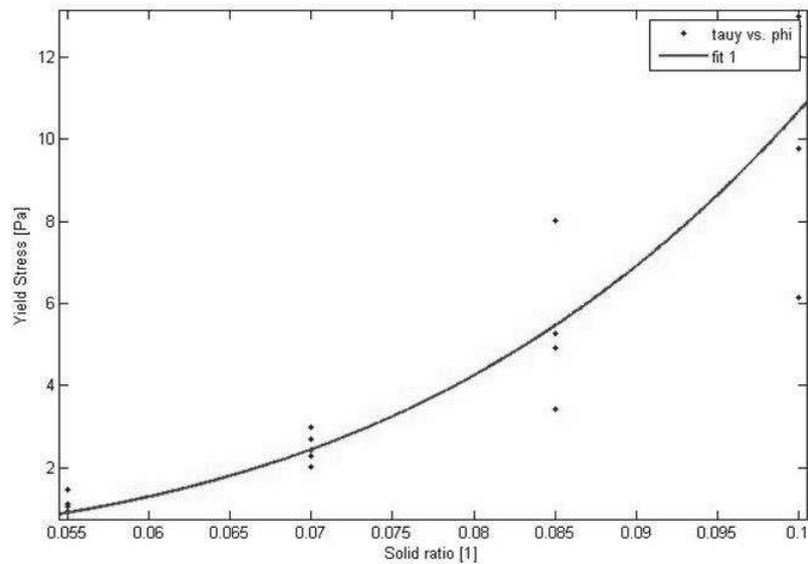


Abbildung 4.33: Die Fließgrenze der Ems- und Weserproben.

annähernd ein Bingham'sches Verhalten. Somit wurde dieses Modellgesetz an die Ergebnisse für die verschiedenen Verdünnungsgrade und die verschiedenen Proben gefittet. Die einzigen Fitparameter sind dabei die Fließgrenze  $\tau_y$  und die Binghamviskosität  $\mu_B$ , die anschließend für alle Proben gegen den Feststoffgehalt  $\phi$  aufgetragen wurden. Die Ergebnisse sind in den Abbildungen 4.33 und 4.34 dargestellt.

In diese Darstellung wurde für die Fließgrenze eine Potenzfunktion der Form

$$\tau_y = \tau_{y,0} (\phi - \phi_0)^n \quad \text{für } \phi > \phi_0$$

gefittet. Diese Darstellung nimmt an, dass der Schlick für  $\phi < \phi_0$  flüssig ist und keine Fließgrenze aufweist. Tatsächlich zeigen die sich so ergebenden Parameter

$$\tau_{y,0} = 144.7 \text{ kPa}$$

$$n = 4.132$$

$$\phi_0 = 1.8e-8$$

dass diese Schlicke schon bei geringstem Feststoffgehalt eine Fließgrenze aufweisen. Die Potenz von 4 wird von verschiedenen Autoren (so z.B. Migniot) bestätigt.

Für die Binghamviskosität wurde ein Exponentialgesetz der Form

$$\mu_B = \mu_0 \exp(a\phi)$$

gewählt. Hier ergeben mit den Parametern

$$\mu_0 = 1.8 \text{ mPa s}$$

$$a = 15.39$$

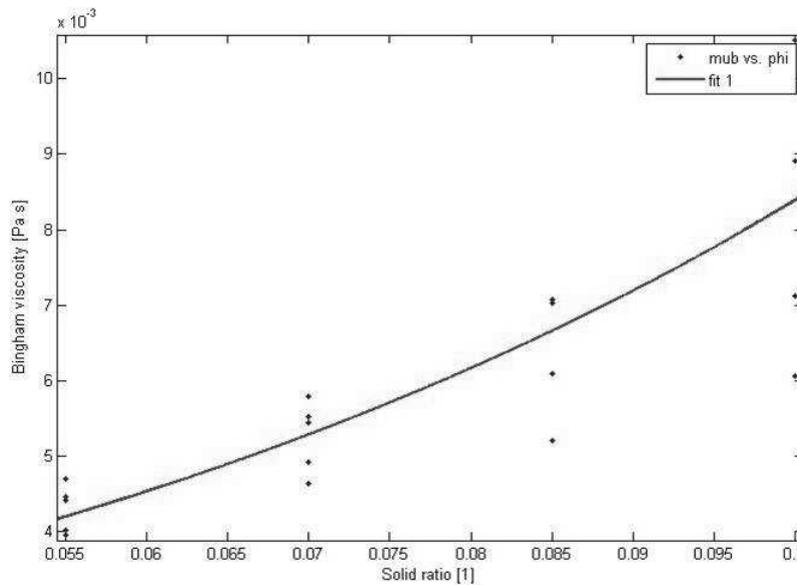


Abbildung 4.34: Die Binghamviskosität der Ems- und Weserproben.

für  $\phi = 0$  tatsächlich ein wasserähnliches Verhalten.

### Die Fließgrenze von Schlick

Die Fließgrenze hängt für Schlicke vom Feststoffgehalt  $\phi$  im Fluid ab. Nach Migniot [12] (Extrapolation der Ergebnisse eines Rotationsviskosimeters) steigt es mit der vierten Potenz der Feststoffkonzentration  $c = \rho_S \phi$ :

$$\tau_y = ac^4$$

Der Vorfaktor  $a$  hängt dabei sehr stark vom Ursprung des Materials ab. So ergeben sich 1.8 Pa bei 250 g/l und 50 Pa bei 500 g/l für einen Schlick aus La Vilaine und 0.002 Pa bei 250 g/l und 0.035 Pa bei 500 g/l für einen Schlick aus Calcaire.

Mit zunehmender Salinität zeigt sich zunächst ein Anstieg der Festigkeit, wobei sich ab 10 - 20 ‰ eine Sättigung einstellt, das Scherungsmodul also nicht mehr weiter ansteigt.

### 4.6.3 Auswertung nach dem Worrall-Tuliani Modell

Das Binghammodell bietet keine Möglichkeiten, die nichtlineare Abhängigkeit der Scherspannung von der Scherrate darzustellen. Daher soll hier auf das Worrall-Tuliani-Gesetz als Modell zur empirischen Beschreibung der gemessenen Daten zurückgegriffen werden.

Dazu wird angenommen, dass der Flokkulationsparameter  $\lambda_S$  sich immer in einem ausgeglichenen Zustand befindet. Dies ist dann erfüllt, wenn die Scherspannung im Rheometer nur hinreichend langsam erhöht wird. Dann galt nach Abschnitt 2.3.2:

$$\tau = \tau_y + \mu_\infty \dot{\gamma} + \frac{b_{floc} \Delta\mu \dot{\gamma}}{a_{break} \dot{\gamma} + b_{floc}}$$

In diesem rheologischen Modelle sind also insgesamt fünf Parameter als Funktion des Feststoffanteils  $\phi$  zu parametrisieren:

- Die Fließgrenze  $\tau_y$  sollte Null sein, wenn auch der Feststoffanteil  $\phi$  Null ist. Auch hier bietet sich der Zusammenhang

$$\tau_y = a_1 \phi^{b_1}$$

an, der von Migniot 1989 [13] vorgeschlagen wurde.

- Die Endviskosität  $\mu_\infty$  soll auch vom Feststoffanteil  $\phi$  abhängig sein. Bei einem Feststoffanteil  $\phi$  von Null soll sie der Viskosität des Wassers  $\mu_0$  entsprechen. Dies wird durch den Ansatz

$$\mu_\infty = \mu_0 \exp(a_2 \phi) \quad \text{mit} \quad \mu_0 = 0.001 \text{ Pa s}$$

erfüllt.

- Bei reinem Wasser mit einem Feststoffanteil  $\phi = 0$  sollte die Differenzviskosität durch Flokkulation ebenfalls Null sein. Wir nehmen eine lineare Zunahme mit dem Feststoffgehalt an:

$$\Delta\mu = b_2 \phi$$

- Auch die Parameter des Wachstums von Bindungen  $b_{floc}$  sollte stark, d. h. u. U. nichtlinear mit dem Feststoffgehalt steigen.

$$b_{floc} = a_4 \phi^{b_3}$$

- Die Zerstörung von Flocken durch die Scherung des Fluids sollte unabhängig vom Feststoffgehalt sein. Wir setzen hier:

$$a_{break} = a_3.$$

Insgesamt ergibt sich eine Fitfunktion der Form

$$\tau(\phi, \dot{\gamma}) = a_1 \phi^{b_1} + \mu_0 \exp(a_2 \phi) \dot{\gamma} + \frac{a_4 \phi^{b_3} b_2 \phi \dot{\gamma}}{a_3 \dot{\gamma} + a_4 \phi^{b_3}},$$

die nur noch von der Scherrate  $\dot{\gamma}$  und dem Feststoffanteil  $\phi$  abhängig ist.

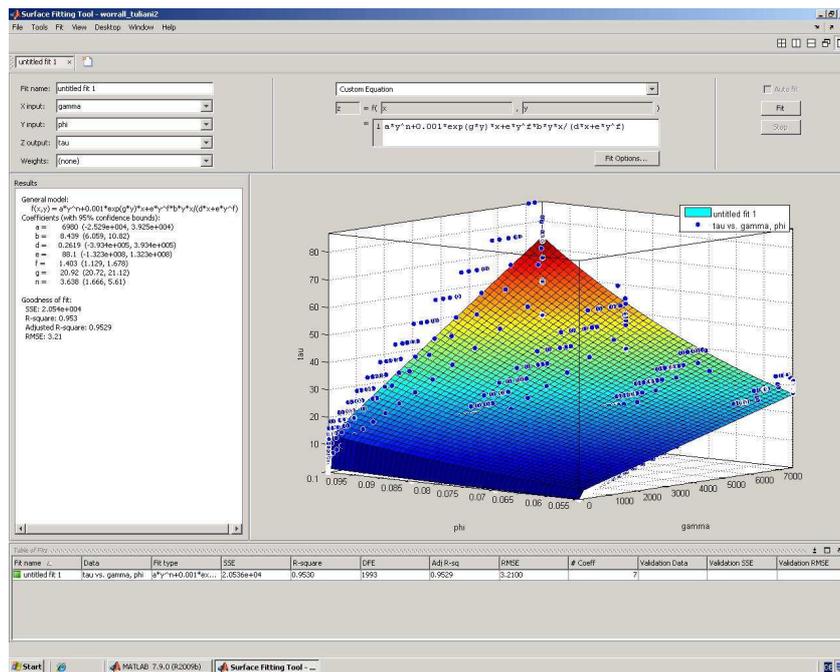


Abbildung 4.35: Die graphische Oberfläche des Surface Fitting Tools von Matlab.

## Surface Fitting mit MATLAB

MATLAB bietet mit dem Surface Fitting Tool ein komfortables Werkzeug, Funktionen mit zwei Variablen an entsprechende Datensätze zu fitten. Hier hat man neben verschiedenen Standardfunktionen auch die Möglichkeit, eigene Fitfunktionen ('Custom Equation') zu spezifizieren. Hierzu wurden alle in Weser und Ems gewonnenen Daten zu einem Datensatz zusammengefasst. Für diesen wurde die folgenden Abhängigkeiten gefunden:

- Die Fließgrenze lässt sich als

$$\tau_y = 6980 \text{ Pa } \phi^{3,638}$$

darstellen.

Die Potenz liegt dabei sehr nahe an der 4, die Migniot 1968 [12] vorgeschlagen hat. 1989 gibt er für die Potenz drei Fälle an. In der fluidischen Phase ist sie 3, während sie in der plastischen und der festen Phase 6 ist. Die Vorfaktoren sind dabei natürlich jeweils unterschiedlich.

- Für die Endviskosität  $\mu_\infty$  erhält man

$$\mu_\infty = \mu_0 \exp(20.92\phi),$$

wobei  $\mu_0$  wieder die Viskosität des Klarwassers ist.

- Die Differenzviskosität durch Flokkulation ist:

$$\Delta\mu = 8.439 \text{ Pa s } \phi$$

- Der Parameter  $a_{break}$  steuert das Zerbrechen von Flocken durch die Scherrate. Er ist:

$$a_{break} = 0.2619$$

- Der Parameter  $b_{floc}$  steuert das Flockenwachstum. Er ist:

$$b_{floc} = 88.1 \text{ Hz } \phi^{1.403}$$

### Validierung der Worall-Tuliani-Funktion für Schlick

Obwohl die Korrelation der so konstruierten Fitfunktion nach Worall-Tuliani mit den verwendeten Daten rund 95% beträgt, muss ihre Güte durch den Vergleich mit einzelnen Datensätzen validiert werden. In Abbildung 4.36 werden dazu die für den Datensatz Ems 5 gemessenen Schubspannungen mit der Fitfunktion verglichen, die ja für alle Daten gewonnen wurde. Die qualitative Übereinstimmung, d. h. der Verlauf der Schubspannung mit steigender Scherrate und die Zunahme mit steigendem Feststoffgehalt ist dabei sehr gut. In den absoluten Werten zeigen sich an manchen Stellen aber Abweichungen von bis 50%. Dennoch ist dieses Ergebnis zur quantitativen Erfassung der Rheologie eines Schlickes als sehr gut zu bezeichnen.

In Abbildung 4.37 sind die gemessenen im Vergleich zu den modellierten Viskositäten dargestellt. Auch hier wird das Verhalten qualitativ recht gut erfasst, wenn auch der Buckel zwischen 1 Hz und 10 Hz in den Messergebnissen nicht so detailliert wiedergegeben wird. Dieses Fehlverhalten kann aber darauf zurückgeführt werden, dass während der rheologischen Messungen kein Flokkulationsgleichgewicht erreicht wurde.

#### 4.6.4 Auswertung nach dem Oseen-Eilers-Ansatz

Der aus dem Widerstandsgesetz von Oseen und dem ... hergeleitete Ansatz

$$\mu = \mu_0 \frac{1 + A\phi(1 + Bd^2\dot{\gamma})}{1 + \phi/\phi_{max}}$$

benötigt neben der intrinsischen Viskosität  $A$ , dem Parameter  $B$  nur noch den maximalen Feststoffgehalt  $\phi_{max}$  als Fittparameter.

Für diesen Ansatz bekommt man mit dem sftool die Werte

$A = 48.82$

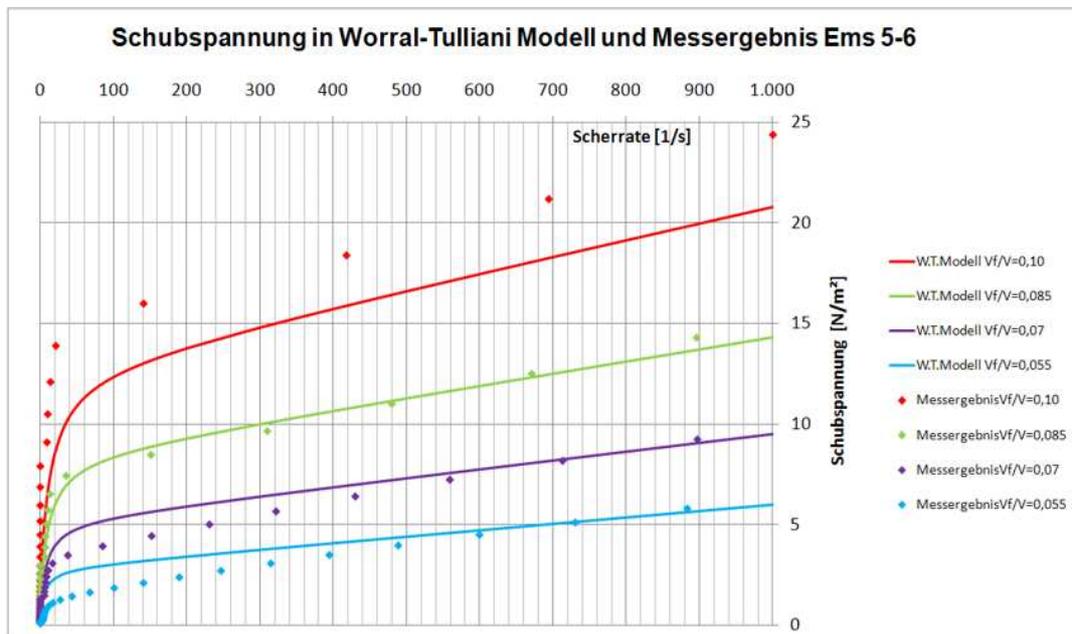


Abbildung 4.36: Schubspannung in Worrall-Tulliani Modell und Messergebnis Ems 5

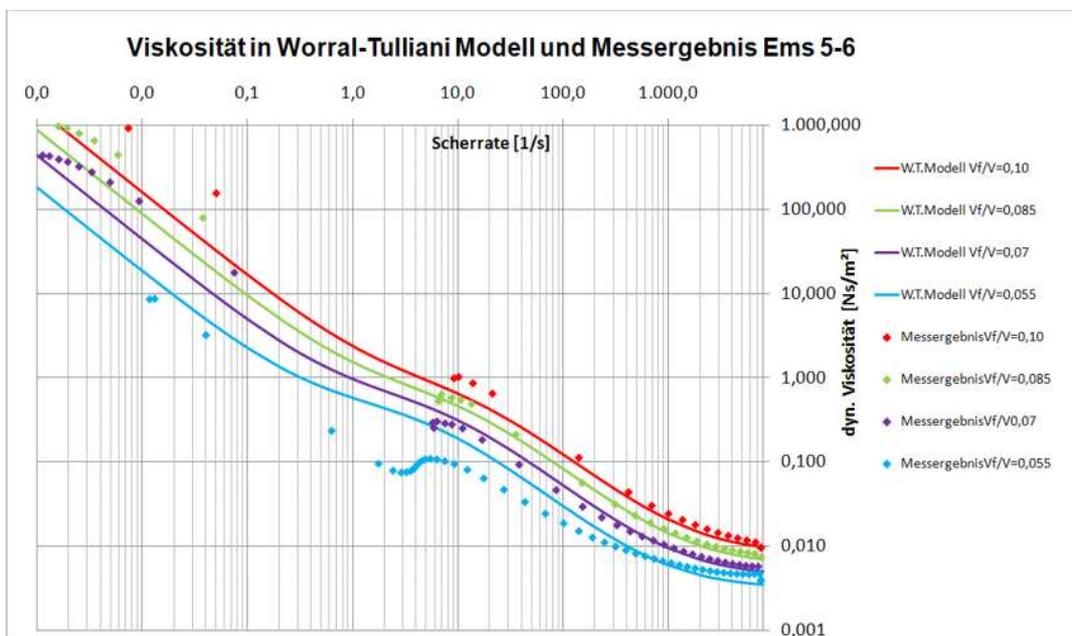


Abbildung 4.37: Viskosität in Worrall-Tulliani Modell und Messergebnis Ems 5

# Kapitel 5

## Konsolidierung

Setzungen entstehen im wesentlichen aus der Zusammendrückung des Bodens infolge einer Verringerung des Porenvolumens. Bei nichtbindigen Böden ist die Durchlässigkeit so groß, dass das Porenwasser sofort entweichen kann, d.h. die Setzungen stellen sich fast augenblicklich mit der Lastaufbringung ein. Bei bindigen Böden dagegen ergibt sich wegen der geringen Durchlässigkeit nur ein langsames Entweichen des Porenwassers.

Dieser Abschnitt soll sich der Beschreibung der physikalischen Modelle zur Konsolidierung widmen.

Für den Fall, dass der Boden wassergesättigt und der Spannungszustand in jedem vertikalen Schnitt gleich ist, kann das Porenwasser nur in vertikaler Richtung entweichen. Man spricht dann von **eindimensionaler Konsolidierung**. Im folgenden werden nur hierzu konzeptionelle Modelle behandelt. Ob man mit diesen das Konsolidierungsverhalten von Schlickböden mit nicht-horizontalen Isopyknen beschreiben kann, kann erst der Vergleich numerischer Simulationsergebnisse mit der realen Schlickdynamik erweisen.

### 5.1 Das Prinzip der effektiven Spannung

Bevor wir damit beschäftigen, wieviel Zeit die vollständige Konsolidation benötigt, wollen wir uns den Endzustand anschauen und diesen genauer beschreiben. Hierzu müssen wir den Begriff der effektiven Spannung einführen.

#### 5.1.1 Die Verteilung der Auflast im Boden

Die Konsolidierungsdynamik eines ruhenden Schlicks oder Bodens wird durch die in jeder horizontalen Ebene wirkende Auflast  $\sigma(z)$  bestimmt. Sie ergibt sich aus der an der Bodenoberkante wirkenden Druck als:

$$\sigma(z) = p_S + \int_z^{z_S} \varrho_b g dz \quad \text{mit} \quad \varrho_b = \varrho n + \varrho_S(1 - n)$$

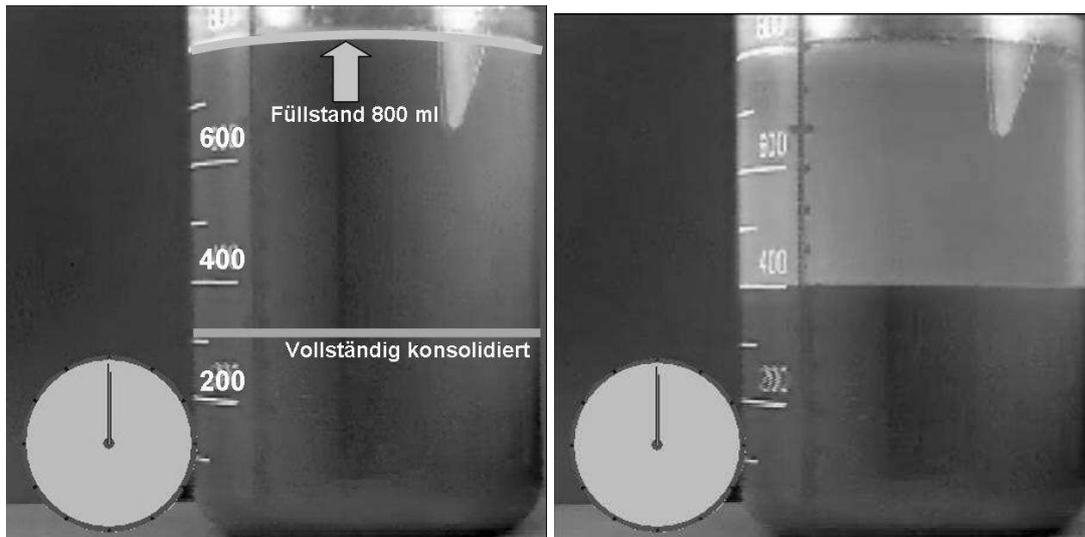


Abbildung 5.1: Messbecher mit einem Emsschlick, der zur Anfangszeit (linkes Bild) voll durchmischt ist. Nach 12 Stunden hat sich eine scharfe Trennlinie zwischen Schlick und Klarwasser herausgebildet, die im Laufe der Zeit nach unten wandert.

Diese Auflast muß sowohl durch den im Porenwasser wirkenden Porenwasserdruck  $p$  als auch durch die Übertragung in das Korngerüst aufgefangen werden. Diesen Anteil bezeichnet man als effektive Spannung  $\sigma'$ :

$$\sigma(z) = p(z) + \sigma'$$

### 5.1.2 Der Porenwasserüberdruck

Der vom Porenwasser aufgefangene Druckanteil kann in einen hydrostatische und in einen Porenwasserüberdruckanteil  $p_e$  (e wie engl. excess) zerlegt werden:

$$p(z) = p_S + \int_z^{z_S} \varrho g dz + p_e = p_S + \varrho g(z_S - z) + p_e$$

bzw.

$$p_e + \sigma' = \int_z^{z_S} (\varrho(n-1) + \varrho_S(1-n)) g dz = \int_z^{z_S} (\varrho_S - \varrho)(1-n) g dz$$

Der konsolidierte Zustand ist dadurch gekennzeichnet, dass der Porenwasserüberdruck vollständig abgebaut ist, d. h.  $p_e = 0$ .

Dieser Zustand wird also durch die Differentialgleichung

$$\frac{\partial \sigma'}{\partial z} = (\varrho - \varrho_S)(1-n)g = (\varrho - \varrho_S)\phi g$$

beschrieben. Um sie zu lösen, benötigen wir eine Beschreibung der effektiven Spannung im Boden oder im Schlick.

### 5.1.3 Die Bestimmung der effektiven Spannung

Prinzipiell werden die rheologischen Eigenschaften, aber auch die effektive Spannung und die Durchlässigkeit nur mit Prozessmodellen erklärt werden können, die die granulare Struktur des Fluid-Feststoffgemischs berücksichtigen.

Wir wollen hier ein konzeptionelles Modelle auf dieser Ebene vorstellen, welches dann zu entsprechenden Parametrisierungen für die makroskopischen Eigenschaften der granularen Suspension führen.

#### Das Korngerüst als selbstähnliches Fraktal

Wir hatten schon gesehen, dass viele Eigenschaften vom Porenvolumen bzw. Feststoffanteil abhängig sind. Diese fundamentale Größe kann erst dann berechnen, wenn man die geometrische Struktur des Korngerüsts kennt. In Anlehnung an die Aggregattheorie von Krone nimmt Merckelbach [11] diese als aus selbstähnlichen Teilstrukturen zusammengesetzt.

Diese selbstähnlichen Strukturen können mit dem Begriff der fraktalen Dimension  $D$  klassifiziert werden. Diese gibt bei einem granularen Medium an, wie stark die Anzahl der Körner  $N$  des Radius  $R_P$  mit den Abmessungen des Betrachtungsraums  $R_a$  steigt. Ganz allgemein gilt dabei:

$$N \simeq \left( \frac{R_a}{R_P} \right)^D$$

Zwei einfache Beispiele mögen den Begriff der fraktalen Dimension  $D$  präzisieren. Reihen wir Perlen des Durchmessers  $R_P$  auf einer Kette der Länge  $R_a$  aneinander, so ist die Anzahl der Perlen,  $N = R_a/R_P$ , die Kette insgesamt also eine eindimensionale Struktur.

Füllt man einen schachbrettartigen Setzkasten mit Perlen auf, die genau ein Feld ausfüllen, so wächst die Anzahl der Perlen quadratisch mit der Feldbreite  $R_a$ ,  $N = (R_a/R_P)^2$ . Das Perlenschachbrett ist somit eine zweidimensionale Struktur.

Anders sieht dies mit der in Abbildung 5.2 dargestellten selbstähnlichen Struktur. Man kann selbst bestätigen, dass hier die Anzahl der Partikel mit der fraktalen Dimension  $D = 1.465$  steigt. Die Struktur ist also weder zwei- noch eindimensional. Tatsächlich kann man sie ja auch aus einem Netz aus Ketten zusammengesetzt denken.

#### Folgerungen für die effektive Spannung

Die effektive Spannung  $\sigma'$  kann man sich als das Produkt der Anzahl der Kornkontakte  $k$  pro Fläche und der pro Kontakt aufnehmbaren Kraft  $F_k$  vorstellen:

$$\sigma' = kF_k$$

Um die Kontaktdichte zu spezifizieren, betrachtet man die Anzahl der Kontakte  $K$  auf einer Grundfläche  $R_a^2$ :

$$\sigma' = F_k \frac{K}{R_a^2}$$

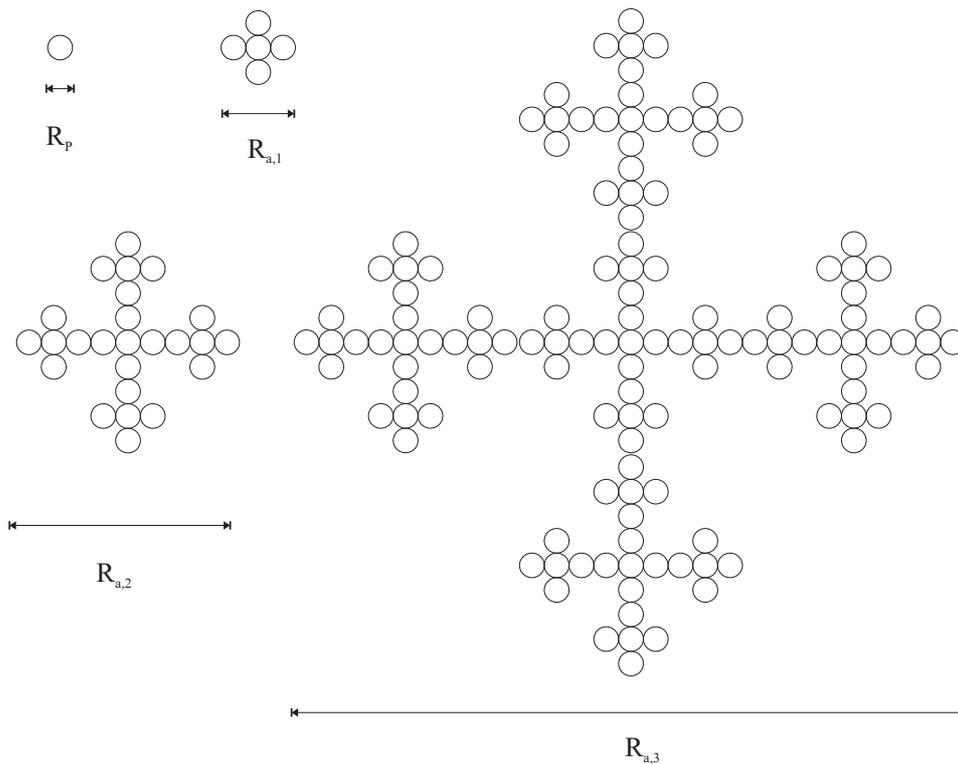


Abbildung 5.2: Zweidimensionale fraktale Struktur (aus: Merckelbach, 2000 [11]).

Ist die fraktale Dimension  $D$  der Suspension bekannt, so gilt für den Feststoffanteil

$$\phi \simeq \frac{R_a^D}{R_a^3} \Rightarrow R_a^2 \simeq \phi^{\frac{2}{3-D}}$$

und damit für die effektive Spannung:

$$\sigma' = F_k K \phi^{-\frac{2}{3-D}}$$

Die von Merckelbach erzielten experimentellen Ergebnisse lassen sich durch die Funktion

$$\sigma' \simeq A_\sigma \phi^{B_\sigma} - C_\sigma$$

reproduzieren, wobei  $A_\sigma$  Werte zwischen  $3.9 \cdot 10^8$  Pa und  $4.1 \cdot 10^9$  Pa annimmt, also im Bereich einer Zehnerpotenz schwankt.

Der Parameter  $B_\sigma$  schwankt zwischen 7.1 und 8.0, was mit einer fraktalen Dimension von  $D \simeq 2.75$  der Kornmatrix zusammenfällt. Der Wert  $C_\sigma$  ist für unkonsolidierten Schlick Null, nach längerer Konsolidierungszeit nahm er den Wert -300 Pa an.

Der Nutzen dieses konzeptionellen Modells besteht in der Erklärung der rationalen Potenzen in der Abhängigkeit der effektiven Spannung vom Feststoffanteil. Diese hat ihren Ursprung in der fraktalen Geometrie des Korngerüsts.

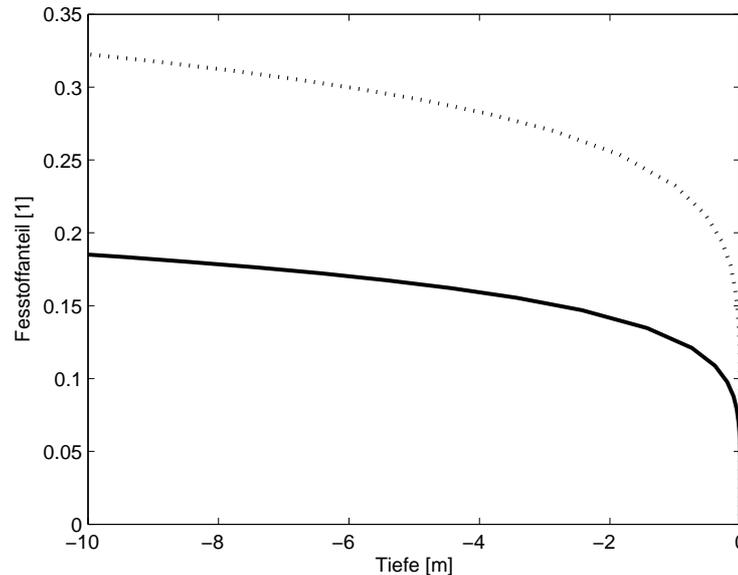


Abbildung 5.3: Tiefenprofile des Feststoffanteils im konsolidierten Endzustand bei einem Anfangswert von (nahezu) Null an der Bodenoberkante: Durchgezogen  $A_\sigma = 4.1 \cdot 10^9$  Pa,  $B_\sigma = 7.1$ ; gepunktet  $A_\sigma = 3.9 \cdot 10^8$  Pa,  $B_\sigma = 8$ .

### Weitere Ansätze für die effektive Spannung

Beim Ansatz von Terzaghi wird angenommen, dass

$$e = \frac{n}{1-n} = \alpha + \beta \log \sigma'$$

ist, wobei  $e$  die in der Geotechnik oft verwendete Porenziffer ist.

Toorman [18] gibt folgenden Ansatz an:

$$\frac{w_0}{g\Delta\rho_s} \frac{\partial\sigma'}{\partial z} = w_e(\phi)\phi + D_e(\phi) \frac{\partial\phi}{\partial z}$$

### 5.1.4 Das Porositätsprofil im konsolidierten Zustand

Setzt man den Ansatz von Merckelbach in die Differentialgleichung des konsolidierten Zustandes ein, dann wird das Porositätsprofil durch

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{(\rho - \rho_s)g}{A_\sigma B_\sigma} \phi^{2-B_\sigma}$$

Die Lösungen in Abbildung zeigen einen starken Anstieg des Feststoffgehalts unter der Bodenoberkante, der dann zunehmend abflacht.



Abbildung 5.4: Die Setzung eines Bodens kann durch Spezialmaschinen beschleunigt werden.

## 5.2 Das Darcysche Filtergesetz

Obwohl wir nun schon in der Lage sind, den Endzustand der Konsolidierung zu bestimmen, ist man in der Geotechnik und der Schlickdynamik vor allem an der zeitlichen Entwicklung der Konsolidierung interessiert. Da diese viel langsamer als die Errichtungszeit eines Bauwerks von statten geht, können Setzungsschäden auch weit nach der Fertigstellung eintreten.

In der Schlickdynamik ist man zumeist am umgekehrten Fall interessiert: Man will verhindern, dass ein Schlick in einem Hafen oder einem Stauraum erst konsolidiert, weil er dann mit erheblich mehr Aufwand zu entfernen ist.

Um die Dynamik der Konsolidierung in den Griff zu bekommen, müssen wir die Bewegung des Wassers in der Kornmatrix beschreiben.

### 5.2.1 Die schleichende Strömung

Die Bewegung des Wassers im Boden wird auf der mikroskopischen Ebene ebenfalls durch die Navier-Stokes-Gleichungen beschrieben. Da die Strömungsgeschwindigkeiten hier aber sehr klein sind, kann man von einer schleichenden Strömung ausgehen und  $\vec{u} \simeq 0$  setzen. Mit dieser für das Grundwasser oft angewendeten Vereinfachung enthält diese nur noch äußere Kräfte und den Druckgradienten:

$$0 = -n\vec{g} + \vec{f}_{int} - \frac{n}{\rho} \text{grad } p$$

Die Geschwindigkeit selbst kommt über die inneren Widerstandskräfte wieder ins Spiel. Denken wir uns den Boden als aus kugelförmigen Körnern des Durchmessers  $d$  zusammengesetzt, deren Widerstand im wesentlichen durch Druckanteile entsteht, so gilt die Stokessche Beziehung:

$$c_D = \frac{24}{Re} = \frac{24\nu}{ud} \Rightarrow F_W = \frac{12\nu}{d} A \rho u$$

Um sie hier anzuwenden, ist die Kraft in eine Kraft pro strömender Masse zu transformieren. Wir betrachten einen quaderförmigen Kontrollraum des Volumens  $d^3$ , in dem genau ein kugelförmiges Partikel enthalten sein soll. Dort ist das Fluidvolumen  $d^3n$  und somit die Fluidmasse  $\rho d^3n$  enthalten. Damit wirkt dem strömenden Fluid die Kraft pro Masse

$$f_{int} = -\frac{12\nu}{d^4n} Au$$

entgegen. Damit wird die Fließgeschwindigkeit durch die folgende Beziehung

$$\vec{u} = -n \frac{d^4n}{12\rho\nu A} (\rho\vec{g} + \text{grad } p)$$

beschrieben, die eine Form des Darcygesetzes darstellt.

### 5.2.2 Die Durchlässigkeit granularer Materialien

Es bleibt die Anströmfläche  $A$  zu bestimmen. Man kann sie in der Form

$$A = \text{const.} d^2 \frac{(1-n)^2}{n}$$

ansetzen und bekommt für die Filtergeschwindigkeit:

$$\vec{u} = -\frac{cd_p^2n^3}{\nu\rho(1-n)^2} (\text{grad } p + \rho\vec{g})$$

Damit erhält man für die Permeabilität die sogenannte Kozeny-Carman-Beziehung:

$$k = c \frac{g}{\nu} \frac{d_p^2n^3}{(1-n)^2} \quad \text{mit} \quad 0.003 < c < 0.0055$$

Dabei ist  $n$  die Porosität und  $d_p$  der mittlere Partikeldurchmesser. Wie man der Abbildung 5.5 entnehmen kann, besteht damit auch für die Durchlässigkeit eine starke Abhängigkeit von dem Partikeldurchmesser als auch der Porosität.

Natürliche Böden mit einer Durchlässigkeit kleiner als  $10^{-7}$  m/s verwendet man im Wasserbau als Dichtungsmaterialien für Staudämme, Kanäle und Deponien. Solche Durchlässigkeiten sind nach Abbildung 5.5 nur schwer zu erreichen. Natürliche Böden bestehen aber aus mehr oder weniger breiten Korngrößenverteilungen. Dabei ist die Durchlässigkeit umso geringer, desto breiter die Korngrößenverteilung ist, da in einem solchen Boden die kleinen Körner die Poren zwischen den großen Körnern auffüllen. Völlig wasserundurchlässige Böden kommen in der Natur praktisch nicht vor.

Die vorgestellten Fließbeziehungen gelten für Reynoldszahlen zwischen 1 und 10 im Bereich des laminaren Fließens. Für größere Reynoldszahlen existieren nichtlineare Beziehungen, wie etwa die von Ergun:

$$\frac{dp}{dx} = - \left( 150 \frac{(1-n)^2}{n^3 d_p^2} \nu_f \rho_f u_f + 1.75 \frac{(1-n)}{n^3 d_p} \rho_f u_f^2 \right)$$

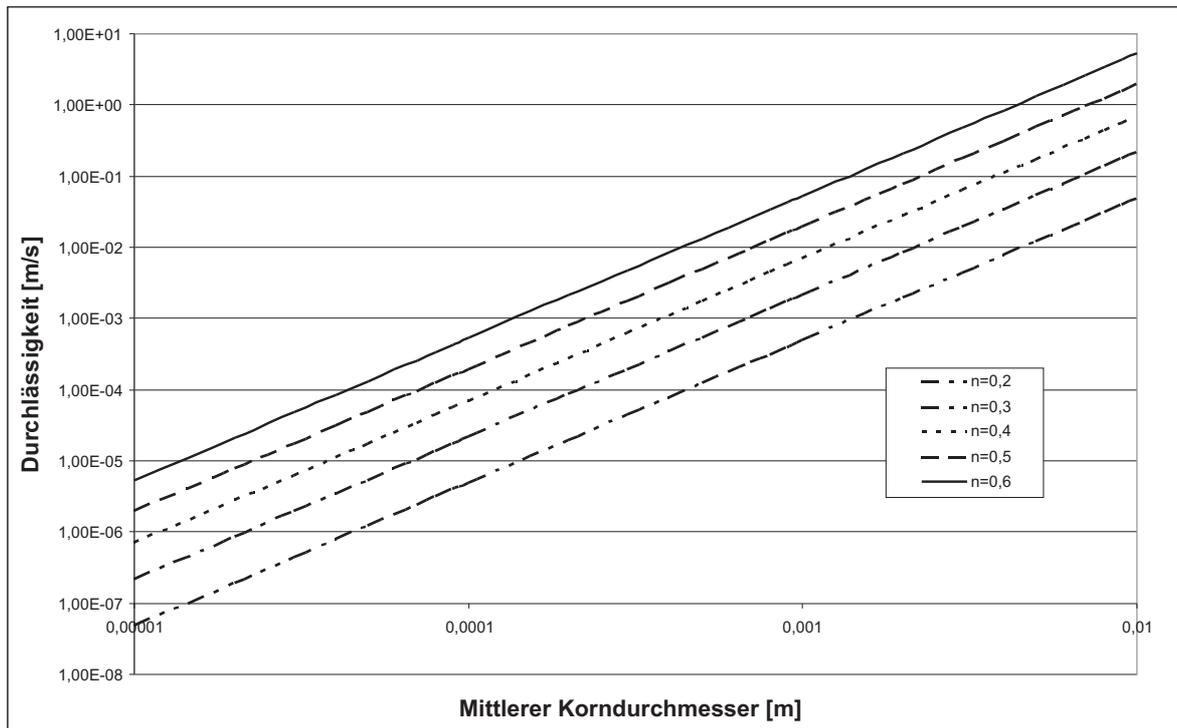


Abbildung 5.5: Die Kozeny-Carman-Beziehung für  $c = 0.004$ .

Der erste Term der Ergun-Beziehung ist bis auf den Vorfaktor identisch mit der um die Kozeny-Carman-Beziehung erweiterte Darcy-Gleichung. Er beschreibt also den laminaren Fließbereich, während der zweite Term erst bei großen Fließgeschwindigkeiten im turbulenten Bereich zur Geltung kommt.

### 5.2.3 Die Standrohrspiegelhöhe

Das Darcygesetz wird vor allem zur Berechnung von Grundwasserströmungen angewendet: Unter der Erdoberfläche befindet sich der Sickerraum, d.h. die ungesättigte Bodenzone, in der die Hohlräume mit Luft und Wasser gefüllt sind. Durch die Wirkung der Gravitation sickert das Wasser nach unten, so dass mit zunehmender Tiefe der Wasseranteil immer größer wird und schließlich alle Poren füllt. Als Grundwasser bezeichnet man das Wasser, das die Hohlräume im Boden vollständig ausfüllt.

Den Grundwasserstand bestimmt man durch Grundwassermeßstellen. Diese bestehen aus einem Peilrohr, welches senkrecht in den Boden eingelassen ist. Am unteren Ende ist die Bewandung des Peilrohres wasserdurchlässig. Entsprechend dem Grundwasserdruck stellt sich im Peilrohr ein Wasserspiegel ein, den man als Standrohrspiegelhöhe bezeichnet. Bei freiem Grundwasser stellt sich die Standrohrspiegelhöhe auf Grundwasserniveau ein, bei gespanntem Grundwasser zeigt der Wasserstand im Standrohr das Druckniveau an.

Um die Standrohrspiegelhöhen in verschiedenen Regionen vergleichen zu können, werden sie

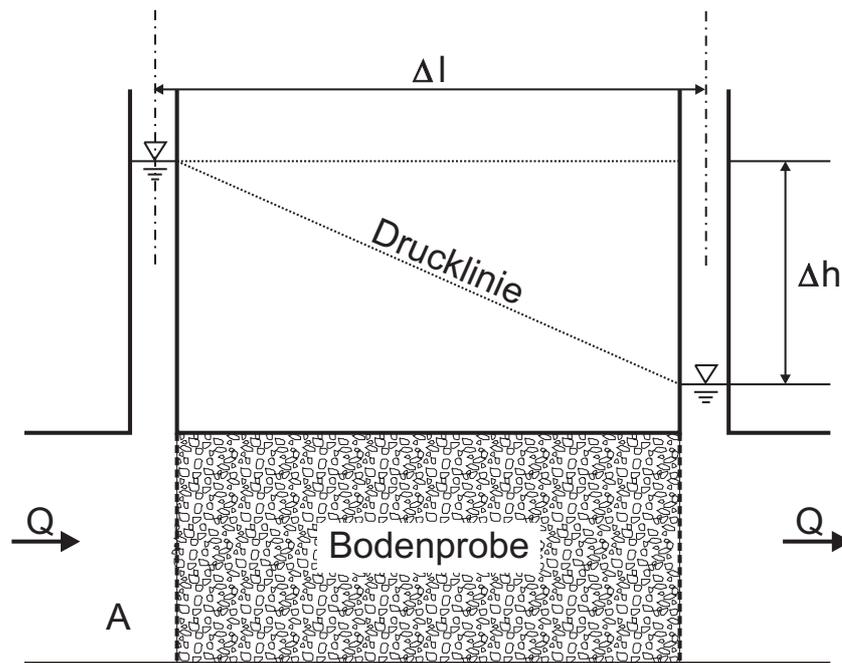


Abbildung 5.6: Der Versuch von Darcy zur Filtergeschwindigkeit.

auf ein einheitliches Niveau, dem Normalnull (NN) bezogen. Die Standrohrspiegelhöhe ist also eine skalare Funktion der horizontalen Koordinaten (Rechtswert  $x$ , Hochwert  $y$ ) und der Abgrifftiefe  $z$ ,  $h = h(x, y, z)$ .

Befindet sich über dem Boden ein Gewässer, so ist die Standrohrspiegelhöhe dort ganz einsichtig die Lage der freien Oberfläche des Gewässers.

Aus der Standrohrspiegelhöhe kann man den im Porenwasser wirkenden Druck direkt aus der hydrostatischen Druckbeziehung als:

$$p = \rho g h$$

berechnen.

#### 5.2.4 Das Filtergesetz von Darcy

Darcy untersuchte 1856 die stationäre Durchströmung verschiedener Bodenarten. Die Versuchsanordnung ist in Abbildung 5.6 dargestellt: Durch ein Rohr der Querschnittsfläche  $A$  wird ein Volumenfluß  $Q$  gedrückt. Zur Durchströmung der Bodenprobe ist eine Druckdifferenz erforderlich, die man an zwei Steigrohren vor und hinter der Bodenprobe ablesen kann. In diesen beiden Steigrohren stellen sich also die Standrohrspiegelhöhen ein.

Als Ergebnis der Versuche stellte Darcy fest, dass das Standrohrspiegelgefälle proportional zur sogenannten Filtergeschwindigkeit  $u$  ist:

$$u = -k_f \frac{dh}{dx} = -\frac{k_f}{\rho g} \frac{dp}{dx}$$

wobei  $k_f$  der Durchlässigkeitsbeiwert (in [m/s]) ist. Die Filtergeschwindigkeit ist eine auf den Durchfluss  $Q$  bezogene, idealisierte Geschwindigkeit, die im Darcyversuch durch

$$u = \frac{Q}{A}$$

definiert ist. Die einzelnen Wassermoleküle bewegen sich viel schneller als die Filtergeschwindigkeit, da sie einen verschlungenen Weg um die vielen Körner des Bodens nehmen, diese tatsächliche Bewegungsgeschwindigkeit ist die Bahngeschwindigkeit.

Dieses Darcygesetz gilt natürlich so nicht für die vertikale Bewegung des Grundwassers, da es bei einem ebenen horizontalen Grundwasserspiegel durch den nach unten zunehmenden Druck ein vertikales Fließen vorhersagen würde. Hier muß die Darcybeziehung um die Gravitationskraft erweitert werden:

$$\vec{u} = -k_f (\text{grad } h + \vec{e}_z) = -\frac{k_f}{\rho g} (\text{grad } p + \rho \vec{g}) = -\frac{k_f}{\rho g} (\text{grad } p_e)$$

Im Fall einer hydrostatischen Druckverteilung im Grundwasser weist dieses nun keine Vertikalgeschwindigkeiten mehr auf.

Der Durchlässigkeitsbeiwert  $k_f$  schwankt je nach Bodenart in weiten Grenzen, er ist zudem von den Eigenschaften des Bodens und von den Eigenschaften des Fluids abhängig, als Materialkonstante also denkbar ungeeignet. Daher versucht man durch die Einführung der Permeabilität die beiden voneinander zu trennen. Es ist dabei davon auszugehen, dass sich das Fluid umso leichter durch die Kornmatrix des Bodens bewegt, desto geringer seine Viskosität ist. Die Permeabilität ist damit als

$$k = \frac{k_f \nu_f}{g} \Rightarrow \vec{u}_f = -\frac{k_f}{\rho g} \text{grad } p = -\frac{k}{\nu_f \rho} \text{grad } p$$

definiert.

### 5.2.5 Die Bewegung des Wasser bei der Konsolidierung

Wir wollen das Darcygesetz und den Zusammenhang für die effektive Spannung nach Merckelbach dazu verwenden, ein einfaches Modell für die Konsolidierung zu gewinnen, welches die Verdrängungsströmung im unkonsolidierten Schlick berechnet.

Der Überdruck im Porenwasser wird durch das Entweichen desselben nach dem Darcyschen Filtergesetz

$$w = -k \left( \frac{1}{\rho g} \frac{\partial p_e(z)}{\partial z} \right)$$

abgebaut, wobei  $k$  die Durchlässigkeit des Bodens ist. Zusammen mit der Kontinuitätsgleichung für das Porenwasser

$$\frac{\partial n \rho}{\partial t} + \text{div} (n \rho \vec{u}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial n}{\partial t} + \text{div} (n \vec{u}) = 0$$

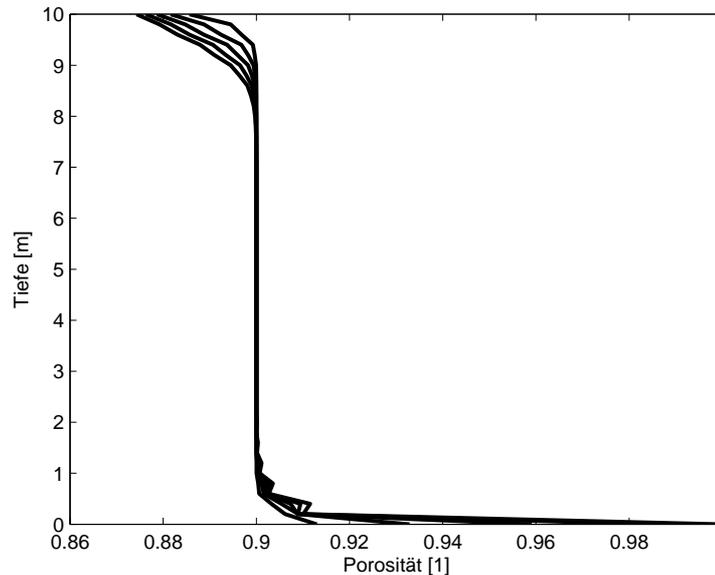


Abbildung 5.7: Porositätsprofile (nach jeweils 2000 s) bei Konsolidierung durch Darcy'sche Fluidbewegung für einen Schlick ( $d = 20 \mu\text{m}$ ) bei einer Anfangsporosität von 0.9. Der Konsolidierungsprozess ist in dieser Absetzsäule noch lange nicht abgeschlossen.

hat man dann ein vollständiges Modell zur Beschreibung der Konsolidierung. Die Simulationsergebnisse in der Abbildung 5.10 sind die Simulationsergebnisse des entsprechenden MATLAB-Modells zeigen das typische Konsolidationsverhalten in einer Absetzsäule. An der Wasseroberfläche bei  $z = 0$  erreicht die Porosität schnell den Wert 1, es bildet sich eine dünne Klarwasserschicht aus. Der steile Sprung von der Klarwasserschicht in den Schlickbereich wird im numerischen Modell von kleinen Oszillationen begleitet. Am Boden der Absetzsäule steigt dagegen der Feststoffgehalt über einen weiteren Bereich kontinuierlich an.

### 5.3 Die klassische Terzaghitheorie

In seiner klassischen Konsolidierungstheorie nimmt Terzaghi das Korngerüst des Bodens als elastisch an und kann so die effektive Spannung bestimmen. Seine Modellvorstellung vom Boden sieht folgendermaßen aus:

In einem zylindrischen Gefäß befinden sich übereinander angeordnet mehrere gelochte Platten, die untereinander mit Federn verbunden sind. Die Platten stehen für das Korngerüst, die Federn für die Elastizität desselben und die Löcher für die Porenkanäle des Bodens. Die Zwischenräume sind vollständig mit Wasser gefüllt. Nun wird die so dargestellte Bodenprobe belastet. Damit sich die Belastung auf die Feder, also das Korngerüst, auswirkt, muss diese verkürzt werden. Dazu aber muss das Wasser entweichen. Da dieser Vorgang nur allmählich erfolgen kann, kann auch die Feder nur allmählich verkürzt werden. So wirkt die aufgebrachte Last nur auf das Porenwasser und ruft einen ebenso großen Anstieg des Porenwasserdruckes

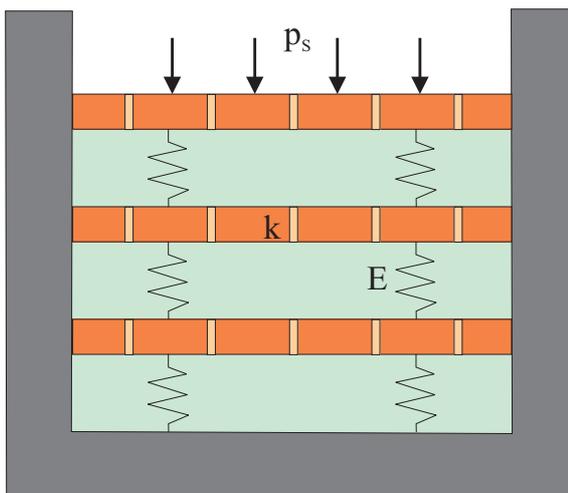


Abbildung 5.8: Konzeptionelles Modell von Karl von Terzaghi zur Konsolidierung gesättigter Böden.

hervor.

Zu einem späteren Zeitpunkt ist bereits Wasser durch die Löcher der oberen Platten gepresst worden. Es hat damit eine Zusammendrückung bzw. Verkürzung der oberen Federn stattgefunden, wohingegen die Lage der unteren Platten unverändert geblieben ist. Das bedeutet, dass oben ein Teil der Belastung von den Federn getragen wird, wodurch sich dort der Wasserdruck vermindert. Mit der Zeit wird der hydrostatische Druck immer geringer, bis schließlich bei einer Zusammendrückung die gesamte Belastung von den Federn getragen wird und die Spannung im Wasser infolge der Belastung null ist.

Die Zeitspanne von der Aufbringung der Belastung bis zum vollständigen Abbau der Spannungen im Wasser hängt davon ab, wie schnell das Wasser durch die Öffnungen in den Platten ausströmen kann, bzw. wie groß die Durchlässigkeit des Bodens ist.

Um den Konsolidierungsvorgang mathematisch erfassen zu können, wurden von Terzaghi folgende vereinfachende Annahmen getroffen:

- Der Boden ist vollkommen wassergesättigt
- Das Wasser und der Boden sind inkompressibel, d.h. Volumenänderungen gibt es nur infolge von Verformungen des Korngefüges
- Es handelt sich um kleine Verformungen, die linear von den effektiven Spannungen abhängen (Hookesches Gesetz)
- Die Wasserbewegung gehorcht dem Gesetz von Darcy,
- Die Belastung wird plötzlich aufgebracht und bleibt über die Zeit konstant
- Der belastete Boden kann sich in horizontaler Richtung weder dehnen noch Porenwasser abgeben

Das Modell geht von der infinitesimalen Betrachtung eines einzelnen Punktes in einer Absetzsäule aus. Ist an dieser Stelle der vertikale Geschwindigkeitsgradient von Null verschie-

den, so tritt an diese Stelle mehr Wasser ein als aus, oder umgekehrt. Ein Bodenelement der Höhe  $\Delta z$  wird dadurch um den Betrag

$$\Delta \xi_z = \Delta z \frac{\partial w}{\partial z} \Delta t \Rightarrow \epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \Delta t = -\frac{1}{\rho g} \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial p_e(z)}{\partial z} \right) \Delta t$$

in der Zeit  $\Delta t$  gestaucht oder gedehnt.

Die mit der Bewegung des Wassers verbundenen Verformung ergibt sich für  $\Delta t \rightarrow 0$  als:

$$\frac{\partial \epsilon_{zz}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho g} \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial p_e(z)}{\partial z} \right)$$

Man nehme an, dass sich die Kornmatrix elastisch verhalte, die effektive Spannung also linear nach dem Hookeschen Gesetz mit der Kontraktion zunimmt:

$$E \epsilon_{zz} = \sigma'$$

$E$  ist dabei das Elastizitätsmodul der Kornmatrix. Dann erhält man für die zeitliche Änderung der Kontraktion

$$\frac{\partial \epsilon_{zz}}{\partial t} = \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma'}{\partial t} = \frac{1}{E} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \frac{\partial p_e}{\partial t} \right) = -\frac{1}{E} \frac{\partial p_e}{\partial t}$$

und schließlich für den Porenwasserdruck die Differentialgleichung

$$\frac{\partial p_e}{\partial t} = \frac{E}{\rho g} \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial p_e}{\partial z} \right) := C_v \frac{\partial^2 p_e}{\partial z^2} \quad (5.1)$$

Der Abbau des Porenwasserüberdrucks kann somit durch eine Diffusionsgleichung beschrieben werden. Die hergeleitete Gleichung stellt eine partielle, lineare und homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung zur Beschreibung des eindimensionalen Konsolidationsvorganges dar. Der darin definierte Konsolidierungsbeiwert ist als zusammengesetzte Größe im Laufe des Konsolidierungsprozesses allerdings nicht konstant.

### 5.3.1 Die Elastizitätseigenschaften von Böden und granularer Materie

Die zweite Größe, die zur Schließung der Terzaghitheorie benötigt wird, ist die Elastizität eines Schlicks bzw. Bodens. Die Elastizitätstheorie ist eine der grundlegenden geschlossenen Theorien zur Beschreibung der Reaktion von Materialien auf äußere Belastungen. Sie nimmt dabei an, dass ein Material sich proportional (und somit auch reversibel) zu den äußeren Belastungen verformt. Werden sie wieder entlastet, so bildet sich die Verformung vollständig zurück, sie nehmen also ihre ursprüngliche Form an. Für elastische Körper mit verschwindender Querkontraktion gilt das Hookesche Gesetz

$$\tau_{ik} = E \epsilon_{ik}$$

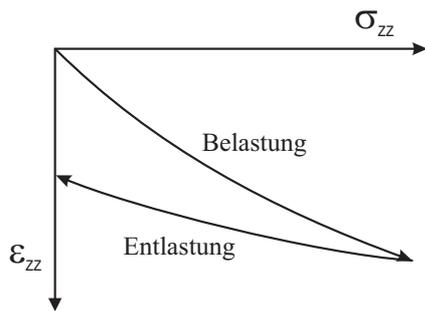


Abbildung 5.9: Drucksetzungsdiagramm eines Bodens.

Bei der langsamen Be- und Entlastung von Böden ist allerdings kein reversibles, sondern das in Abbildung 5.9 dargestellte Verhalten zu verzeichnen. Böden weisen somit plastische und elastische Reaktionen auf.

Will man dieses elastisch-plastische Verhalten dennoch im Rahmen einer rein elastischen Theorie behandeln, so muß man sich von der Modellvorstellung eines konstanten Elastizitätsmodul  $E = \sigma/\epsilon$ , welches man in der Geotechnik als Steifemodul bezeichnet, verabschieden und dieses als

$$E = \frac{d\sigma_{ik}}{d\epsilon_{ik}}$$

definieren. Dabei ist die Auflast  $\sigma$  gleich der effektiven Spannung, da die Kontraktion erst nach der Endsetzung gemessen wird, der Porenwasserüberdruck sich also vollständig abgebaut hat. Da die Kontraktion  $\epsilon$  durch eine Verdrängung der Poren aus dem Bodenzustand kommt, hängt diese direkt mit dem Porenanteil bzw. der Porenzahl  $e$  zusammen. Man kann zwischen diesen beiden sehr schnell den Zusammenhang

$$e = e_0 - \epsilon_z(1 + e_0)$$

herleiten. Ferner gibt es einen empirischen Zusammenhang zwischen der Porenzahl  $e$  und der Auflast  $\sigma_z$  in der Form

$$e = e_0 - C_c \ln \frac{\sigma_z}{\sigma_{z,0}}$$

worin  $C_c$  als Kompressionsbeiwert bezeichnet wird.

Zusammen ergeben diese beiden Beziehungen den Zusammenhang

$$\ln \frac{\sigma_z}{\sigma_{z,0}} = \epsilon_z \frac{1 + e_0}{C_c}$$

aus dem man die Formel

$$E = \sigma_z \frac{1 + e_0}{C_c}$$

für das Steifemodul eines Bodens herleiten kann.

<b>Bodenart</b>	<b>E [N/m<sup>2</sup>]</b>
Ton	1 ... 190 · 10 <sup>6</sup>
Geschiebemergel, fest	30 ... 100 · 10 <sup>6</sup>
Lehm	4...30 · 10 <sup>6</sup>
Schluff	3...10 · 10 <sup>6</sup>
Klei	2...5 · 10 <sup>6</sup>
Torf	0.4 ... 1 · 10 <sup>6</sup>

Tabelle 5.1: Steife(Elastizitäts)moduli verschiedener Böden.

Der Kompressionsbeiwert wird in der Geotechnik aus dem Wassergehalt  $w_L$  an der Fließgrenze nach Atterberg als

$$C_c = 0.003...0.004(w_L - 10\%)$$

abgeschätzt [16]. Damit sind die Elastizitätseigenschaften eines Bodens im Rahmen einer geotechnischen Untersuchung vollständig durch die Fließgrenze, den Wassergehalt und die Auflast bestimmt.

Die Theorie elastischer Stoffe wurde insbesondere zur Berechnung der Abnahme der Wellenenergie bei der Propagation über einen Schlickboden angewendet. Die Betrachtungen zeigten, dass erst die Kombination von elastischen und viskosen Eigenschaften die Veränderung der Welleneigenschaften über Schlickböden qualitativ vorhersagt [5].

### 5.3.2 Zur Anwendung der Terzaghitheorie

Nun haben wir alles vollständig, um die Terzaghitheorie auf ein einfaches Beispiel anwenden zu können. Dazu betrachten wir eine 1 m hohe Absetzsäule, die mit einer homogenen Suspension aus 90 % Wasser und 10 % Schluff ( $d = 10 \mu\text{m}$ ) gefüllt ist.

Setzt man das die Darcy'sche Filtergeschwindigkeit in die Kontinuitätsgleichung für die Wasserphase ein, dann bekommt man die beiden gekoppelten Differentialgleichungen

$$\frac{\partial p_e}{\partial t} = \frac{E}{\rho g} \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial p_e}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( n \frac{k_f}{\rho g} \frac{\partial p_e}{\partial z} \right)$$

welches man nach folgendem Algorithmis

1. Initialisierung der Porosität und des Porenwasserüberdrucks
2. Zeitschleife:
  - (a) Bestimmung der Durchlässigkeit  $k$

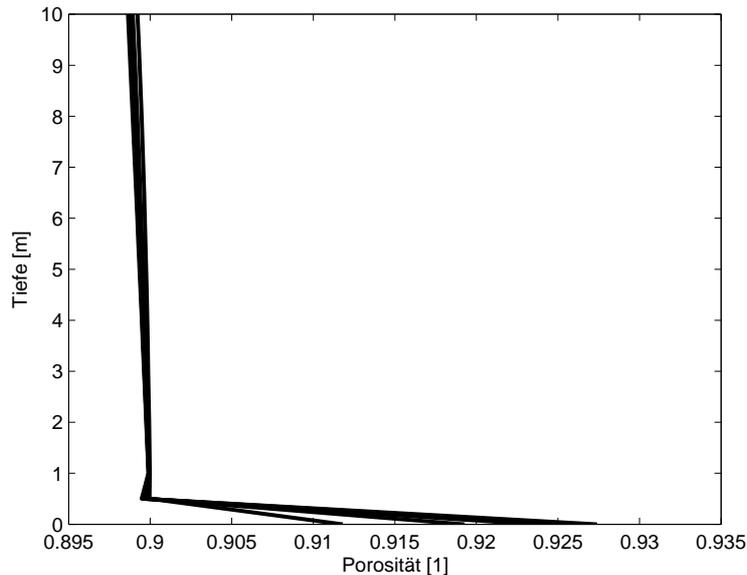


Abbildung 5.10: Porositätsprofile (nach jeweils 2000 s) bei Konsolidierung nach der Terzaghi-Gleichung in Kombination mit der Porenwasserkontinuitätsgleichung für einen Schlick ( $d = 20 \mu\text{m}$ ) bei einer Anfangsporosität von 0.9.

(b) gekoppelte Lösung der flüssigen Kontinuitäts- und der Darcygleichung.

recht komfortabel in MATLAB lösen kann.

Problematisch sind dabei die für die Terzaghi-Gleichung erforderlichen Randbedingungen für den Porenwasserüberdruck am Boden und an der Oberfläche der Absetzsäule.

### 5.3.3 Die Volumenerhaltung im Zweiphasensystem

In einem Zweiphasensystem aus Wasser und granularer fester Phase müssen beide Phasen getrennte Massenerhaltungsgleichungen erfüllen. Kommt keine weitere Phase (also etwa Luft in einem ungesättigten Boden) muss die Summe beider Phasenbewegungen Null sein, damit das inkompressible Volumen erhalten bleibt. Dies führt zu der Bedingung

$$\phi w_S + (1 - \phi)w = 0 \quad \text{bzw.} \quad (1 - n)w_S + nw = 0$$

wenn

$$\phi = 1 - n$$

der Feststoffanteil pro Volumen ist.

Das Darcy-Gesetz gilt dann streng genommen nur für die Relativbewegung von Fluid  $w$  und Feststoff  $w_S$ :

$$w - w_s = -k \left( \frac{1}{\rho g} \frac{\partial p_e(z)}{\partial z} \right)$$

Hier lässt sich entweder nun die Feststoffbewegungsgeschwindigkeit oder die Fluidbewegungsgeschwindigkeit substituieren und man bekommt:

$$w = -k(1 - n) \left( \frac{1}{\rho g} \frac{\partial p_e(z)}{\partial z} \right) \quad \text{bzw.} \quad w_s = nk \left( \frac{1}{\rho g} \frac{\partial p_e(z)}{\partial z} \right)$$

Berücksichtigt man dies in unserem Konsolidierungsmodell, bleiben die Porositätsprofile der Form nach gleich, lediglich die Geschwindigkeit des Konsolidierungsprozesses wird stark vermindert.

## 5.4 Konsolidierungstheorie nach Gibson

Zur Simulation der Konsolidationsdynamik benötigt eine Massenerhaltungsgleichung für die flüssige oder alternativ die granulare Phase und eine weitere Gleichung zur Bestimmung des den Prozess antreibenden Porenwasserüberdrucks. Bei Terzaghi wird hier ein elastischer Boden angenommen. In der Theorie von Gibson [7] wird dagegen ein funktionaler Zusammenhang für die effektive Spannung oder den Porenwasserüberdruck erforderlich.

Auch die Gibsontheorie ist noch eindimensional, betrachtet den konsolidierenden Boden also als eine Reihe von nebeneinander liegenden, nicht miteinander agierenden Absatzsäulen.

Zu ihrer Herleitung eliminieren wir im Ausdruck für die Bewegungsgeschwindigkeit der granularen Phase den Gradient des Porenwasserüberdrucks:

$$p(z) = \sigma(z) - \sigma'(z) \Rightarrow \frac{\partial p(z)}{\partial z} = \frac{\partial \sigma(z)}{\partial z} - \frac{\partial \sigma'(z)}{\partial z} = -g\phi\rho_s - g(1 - \phi)\rho - \frac{\partial \sigma'(z)}{\partial z}$$

Damit wird die Gleichung für die Vertikalgeschwindigkeit des Feststoffs zu:

$$w_s = \frac{(1 - \phi)k}{\rho g} \left( g\phi(\rho - \rho_s) - \frac{\partial \sigma'}{\partial z} \right)$$

Da wir nun einen expliziten Ausdruck für die Absatzgeschwindigkeit  $w_s$  des Feststoffs gefunden haben, können wir schließlich die infinitesimale Massenbilanz in der Vertikalen aufstellen. Für diese gilt

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial w_s \phi}{\partial z} = 0$$

und mit der Absatzgeschwindigkeit:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{k(1 - \phi)\phi}{\rho g} \left( g\phi(\rho - \rho_s) - \frac{\partial \sigma'}{\partial z} \right) \right) = 0$$

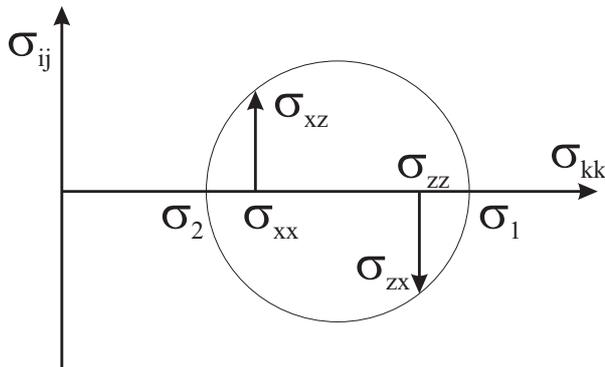


Abbildung 5.11: Ebener Spannungszustand.

Dies ist die Konsolidierungsgleichung von Gibson für den Feststoffanteil  $\phi$  mit kartesischer  $z$ -Koordinate. Wir wollen die Gleichung noch für den Porosität  $n$  aufschreiben:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\rho_s - \rho}{\rho} \frac{\partial k(1-n)^2 n}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{k(1-n)n}{\rho g} \frac{\partial \sigma'}{\partial z} \right) = 0$$

Sie ist unter der Voraussetzung lösbar, dass Parametrisierungen für die Durchlässigkeit  $k$  und die effektive Spannung  $\sigma'$  bekannt sind.

## 5.5 Der ebene Spannungszustand

Wir betrachten den Spannungszustand im Boden auf einer vertikalen Schnittfläche. Dieser Spannungszustand wird allgemein durch den Spannungstensor

$$S = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

beschrieben.

Nach dem Satz von der Hauptachsentransformation kann man ein gedrehtes Koordinatensystem finden, in dem Spannungstensor Diagonalform

$$S = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}$$

hat, somit also in diesem Koordinatensystem nur Normalspannungen wirken.

Die Hauptspannungen lassen sich mathematisch als

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{zz}}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})^2 + \sigma_{xz}^2}$$

beschreiben. Sie lassen sich ferner durch eine einfach geometrische Konstruktion bestimmen, die in Abbildung 5.11 dargestellt ist. Dazu trägt man auf der Abzisse grundsätzlich alle Normalspannungen und auf der Ordinate alle Scherspannungen auf. So beginnt man also mit dem Abtragen von  $\sigma_{xx}$  und  $\sigma_{zz}$  auf der Abzisse. An ihre Endpunkte werden  $\sigma_{xz}$  und  $\sigma_{zx}$  angetragen. Ihre Endpunkte definieren einen Kreis mit dem Mittelpunkt  $\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{zz}}{2}$ , der die Abzisse in den Hauptspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  schneidet.

# Kapitel 6

## Theoretische Rheologie

### 6.1 Die Dynamik inkompressibler Kontinua

Nachdem es Navier und Stokes gelang, die viskosen Eigenschaften Newtonscher Fluide und damit die innere Reibung in den Bewegungsgleichungen zu berücksichtigen, verallgemeinerte Cauchy dann diese Gleichungen so, daß man das Fließen von Stoffen mit beliebigen Eigenschaften darstellen konnte, indem er die im Fluid wirkenden inneren Spannungen nicht konkretisierte. Sie bleiben eine symbolische Variable, für die die entsprechende Rheologie des behandelten Fluids eingesetzt werden muss.

Die Strömung des Wassers selbst ist newtonsch, d.h. mit einer besonderen Form der inneren Reibung verbunden, die von den im Fluid vorliegenden Schergeschwindigkeiten abhängig ist. Hier unterscheidet man laminare und turbulente Strömungen, wobei die in Oberflächengewässern ohne Ausnahme turbulent, d.h. auf kleinen Skalen chaotisch sind. Das unter dem Gewässer anstehende Sediment kann man durch ein Bingham'sches Stoffmodell beschreiben. Ein Stoff mit diesen Eigenschaften verhält sich newtonsch, wenn eine gewisse Mindestspannung überschritten wird.

Die Cauchygleichungen sind das allgemeinste konzeptionelle Modell von Strömungen mit beliebigen rheologischen Eigenschaften. Sie bauen zudem eine Brücke zwischen der klassischen Kontinuumsmechanik und der Hydromechanik.

Die Bewegungsgleichungen inkompressibler Kontinua bekommt man, indem man die viskosen Kräfte  $\vec{f}_P$  den äußeren, in den Eulergleichungen schon berücksichtigten Kräften hinzuschlägt. Damit haben wir die allgemeinen Bewegungsgleichungen realer Fluide, die sogenannten **Cauchygleichungen** gewonnen, sie lauten

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{u} &= 0 \\ \frac{D\vec{u}}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} P + \vec{f} \end{aligned} \tag{6.1}$$

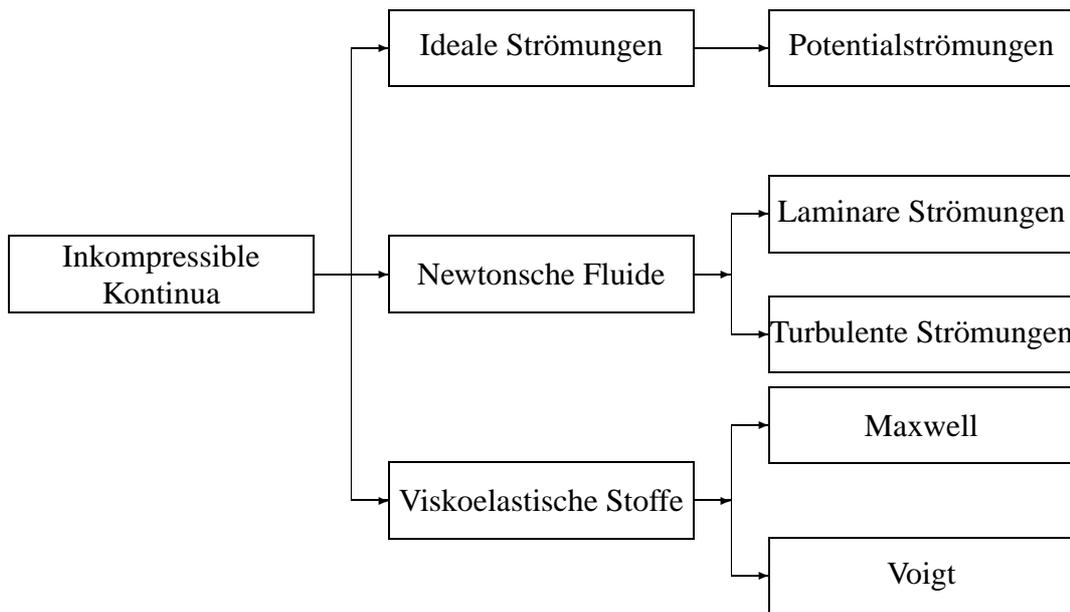


Abbildung 6.1: Die Ordnung der für die Hydromechanik und Rheologie relevanten realen Stoffmodelle.

mit dem Tensor der inneren Spannungen

$$P = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}$$

wobei  $\vec{f}$  nun wieder nur die äußeren Kräfte beinhalten soll.

Das konzeptionelle Modell eines realen Fluides ist in der Strömungsmechanik ein sehr allgemeiner Ansatz, unter dessen Dach man alles, was wir im folgenden behandeln werden, zusammenfassen kann. So läßt sich die Bewegung des Wassers auf der kleinskaligen Ebene als Newtonsches Fluid beschreiben, der Tensor der inneren Spannungen bekommt die Form des viskosen Spannungstensors. In turbulenten Strömungen entstehen Scheinspannungen, die die mittlere Strömung verändern. Diese sind durch den Reynoldsschen Spannungstensor beschreibbar, der nichts anderes als eine spezielle innere Spannung und unter Umständen sogar quasi als viskoser Spannungstensor darstellbar ist. Als Beispiel einer nichtnewtonschen Strömung soll die Sedimentbewegung unterhalb der Wassersäule angeführt werden, einer Modellierung derselben als reales Fluid mit einem speziell angepaßten inneren Spannungstensor steht nichts im Wege.

### Der Betrag des Spannungstensors

Der Betrag eines Tensors ist wie der des Vektors als Quadratwurzel des skalaren Quadrats derselben definiert:

$$\|P\| = \sqrt{P : P} = \sqrt{\sum_{i,j} \tau_{ij} \tau_{ij}}$$

## 6.2 Konzeptionelle Modelle zur Flüssigschlickdynamik

Flüssigschlick ist eine Mischung aus Stoffanteilen in der flüssigen und der festen Phase. Insofern handelt es sich um eine Mehrphasenströmung, wobei es allerdings keine Übergänge zwischen den einzelnen Phasen gibt. Die feste Phase ist dabei aus den Komponenten unterschiedlicher Kornklassen zusammengesetzt. Daher kann man die Strömung des Flüssigschlicks am ehesten als Mehrkomponentenströmung mit sehr komplexen rheologischen Eigenschaften verstehen.

Um konzeptionelle Modelle zur Dynamik von Flüssigschlick zu gewinnen, sind zunächst die differentiellen Formen der Massen- und Impulserhaltungsgleichungen aufzustellen. Durch Integration über deren konservative Formen lassen sich dreidimensionale konzeptionale Modelle aufstellen, die die Massenflüsse über entsprechende finite Volumina bilanzieren.

### 6.2.1 Das dreidimensionale, differentielle Modell

Obwohl Flüssigschlick auf der mikroskopischen Ebene aus mehr als einer Phase zusammengesetzt ist, kann man ihn als ein Fluid mit räumlich unterschiedlichen rheologischen Eigenschaften betrachten. In differentieller Formulierung läßt sich die Dynamik eines solchen inkompressiblen Fluids durch die allgemeinen Bewegungsgleichungen

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0$$

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} P + \vec{f}$$

beschreiben.

Darin ist  $\vec{u}$  die Bewegungsgeschwindigkeit und  $\rho$  die Dichte des Flüssigschlicks,  $p$  der darin herrschende Druck,  $\vec{f}$  die äußeren Kräfte, d.h. im wesentlichen die Gravitationskraft und  $P$  der Tensor der inneren Spannungen, der sich aus den Komponenten  $\tau_{ij}$  zusammensetzt und die rheologischen Eigenschaften des Fluids beschreibt.

Die rheologischen Eigenschaften des Flüssigschlicks sind von der Zusammensetzung der in ihm befindlichen festen Phase, sowie vom Sauerstoff- und organischen Komponenten abhängig. Um die Darstellung kurz zu halten, werde die feste Phase hier durch eine Schwebstoffkomponente repräsentiert. Ihre Dynamik kann dann durch eine die Prozesse Advektion, Diffusion und vertikale Eigenbewegungen berücksichtigende Transportgleichung beschrieben werden

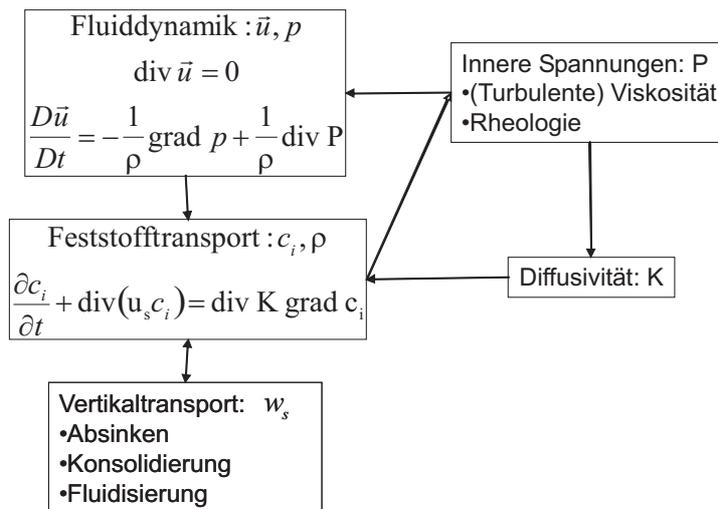


Abbildung 6.2: Kommunikation der Teilmodelle des dreidimensionalen rheologischen Modells.

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{u}_s c - K \operatorname{grad} c) = 0$$

mit der Bewegungsgeschwindigkeit der festen Phase:

$$\vec{u}_s = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w + w_s \end{pmatrix}$$

Bei gegebener Feststoffdichte bestimmt sich die Flüssigschlickdichte dann als:

$$\varrho = \left(1 - \frac{c}{\varrho_S}\right) \varrho_{H_2O} + \frac{c}{\varrho_S} \varrho_S$$

Das Modell wäre nun geschlossen, wenn man die vertikale Eigengeschwindigkeit des Feststoffanteils und die Diffusivität kennen würde. Letztere entspricht bei geringen Konzentrationen der turbulenten Viskosität in der Wassersäule. Mit der Zunahme der Konzentration müssen Dämpfungs- und Schichtungseffekte berücksichtigt werden.

Die vertikale Eigenbewegung  $w_s$  beinhaltet:

- Das freie Absinken in der Wassersäule nebst Flockendynamik. Dieser Prozess wird hier nicht gesondert behandelt.
- Das behinderte Absinken bei großen Konzentrationen. Dieser Prozess wird ebenfalls nicht behandelt.

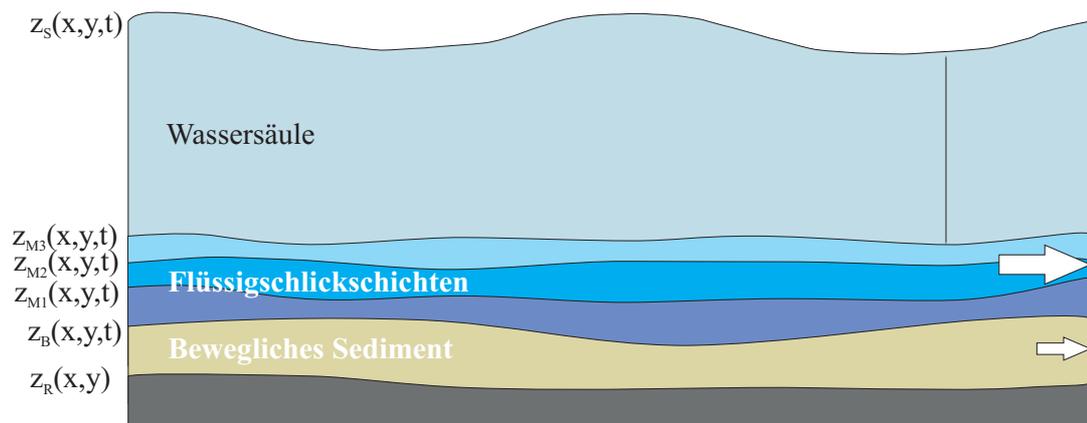


Abbildung 6.3: Die vertikale Struktur von Wassersäule und Sohle unter Einbeziehung von Flüssigschlickschichten.

- Das Absetzen durch Konsolidierung. Nach der Theorie von Gibson gilt dann:

$$w_s = \frac{k}{\rho g} \left( g\phi(\rho - \rho_s) - \frac{\partial \sigma'}{\partial z} \right)$$

Setzt man diese Absetzgeschwindigkeit in die Transportgleichung für die Feststoffkonzentration  $c$ , so erhält man eine Verallgemeinerung der Gibson-Gleichung, die über diese hinaus noch die Diffusion und die horizontalen Feststoffbewegungen berücksichtigt.

Dennoch sollte dieses konzeptionelle Modell für hohe Feststoffkonzentrationen keine horizontalen Bewegungen entstehen lassen: In diesem Fall sollte das Diffusionsmodell eine verschwindende Diffusivität  $K$  produzieren und das rheologische Modell derart hohe innere Spannungen  $P$  erzeugen, dass jede Horizontalbewegung verhindert würde.

- Die mit der Fluidisierung verbundene Aufwärtsbewegung.

## 6.2.2 Das isopyknische Modell

### Die vertikale Diskretisierung der Flüssigschlickschicht

Die vorangegangenen Ausführungen haben gezeigt, dass die rheologischen Eigenschaften primär durch die Gesamtdichte des Fluids bestimmt sind. Von daher bietet sich eine sogenannte isopyknische (nach griech.: pyknisch - gedrunnen, verdichtet) Diskretisierung der vertikalen Struktur des Flüssigschlicks an. Hierbei wird die Flüssigschlickschicht mit Flächen konstanter Dichte durchschnitten. Jede dieser Isopyknen entspricht somit einer eindeutigen Gesamtdichte des Fluids.

Die Grundannahme des isopyknischen Modells ist dabei die stabile Schichtung des Fluid Muds.

### Die Massenerhaltung für eine Fluid Mud Schicht

Das isopyknische Modell geht davon aus, dass sich innerhalb einer isopyknischen Schicht die Dichte nicht ändert. In diesem Fall geht die Massenerhaltungsgleichung in die Divergenzgleichung über. Die Integration über eine isopyknische Schicht ergibt dann dasselbe Ergebnis wie die Integration der Divergenzgleichung über die Wassersäule:

$$\frac{\partial h_m}{\partial t} + \frac{\partial q_{m,x}}{\partial x} + \frac{\partial q_{m,y}}{\partial y} + \frac{\Phi_o}{\rho_o} + \frac{\Phi_u}{\rho_u} = 0$$

Diese Gleichung muß für jede Schlickschicht einer spezifischen Dichte gesondert gelöst werden. In ihr bezeichnet  $\Phi_o$  und  $\Phi_u$  den von oben bzw. unten zu- bzw. abgeführten Massenströme der entsprechenden Dichte. In dieser Darstellung ist das Vorzeichen dabei negativ, wenn der entsprechenden Schicht Material zugeführt wird.

Diese werden jeweils durch Konsolidierung und Fluidisierung bestimmt

$$\Phi_u = -\Phi_{cons} + \Phi_{fluid}$$

bzw.

$$\Phi_o = \Phi_{cons} - \Phi_{fluid}$$

die zur Lösung der Gleichung durch entsprechende Teilmodelle berechnet werden müssen.

### Die Impulsbilanz für eine Fluid Mud Schicht

Genau wie in der Wassersäule wollen wir nun die Impulsgleichungen eines Fluides mit beliebigen rheologischen Eigenschaften über die Vertikale integrieren. Die Integrationsgrenzen sind dabei die jeweiligen Isopyknen  $z_{M,i}$  und  $z_{M,i+1}$ . In Analogie zur klassischen Mittlung über die Klarwassersäule entsteht dabei für die x-Richtung die Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}h}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}^2 h}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u} \bar{v} h}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'u'} h}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'} h}{\partial y} = - \int_{z_{M,i}}^{z_{M,i+1}} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dz \\ + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{\tau_{xx}} h}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{\tau_{xy}} h}{\partial y} - \frac{\tau_{ux}}{\rho} + \frac{\tau_{ox}}{\rho} + hf_x \end{aligned}$$

Darin sind die überstrichenen Größen die jeweiligen Mittelwerte über die Schlickschicht. Die getrichenen Geschwindigkeiten stellen die Abweichungen der tatsächlichen Geschwindigkeit in einer Schlickschicht von ihrem Mittelwert dar, die dazugehörigen Terme bezeichnet man als Dispersionsterme.

Der Druck kann in der Schlickschicht als hydrostatisch angenommen werden. In diesem Fall berechnet er sich als

$$p(z) = p_o + \rho g(z_o - z) \Rightarrow - \int_{z_{M,u}}^{z_{M,o}} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dz = - \frac{h}{\rho} \frac{\partial p_o}{\partial x} - gh \frac{\partial z_o}{\partial x}$$

Aus den ersten drei Termen kann man durch Anwendung der Produktregel die Kontinuitätsgleichung herausziehen, hierdurch erscheinen die Quellterme der Kontinuitätsgleichung ebenfalls in der Impulsgleichung:

$$h \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} h \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} h \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'u'}h}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}h}{\partial y} = -\frac{h}{\rho} \frac{\partial p_o}{\partial x} - gh \frac{\partial z_o}{\partial x} \\ + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{\tau_{xx}}h}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{\tau_{xy}}h}{\partial y} - \frac{\tau_{ux}}{\rho} + \frac{\tau_{ox}}{\rho} + hf_x + \bar{u} \left( \frac{\Phi_o}{\rho_o} + \frac{\Phi_u}{\rho_u} \right)$$

Dieses konzeptionelle Modell der Fluid Mud Dynamik birgt die Aufgabe in sich, die Dispersionsterme durch Bestimmung des vertikalen Geschwindigkeitsprofils in der Schlickschicht zu modellieren. Hier werden die Dispersionsterme in den Tensor der inneren Spannungen mit aufgenommen:

$$\tau_{ij}^D = \overline{\tau_{ij}} - \overline{\rho u'_i u'_j}$$

Division durch die Schichtdicke  $h$  ergibt dann:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_o}{\partial x} - g \frac{\partial z_o}{\partial x} \\ + \frac{1}{\rho h} \frac{\partial \tau_{xx}^D h}{\partial x} + \frac{1}{\rho h} \frac{\partial \tau_{xy}^D h}{\partial y} - \frac{\tau_{ux}}{\rho h} + \frac{\tau_{ox}}{\rho h} + f_x + \bar{u} \left( \frac{\Phi_o}{\rho_o h} + \frac{\Phi_u}{\rho_u h} \right)$$

Eine entsprechende Impulsgleichung ist im isopyknischen Modell dann auch für die  $y$ -Richtung aufzustellen und zu lösen.

### 6.2.3 Geschiebetransport unter stationären, homogenen Bedingungen

Wir wollen die Gleichungen zunächst auf etwas anwenden, für das sie nicht hergeleitet sind; den Geschiebetransport. Wir gehen ferner von stationären und homogenen Strömungsbedingungen aus, d.h. alle Zeit- und Ortsableitungen fallen weg.

Die betrachtete Schichtdicke soll die sein, in der der Geschiebetransport stattfindet. Diese hatten wir als transportaktive Schicht bezeichnet. Ihre Mächtigkeit bleibt unter stationären, homogenen Bedingungen ebenfalls konstant, womit auch die Flussterme zwischen den Schichten wegfallen.

Von der Differentialgleichung bleiben dann nur noch das Gleichgewicht der Schubspannungsterme an der Unter- und an der Oberkante der transportaktiven Schicht stehen. An letzterer wirkt die Sohlschubspannung  $\tau_B$  der Strömung:

$$0 = -\frac{\tau_{ux}}{\rho h_M} + \frac{\tau_{ox}}{\rho h_M} \Rightarrow \tau_{ux} = \tau_{Bx}$$

Die Reibung der im Geschiebe transportierten Körner an der ruhenden Sohle ist sicherlich umso größer, desto höher die Geschiebetransportrate  $q_S$  ist. In welcher Form diese Reibung

von der Geschiebetransportrate abhängt, scheint unbekannt zu sein. Nehmen wir einmal an, dass für sie

$$\tau_{ux} = \tau_c + \left( \frac{q_S \varrho^{1/2} (\varrho_S - \varrho) g}{8} \right)^{2/3}$$

gelte. Dann würde diese Überlegung direkt auf die Meyer-Peter und Müller-Formel führen. Man kann also aus jeder empirischen Geschiebetransportformel so auf eine Formel für die Reibung an der festen Sohlschicht schließen.

Gehen wir nun von einer geneigten Bodenoberkante, sonst aber stationären, homogenen Bedingungen aus. Von der Impulsgleichung bleibt dann:

$$0 = -\frac{1}{\varrho_M} \frac{\partial p_o}{\partial x} - g \frac{\partial z_o}{\partial x} - \frac{\tau_{ux}}{\varrho_M h_M} + \frac{\tau_{ox}}{\varrho_M h_M}$$

Es gilt zunächst, die indizierten Größen richtig zu identifizieren. Die geodätische Höhe der Oberkante ist die Sohlkoordinate  $z_B$ . Den Druck an der Bodenoberkante wollen wir hydrostatisch aus der darüber liegenden Wassersäule  $\varrho gh$  berechnen.

$$0 = \tau_{Bx} - \varrho gh_M \frac{\partial h}{\partial x} - \varrho_M gh_M \frac{\partial z_B}{\partial x} - \tau_{ux}$$

$$0 = -\varrho gh_M \frac{\partial h}{\partial x} - \varrho_M gh_M \frac{\partial z_B}{\partial x} - \left( \tau_c + \left( \frac{q_S \varrho^{1/2} (\varrho_S - \varrho) g}{8} \right)^{2/3} \right) + \tau_{Bx}$$

$$\tau'_B = \tau_{Bx} - \varrho gh_M \frac{\partial h}{\partial x} - \varrho_M gh_M \frac{\partial z_B}{\partial x}$$

## 6.2.4 Ausrichtung von Schlickisopyknen auf Böschungen

Wir wollen die gewonnenen Gleichungen dazu anwenden, den Verlauf der Mächtigkeit einer stabilen Schlickschicht über einer geneigten Sohle zu bestimmen. Ein solcher Anwendungsfall liegt z.B. in Hafenbecken mit geneigten Böschungen vor. Die Wasseroberfläche ist somit horizontal, im Becken sind alle Strömungsgeschwindigkeiten Null. Von der Impulsgleichung bleibt dann nur noch:

$$0 = -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p_o}{\partial x} - g \frac{\partial z_o}{\partial x} + \frac{1}{\varrho h} \frac{\partial \tau_{cr} h}{\partial x}$$

Die Veränderung des Druckes an der Oberkante der Schlickschicht ist dann einzig durch den hydrostatischen Druck der darüberliegenden Wassersäule bestimmt, es gilt also:

$$\frac{\partial p_o}{\partial x} = -\varrho_W g \frac{\partial z_o}{\partial x} \Rightarrow (\varrho_W - \varrho) g \frac{\partial z_o}{\partial x} = \frac{1}{h} \frac{\partial \tau_{cr} h}{\partial x}$$

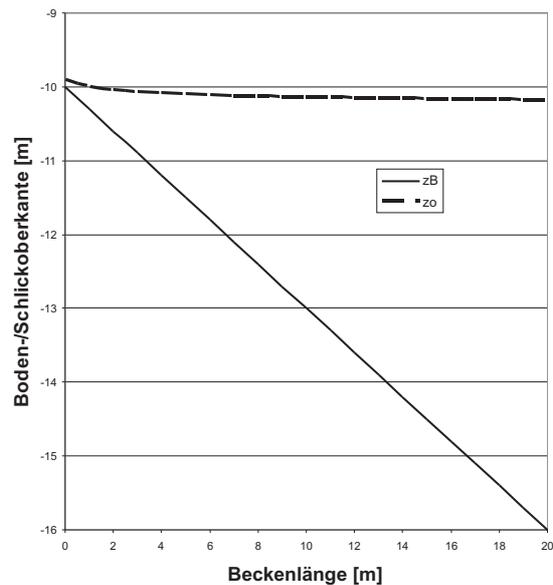


Abbildung 6.4: Schlickdicke an einer Böschung. Die Böschungsneigung beträgt 30%, die Schlickdichte wurde zu  $1010 \text{ kg/m}^3$  und die Schubspannung des Bewegungsbeginns zu  $5 \text{ N/m}^2$  angenommen. Trotzdem ist eine Neigung der Schlickoberfläche nur am Rand zu erkennen.

Da

$$z_o = z_B + h \Rightarrow \frac{\partial z_o}{\partial x} = \frac{\partial z_B}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} := \frac{\partial h}{\partial x} - \tan \beta$$

folgt für eine örtlich konstante kritische Schubspannung:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{(\varrho - \varrho_w) gh \tan \beta}{\tau_{cr} + (\varrho - \varrho_w) gh}$$

Für  $\tau_{cr} = 0$  ergibt sich der Spezialfall  $\frac{\partial h}{\partial x} = \tan \beta$ . Dann richtet sich die Schlickoberfläche genau waagrecht aus, da die Schlickschichtdicke genau mit der Neigung der Sohle wächst. Erst wenn die kritische Schubspannung im Nenner einen merklichen Einfluss auf den Term  $(\varrho - \varrho_w) gh$  bekommt, wird eine Neigung in den Isopyknen auch bestehen bleiben können. Die gewöhnliche Differentialgleichung läßt sich analytisch mit der Methode der Trennung der Variablen lösen. Dabei bekommt man eine implizite Gleichung für die Schlickschichtdicke  $h$ . Daher ist eine numerische Lösung mit dem Eulerverfahren nicht aufwendiger.

Das Ergebnis ist für recht extreme Werte in Abbildung 6.4 dargestellt. Man sieht nur sehr geringe Neigungen am Rand des Beckens. Man kann hieraus folgern, dass sich die Isopyknen bei nichtvorhandenen äußeren Belastungen nahezu horizontal ausrichten.

### 6.2.5 Das über die Schlickschicht gemittelte zweidimensionale Modell

Eine Reduktion des isopyknischen Modells auf eine einzige Schlickschicht ergibt ein zweidimensionales dynamisches Modell derselben.

Ein solches wurde von H.R.Wallingford unter dem Namen FLUIDMUDFLOW-2D entwickelt [4]. Dieses nimmt für die Schlickschicht global eine bestimmte Dichte an, die vom Benutzer vorgegeben werden muß. Es ergeben sich dann die isopyknischen Gleichungen, wobei

in FLUIDMUDFLOW-2D als äußere Kraft die Corioliskraft berücksichtigt wurde, während die horizontalen inneren Reibungen und Dispersionsterme vernachlässigt wurden. Die vom Wasser auf die Schlickschicht ausgeübte Schubspannung wird in diesem Modell als Schleppspannung berechnet.

In dem HN-Modell DELFT-3D ist ebenfalls ein Fluid Mud Modell integriert. Hier wird die Wassersäule zwar dreidimensional aufgelöst, die Fluid Mud Schicht wird aber nur durch eine Schicht reproduziert (H. Winterwerp, persönl. Kommunikation). Das Modell berücksichtigt insbesondere den Transport unter Wellen, sowie die Fluidisierung des Schlicks durch Wellen. Ferner wird die Dissipation von Wellenenergie über Schlick im Seegangmodell simuliert. Modelle dieser Konzeption sind nicht in der Lage, die vertikale Dichte- als auch Geschwindigkeitsverteilung im Schlick zu reproduzieren. Es ist somit nicht möglich, Konsolidierungs- und Fluidisierungseffekte hinreichend genau zu berücksichtigen.

## 6.3 Eigenschaften Binghamischer Fluide

### 6.3.1 Das vertikale Geschwindigkeitsprofil

Wir wollen eine einfache Lösung der Bewegungsgleichungen Binghamischer Fluide für das Fließen suchen. Wir gehen davon aus, dass die Sohle um einen Winkel  $\alpha$  geneigt ist und drehen das Koordinatensystem so, dass die x-Achse parallel zur Bodenoberkante ausgerichtet ist, also ebenfalls um den Winkel  $\alpha$  gegenüber der Horizontalen geneigt ist.

Die Strömung setzen wir als stationär voraus, d.h. alle zeitlichen Ableitungen sind Null. Die Corioliskraft wollen wir bei Binghamischen Fluiden vernachlässigen. Wir gehen ferner davon aus, dass sich Geschwindigkeit und Druck in Hauptstromrichtung und in lateraler Richtung nicht ändern, d.h.  $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$ . Mit diesen Vereinfachungen ergibt sich für die Geschwindigkeitskomponenten:

$$u = u(z)$$

$$v = w = 0$$

Von der Bewegungsgleichung in der Hauptrichtung  $x$  bleibt dann nur noch

$$0 = \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial z} + \tau_{cr} \right) - \rho g \sin \alpha$$

Zur Bestimmung des Vertikalprofils der Hauptströmungsgeschwindigkeit  $u$  integrieren wir die Differentialgleichung zwischen der Bodenoberkante  $z_B$  und der Tiefe  $z$ :

$$\int_z^{z_B} \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial z} + \tau_{cr} \right) dz = \rho g \sin \alpha (z_B - z)$$

An der Bodenoberkante wirkt die durch die Wasserströmung induzierte Sohlschubspannung  $\tau_B$ , es gilt also

$$\tau_B = \left( \mu \frac{\partial u}{\partial z} + \tau_{cr} \right) \Big|_{z_B}$$

und somit kann das verbleibende Integral berechnet werden und schnell bekommt man für die Steigung des vertikalen Geschwindigkeitsprofils:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\rho g}{\mu} \sin \alpha (z_B - z) + \frac{\tau_B - \tau_{cr}}{\mu}$$

Eine weitere Integration zwischen  $z_B$  und  $z$  liefert nach einigen Umformungen das vertikale Geschwindigkeitsprofil

$$u(z) = u_B - \frac{1}{2} \frac{\rho g}{\mu} \sin \alpha (z_B - z)^2 - \frac{\tau_B - \tau_{cr}}{\mu} (z_B - z)$$

Bewegt sich die unter der Wassersäule anstehende Sedimentschicht also mit einer Geschwindigkeit  $u(z_B)$ , dann nimmt die Bewegungsgeschwindigkeit des Sedimentes bei ungeneigter Sohle im Boden linear ab. Ist die Sohle geneigt, dann kommen quadratische Geschwindigkeitsanteile hinzu. Das Geschwindigkeitsprofil der sich bewegenden Sedimentsohle ist also dann bekannt, wenn man die wirkende Sohlschubspannung und die Bewegungsgeschwindigkeit der obersten Sedimentschicht kennt.

### 6.3.2 Die Dicke der transportierten Sedimentschicht

Das erhaltene Ergebnis gibt auch Aufschluss über die Höhe der bewegten Sedimentschicht  $h_S$ . Diese erhalten wir durch die Suche der Nullstelle des vertikalen Geschwindigkeitsprofils in der Sohle:

$$0 = \frac{1}{2} \rho g \sin \alpha h_S^2 + (\tau_B - \tau_{cr}) h_S - \mu u_B$$

Die Lösungen dieser in  $h_S$  quadratischen Gleichung sind:

$$h_{S1/2} = \frac{(\tau_B - \tau_{cr})}{\rho g \sin \alpha} \left( -1 \pm \sqrt{1 + \frac{2 \rho g \sin \alpha \mu u_B}{(\tau_B - \tau_{cr})^2}} \right)$$

Sie bergen das (scheinbare) Problem der Division durch Null in sich, wenn kein Sohlgradient vorhanden ist. Um dieses zu beheben, entwickeln wir die Wurzel in eine Reihe:

$$h_{S1/2} = \frac{(\tau_B - \tau_{cr})}{\rho g \sin \alpha} \left( -1 \pm 1 + \frac{\rho g \sin \alpha \mu u_B}{(\tau_B - \tau_{cr})^2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\rho g \sin \alpha \mu u_B}{(\tau_B - \tau_{cr})^2} \right)^2 \dots \right)$$

Die doppelte Lösung bietet für das Vorzeichen der Reihenentwicklung beide Möglichkeiten an. Verwendet man das Plus, dann fallen die Einsen weg und das  $\sin \alpha$  im Nenner kürzt sich in

jedem Term der Reihe weg. Für das Minus bleibt  $\sin \alpha$  im ersten Term im Nenner stehen, wo es im Fall einer horizontalen Sohle auch mal Null werden kann. Physikalisch sinnvoll ist also nur die erste Lösung:

$$h_S \simeq \frac{\mu u_B}{\tau_B - \tau_{cr}} - \frac{1}{2} \frac{\rho g \sin \alpha \mu^2 u_B^2}{(\tau_B - \tau_{cr})^3}$$

Da wir nun die Tiefe der bewegten Schicht kennen, können wir über diese die tiefengemittelte Geschwindigkeit bilden, sie ist:

$$\bar{u} = \frac{1}{2} u_B = \frac{1}{2} (z_B - z_0) \frac{\tau_0 - \tau_{cr}}{\mu}$$

Die Annahme eines linearen Geschwindigkeitsprofils in einem ungeneigten Boden wird auch experimentell bestätigt.

# Kapitel 7

## Labormodell zur Verschlickung von Häfen

Da Messungen in der Natur sehr aufwendig sein können oder nur schlecht umzusetzen sind, nutzt man physikalische Modelle. Diese sind ihren realen Vorbildern nachempfunden, wobei man sich bei der Nachbildung auf die wesentlichen und für die Messungen entscheidenden Merkmale konzentriert. Alle unnötigen Merkmale werden vernachlässigt, so dass ein Modell gelegentlich sehr schlicht wirken kann. Ein gängiges, jedoch nicht zwingendes Merkmal eines Modells ist es, in einem bestimmten Maßstab kleiner als das Original zu sein. Diese Eigenschaft ist mit einer zu erzielenden Platzersparnis sowie verringerten Nachbildungskosten verbunden.

Die Vorteile maßstäblicher, physikalischer Modelle liegen vor allem darin, dass hydromechanische Phänomene, die sich prinzipiell den gängigen Erkenntnissen einer modernen Wissenschaft entziehen, fundiert und am Modell im direkten Kontakt mit dem Medium untersucht werden können.

### 7.1 Der Aufbau des Modells

Die Verschlickung von Häfen ist von so vielen Einflussfaktoren geprägt, dass es zunächst sinnvoll erscheint, ein Labormodell zur Verschlickung von Häfen zu entwickeln, in welchen man unter kontrollierten Bedingungen den Prozess analysieren kann. So werden in einem solchen Labormodell

- biologische Einflüsse auf die Flüssigschlickrheologie,
- der Einfluss der Schifffahrt und
- der Einfluss von Unterhaltungsmaßnahmen

kategorisch ausgeschlossen.

Zudem lassen sich Anfangs- und Randbedingungen für die numerische Modellierung direkt und kontrolliert einsteuern und Validierungsdaten ohne Einschränkungen gewinnen.

### 7.1.1 Überblick und Abmessungen

Das Hafenmodell (siehe Abbildung 7.2) wurde auf dem Freigelände der Professur für Hydromechanik und Wasserbau der Universität der Bundeswehr München im Sommer 2010 gebaut (siehe Abbildung 7.4). Das Modell besteht aus einem kreislaufenden Gerinnesystem und einem Rechteckbecken.



Abbildung 7.1: Messwagen an dem Modell

Das Modell setzt sich im Wesentlichen aus zwei Bereichen zusammen. Der modellierte Hafen an sich wird durch ein Rechteck von 9,3 m und zwei halben Kreisen mit einem Durchmesser von 2,3 m gebildet. Das Rechteck ist an beiden Stirnseiten und an einer langen Seite durch Wände begrenzt. Nur die zweite lange Seite stellt einen Zugang für das Wasser dar. Diese offene Seite verbindet im Modell das stehende Gewässer im Hafenbecken mit dem sich bewegenden Gewässer, dem Fluss. Der Fluss wiederum wird im Modell durch eine um das Hafenbecken herum verlaufende, in sich geschlossene Rinne gebildet. Diese setzt sich aus zwei parallel zu den langen Seiten des Hafenbeckens verlaufenden Geraden sowie aus zwei Halbkreisbahnen, die die Geraden verbinden, zusammen. Dabei hat die Rinne eine durchgehende Breite von 0,85 m.

Um die Kapazität des Hafenbeckens zum als Sedimentfalle zu erhöhen, wurde die Sohlentiefe des Innenbeckens 5 cm tiefer als im Ringkanal gelegt.

Die Abmessungen des Hafenmodells sind zusammenfassend in Tabelle 7.1 dargestellt.

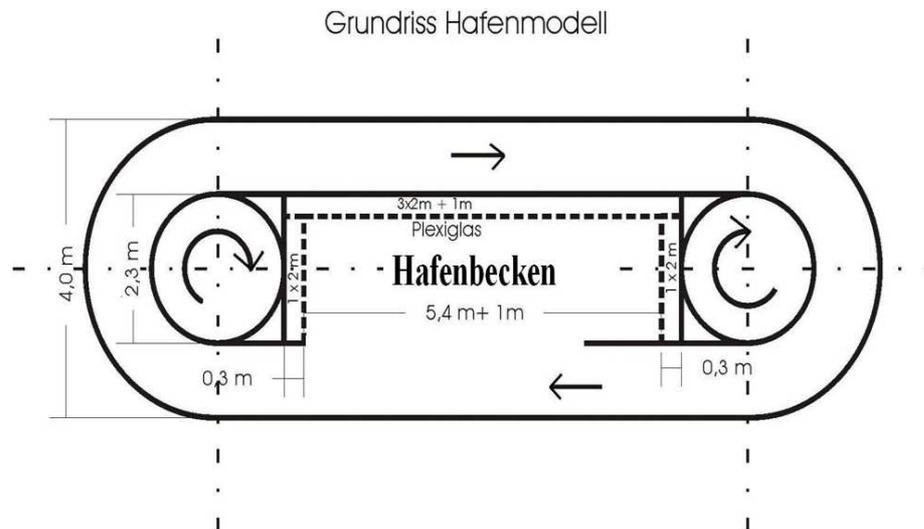


Abbildung 7.2: Entwurf des Hafenmodells

### 7.1.2 Der Antrieb der Strömung

Die für die Simulation nötige Strömung des realen Flusses wird im Modell durch zwei horizontal installierte Schaufelräder erzeugt. Die Schaufelräder bilden jeweils die Innenseite der Rinne in den halbkreisförmigen Umlenkungen. Sie sind im Modell also an den Stirnseiten des Hafenbeckens untergebracht und versetzen durch ihre ca. 2 cm in die Rinne hereinragenden Schaufelblätter das Wasser in der Rinne in Bewegung. Die Rädergeschwindigkeiten wurden mittels eines Rechners, der mit einem Wireless verbunden ist, fern gesteuert. Die Einheit der Eingabe von der Steuerung ist Frequenz  $f$  Hz[1/s]. Die Beziehung der Radgeschwindigkeit und der Frequenz wurde, wie folgt beschrieben:

$$v[m/s] = \frac{2\pi R[m]}{T[s]} = 2\pi R[m]f[s^{-1}],$$

mit

$v$ [m/s]: Radgeschwindigkeit,

$R$ [m]: Radius des Rades,

$T$ [s]: Zeit für eine Umdrehung und Frequenz  $f$ [ $s^{-1}$ ]: Eine Umdrehung pro Sekunde.

### 7.1.3 Die Darstellung des Schlicks

Als Ersatzmaterial, anstatt des kohäsiven Flüssigschlicks, wurde ein Quarzmehl (siehe Kap. 4.2) in dem Versuchsmodell verwendet, dessen physikalische Eigenschaften denen des flüssigen Schlicks gleichen.

Aus dem Versuch wurden die Anfangsbedingungen von MUDSIM sowie vertikale Dichteprofile und Strömungsgeschwindigkeiten bestimmt.

Tabelle 7.1: Bemessung des Hafenmodells

Gesamtlänge (Innenmaß)	13,37m
Maximale Wassertiefe	0,4m
Wasserrad	
Großer Radius des Wasserrads (Innenmaß)	2,97m
Kleiner Radius des Wasserrads (Außenmaß)	1,141m
Breite des Ringkanals	0,82m
Breite des Innenbeckens	2,0m
Länge des Innenbeckens	6,39m

Hierdurch wurde das Material erodiert und transportiert. Die Strömungsgeschwindigkeit soll die kritische Grenze der Sohlschubspannung erreichen. Um die an der Sohle anstehenden Sedimente in Bewegung zu setzen, bedarf es einer gewissen Mindestbelastung in Form der Sohlschubspannung. Eine Sinkgeschwindigkeit des Materials in dem Hafenbecken, wo die meisten Sedimente abgelagert werden, soll auch berücksichtigt werden.

#### 7.1.4 Der Messwagen

An den langen Seiten des Modells wurde auf zwei Schienen ein sich vollautomatisch bewegnender Messwagen eingesetzt (siehe Abbildung 7.1). Durch den Einsatz eines solchen beweglichen Messwagens erfolgen die Messungen im Gegensatz zu Dauermessgeräten nicht zeitlich parallel, sondern zeitlich nach einander. Daher ist es besonders wichtig, bei jeder Messung auch die Messzeit und den Messort aufzunehmen, um die Ergebnisse mit entsprechenden Raumzeitpunkten der numerischen Modellierung vergleichen zu können.

## 7.2 Messtechniken

An Messstellen des Hafenmodells wurden Fließgeschwindigkeit, Schwebstoffkonzentration, Dichteverteilung im Wasser und Ablagerung gemessen. Dafür wurden die vier Messgeräte ADV-Sonde, Trübungssonde, Dichtesonde Liquifant und Ultraschallsonde im Hafenmodell platziert (siehe Tabelle 7.5).

### 7.2.1 ADV-Sonde für Geschwindigkeitsmessung

Für die Auswertung der Messergebnisse des physischen Modells werden diese mit den Ergebnissen der numerischen Simulationen der jeweiligen Versuchsanlage und den Ergebnissen aus Messungen mit einer ADV-Sonde (Acoustic-Doppler-Velocimeter) verglichen.

Acoustic-Doppler-Velocimetry bezeichnet ein akustisches Messverfahren unter Nutzung des Doppler-Effekts zur Bestimmung dreidimensionaler Fließgeschwindigkeiten. Das Messgerät

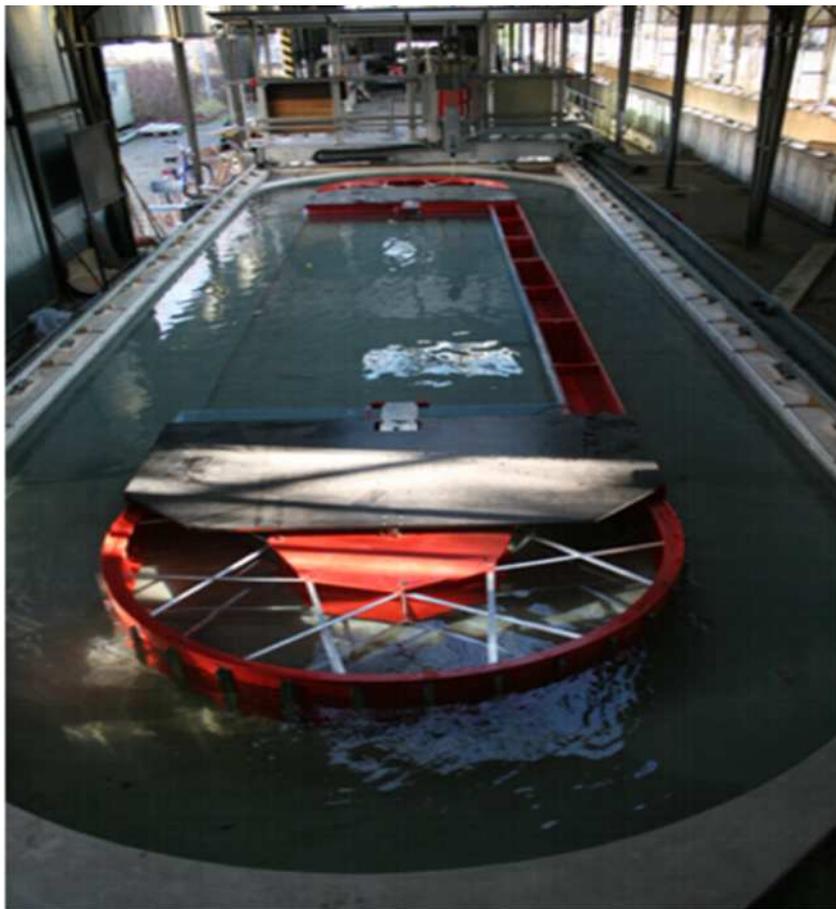


Abbildung 7.3: Physikalisches Hafenmodell



Abbildung 7.4: Bau des Modells

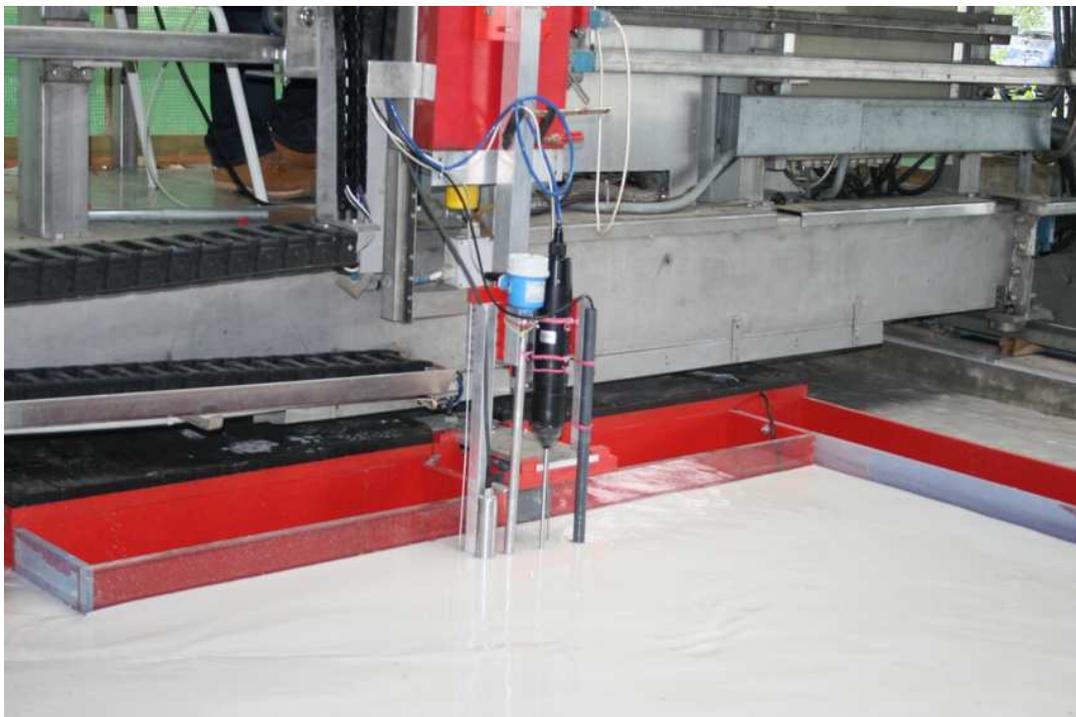


Abbildung 7.5: Messtechniken an dem Messwagen

besteht aus einem Ultraschallsender und drei Empfängern (Abbildung 7.6). Fortlaufend werden zwei kurze akustische Impulse in vorgegebenem Zeitabstand ausgestrahlt. In der Strömung mitgeführte Partikel reflektieren diese Signale, welche wiederum von den Empfängern registriert werden. Über eine Vorgabe der Laufzeit kann das Messvolumen klar abgegrenzt werden. Die Phasenverschiebungen der reflektierten Impulse geben Rückschlüsse auf die Partikelgeschwindigkeiten. Das zugehörige Verfahren wird Pulse Coherent Doppler Processing genannt.

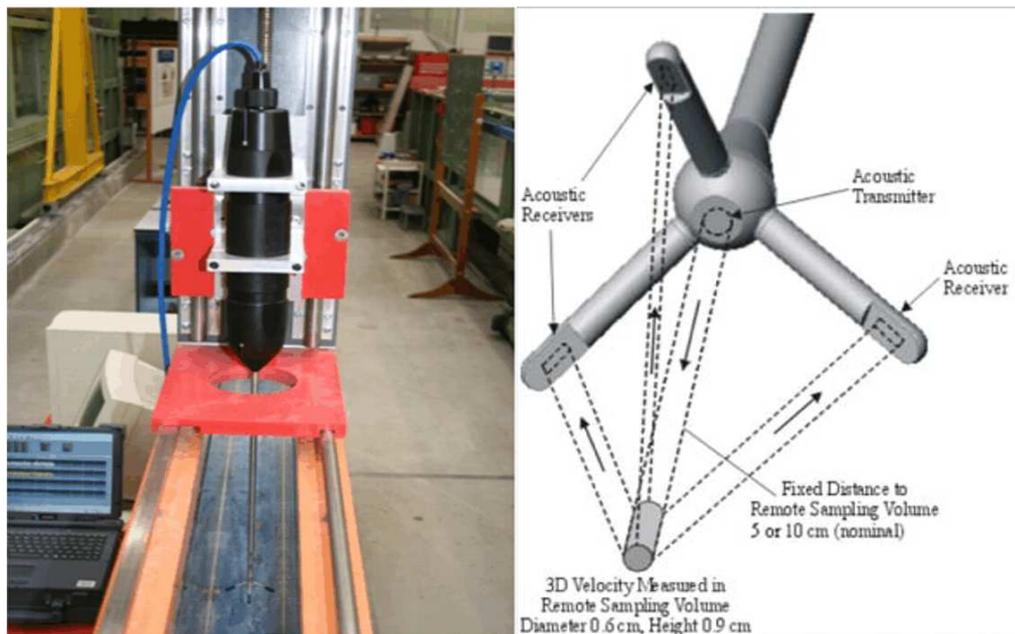


Abbildung 7.6: ADV-Sonde (Vectrino 254 Hz) (links) und prinzipielle Funktion einer ADV-Sonde (rechts)

Der besondere Vorteil des ADV-Geräts (gegenüber der ADCP-Sonde) ist die Erfassung dreidimensionaler Geschwindigkeitskomponenten in hoher zeitlicher Auflösung (bis zu 200 Hz). Aufgrund des relativ kleinen Messvolumens kann nahezu von einer punktuellen Messung ausgegangen werden.

Da sich der Sondenkopf samt Sender und Empfängern beim Messen unter Wasser befinden muss, ergibt sich bei vertikaler Benutzung der ADV-Sonde eine Mindestfließtiefe von etwa 5 cm.

Mit der Sonde ist es möglich, sohlnahe Geschwindigkeiten zu erfassen. Mitunter störend wirkt dann das von der festen Berandung reflektierte Signal. Die Messfrequenz beträgt 254 Hz.

### 7.2.2 TSS Portalbe-Trübungssonde für die Messung der Schwebstoffkonzentration

Trübung ist eine alltägliche Erscheinung. Sie kann mit Attributen beschrieben werden wie: schlecht durchsichtig, Kontrast vermindern, seitlich leuchtend, farbgebend usw. Verantwortlich für diesen Effekt ist das optische Phänomen der Lichtstreuung. Trübung wird nicht durch

Farbe (gelöst) verursacht, sondern hängt mit dem Verlust der Transparenz zusammen, der durch Schwebstoffe und/oder Kolloiden hervorgerufen wird.

Ist eine Flüssigkeit klar, existieren keine Schwebstoffe und es kommt zu keiner Streuung. Trübung ist die Bezeichnung für eine optische Erscheinung, hervorgerufen durch die Streuung des Lichtes an suspendierten (ungelösten) Partikeln, die in einer Flüssigkeit vorhanden sind. Trifft ein Lichtstrahl auf ein Partikel, so wird ein Teil des Lichtes reflektiert, ein Teil absorbiert. Je nach Partikelform und Oberflächenbeschaffenheit wird das Licht mit unterschiedlicher Intensität in alle Richtungen gestreut.

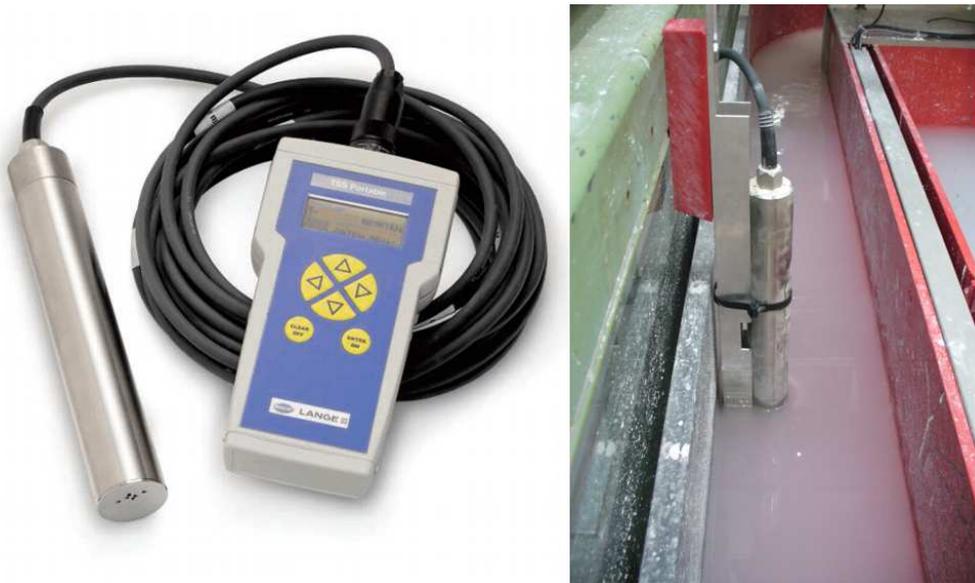


Abbildung 7.7: Trübungssonde TSS Portable (links) und Trübungssonde im Einsatz (rechts)

Die Trübungssonde (siehe Abbildung 7.7) erfasst die Feststoffkonzentration der Sedimente im Wasser. Dabei werden die Trübungen über das Streulicht gemessen. Grundlage hierfür ist der Tyndall-Effekt. Unter dem Tyndall-Effekt (benannt nach John Tyndall) versteht man die Streuung von Licht in einer Flüssigkeit. Dieser Effekt tritt auf, wenn in einer Flüssigkeit Teilchen gelöst sind, deren Größe mit der Wellenlänge des Lichts vergleichbar ist (ca. 100-1000 nm).

Man nennt solche Flüssigkeiten auch kolloidale Lösungen. Danach ist die Intensität des Streulichtes proportional zur Anzahl der streuenden Teilchen. Die räumliche Verteilung des Streulichtes ist stark von der Größe und der Form der Teilchen abhängig. Um also zwei durch unterschiedliche Sedimente hervorgerufene Trübungen vergleichen zu können, ist ein Abgleich der Trübungssonde mit dem aktuellen Kolloid nötig. Das verwendete Handmessgerät TSS Portable arbeitet dabei mit einer Genauigkeit von  $\pm 0,001$  Gramm pro Liter.

Neben der Trübungssonde wird im Versuch eine neue Dichtesonde eingesetzt, deren Vorteil die direkte Dichtebestimmung eines Fluids ist. Auf sie wird im folgenden Abschnitt genauer eingegangen.

### 7.2.3 Ultraschallsonde für die Ablagerungsmessung

Die in den Versuchen zum Einsatz kommende Standard-Ultraschallsonde F05 (siehe Abbildung 7.8) der Reihe SONOMETER ermöglicht die Messung von Flüssigkeitsfüllständen nach dem Impuls-Echo-Prinzip. Dabei wird der Füllstand im Gegensatz zu sonst üblichen Ultraschallabstandsmessungen durch eine Laufzeitmessung in der Flüssigkeit selbst ermittelt. Der von der Sonde abgegebene Sendeimpuls wird in die Flüssigkeit eingekoppelt und vom Grund als Schall reflektiert. Die Sonde nimmt diesen als Laufzeitecho wieder auf und ermittelt in Abhängigkeit von der Schallgeschwindigkeit den Füllstand.



Abbildung 7.8: Ultraschallsonde F05 im Einsatz.

## 7.3 Quarzmehl als Ersatzschlick

Um hinreichend genau eingeschränkte Versuchsbedingungen zu erreichen, wurde im Rahmen dieses Projekts darauf verzichtet, Naturschlicke aus der Ems oder der Weser zu verwenden, da es bisher noch nicht möglich ist, die biologischen Einflüsse auf die Flüssigschlickrheologie zu quantifizieren.

Ziel war daher die Suche nach einem schlickbildenden Ersatzmaterial, welches ähnliche physikalische Eigenschaften wie die Naturschlicke haben.

### 7.3.1 Physikalischer Charakter des Quarzmehls

Hier fiel die Wahl auf Quarzmehl (siehe Abbildung 7.9). Quarzmehl ist feingemahlener Quarz, welches man in verschiedenen Bereichen anwenden kann. Die Tabelle 7.2 zeigt, dass die mitt-



Abbildung 7.9: Quarzmehl10000 (Quelle: Euroquarz)

lere Korngröße und die Dichte des Quarzmehls tatsächlich denen der Proben aus Ems und Weser entspricht.

Die Korngrößenverteilungen in Abbildung 7.10) des Partikelsizers zeigen sogar eine breitere Verteilung für Quarzmehl im Vergleich zu den Naturschlicks.

Bezüglich der genannten Eigenschaften ist Quarzmehl also ein exzellentes Substitut für die Naturschlicke. Es bleibt die Analyse seiner rheologischen Eigenschaften.

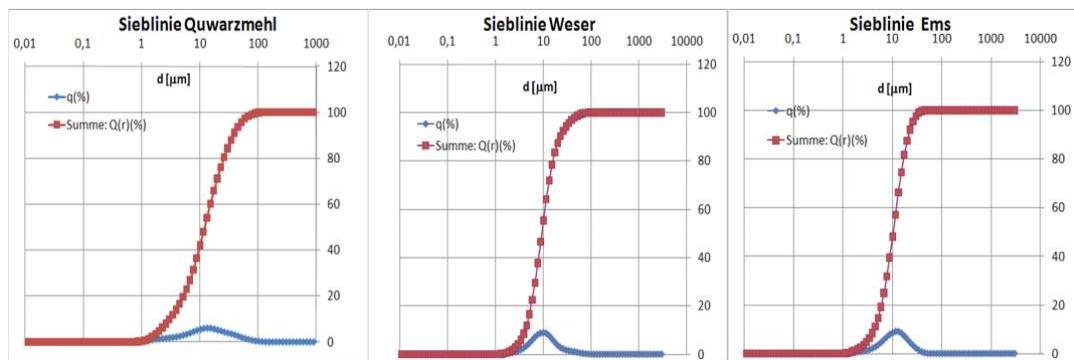


Abbildung 7.10: Korngrößenverteilungen des Quarzmehls und Schlicks

### 7.3.2 Rheologische Messungen

Um die rheologischen Eigenschaften von Quarzmehlsuspensionen zu untersuchen, wurde diese in denselben Verdünnungsgraden wie die Naturschlicke aus Ems und Weser hergestellt und dann im Rheometer mittels CSS-Messung analysiert.

In der Abbildung wurde dabei ein in der Natur nicht vorkommender Messbereich für die Scherspannung gewählt, dass man das scherverdickende Verhalten einer Suspension einmal sehen

Tabelle 7.2: Physikalischer Vergleich zwischen Schlick und Quarzmehl

Material	mittlere Korngröße [ $\mu\text{m}$ ]	Dichte [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ]
Ems	11,34	2610
Weser	12,23	2570
Quarzmehl	12,09	2650

kann. Diese überlineare Zunahme der Schubspannung ist sicher auf das Einsetzen von Turbulenz zurückzuführen.

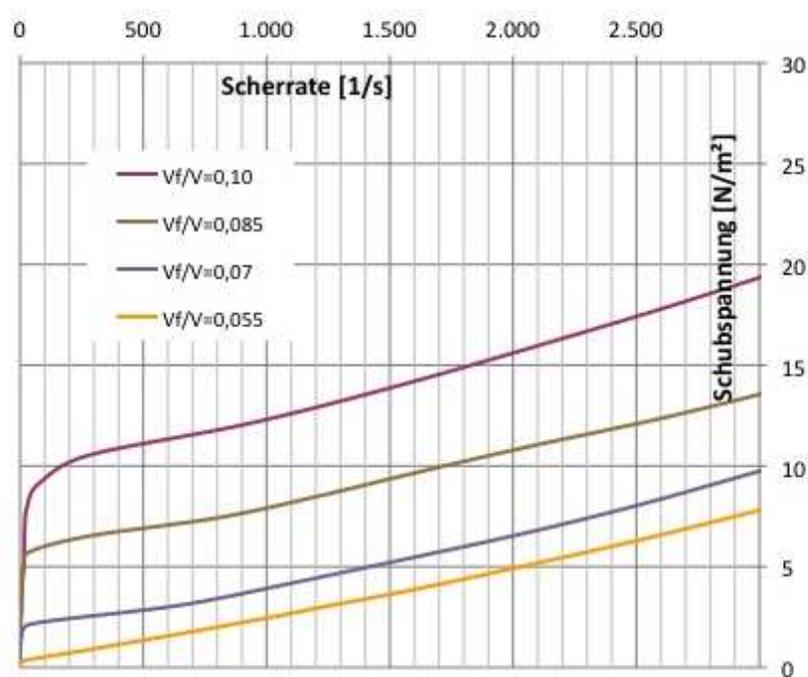


Abbildung 7.11: Fließkurven der Quarzmehlsuspensionen für verschiedene Verdünnungsgrade.

Weitere Messergebnisse des Rheometers für kleinere Scherraten und Scherspannungen werden mit den rheologischen Parametrisierungen zusammen vorgestellt.

### 7.3.3 Parametrisierung nach dem Worrall-Tuliani Modell

Genau wie bei den Naturschlickern wurde auch an die Quarzmehlsuspensionen ein Gesetz nach Worrall-Tuliani mit den erweiterten Funktionalitäten zur Erfassung der Abhängigkeiten vom Feststoffanteil in der Form

$$\tau(\phi, \dot{\gamma}) = a_1 \phi^{b_1} + \mu_{\text{wasser}} \exp(a_2 \phi) \dot{\gamma} + \frac{a_4 \phi^{b_3} b_2 \phi \dot{\gamma}}{a_3 \dot{\gamma} + a_4 \phi^{b_3}}$$

mit dem Surface Fitting Tool von MATLAB angefitet. Dabei wurde für eine Scherrate bis  $1000 \text{ s}^{-1}$  eine Korrelation von rund 93% erreicht.

Die einzelnen Ergebnisse lauten:

$$\tau_y = 12,56Pa\phi^{1,998}$$

$$\mu_\infty = 0,001Ns/m^2 \exp(12,73\phi)$$

$$\Delta\mu = 9,991Ns/m^2\phi$$

$$a = 0,01795$$

$$b = 54,47\phi^{2,554}$$

$$\tau = \tau_y + \mu_\infty\dot{\gamma} + \lambda\Delta\mu\dot{\gamma}$$

Die Abbildungen 7.12 und 7.13 zeigen den Vergleich zwischen den Messergebnissen der Quarzmehlsuspensionen mit dem erweiterten Worrall-Tulliani-Modell. Die Schubspannungen steigen bis zur Scherrate von bis zu  $100 \text{ s}^{-1}$  sehr stark, hier stimmt das Worrall-Tulliani Modell mit den Messergebnissen gut überein.

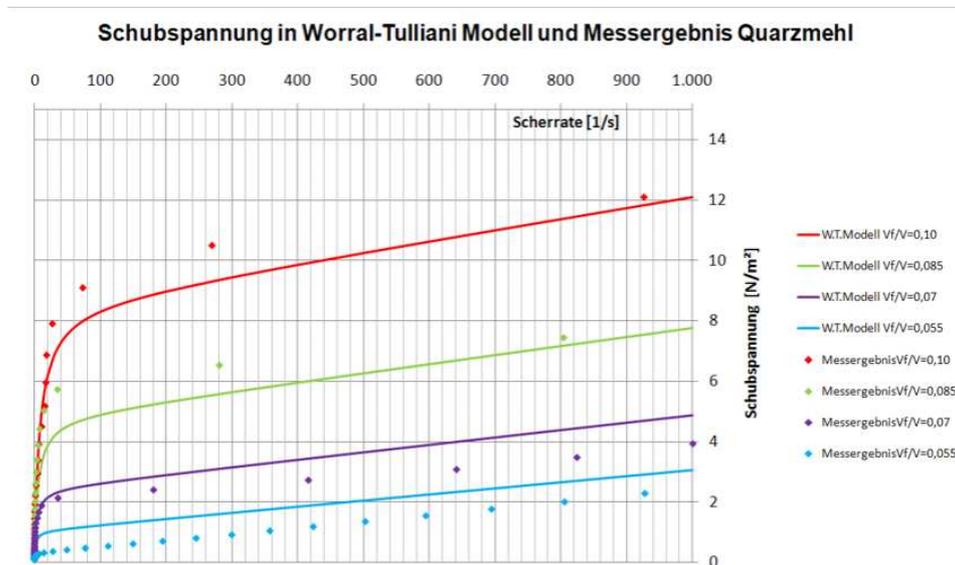


Abbildung 7.12: Vergleich der gemessenen (gepunktet) und nach dem Worrall-Tulliani-Modell berechneten Fließkurven für Quarzmehlsuspensionen.

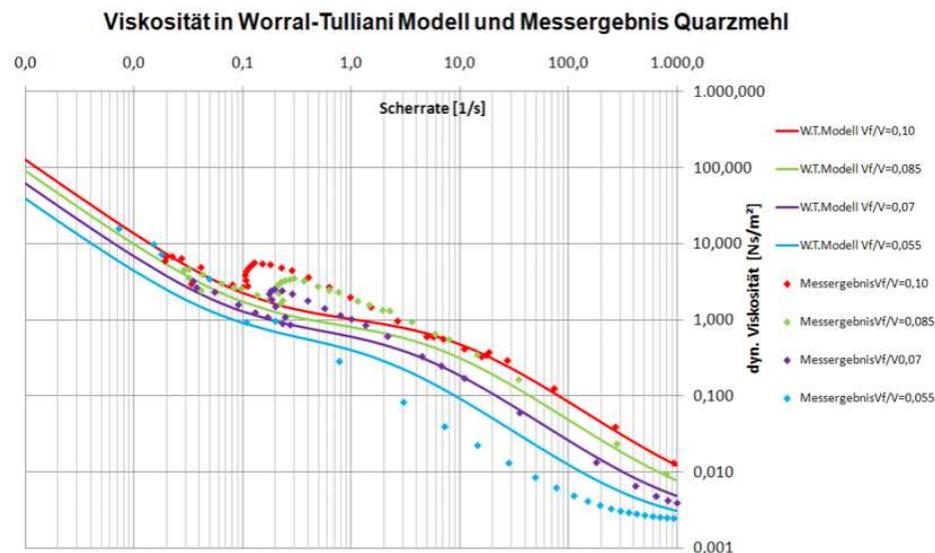


Abbildung 7.13: Vergleich der gemessenen (gepunktet) und nach dem Worrall-Tulliani-Modell berechneten Viskositätskurven für Quarzmehlsuspensionen.

## 7.4 Dichtebestimmung mit der Dichtesonde Liquiphant

Der Dichterechner in Verbindung mit der Dichtemesssonde dient laut Herstellerangaben zur Überwachung von Prozessparametern bei der Herstellung und Verarbeitung von Flüssigkeiten in der Lebensmittel- und Pharmaindustrie. Im Laboreinsatz soll diese Messeinheit zur Bestimmung der Dichte von Schlickschichten in einem physischen Modell genutzt werden.

### 7.4.1 Funktionsweise des Liquiphanten

Bei der Dichtemesssonde Liquiphant M Density FTL51 von Endress + Hauser handelt es sich um einen umgebauten Füllstandsgrenzschalter, welcher mit einer neuer Elektronik ausgerüstet wurde, um als Dichtesensor im Dauerbetrieb zu arbeiten. Die von der Sonde gewonnenen Signale werden mittels des Dichterechners FML 621 verarbeitet, ausgewertet und schließlich als Dichtewert ausgegeben. Zur genauen Bestimmung der Dichte können Zustandsgrößen wie Temperatur und Druck entweder im Dichterechner voreingestellt oder durch zusätzliche Sonden in situ bestimmt werden. Durch eine Verbindung zu einem PC und der im Lieferumfang enthaltenen Software von Endress + Hauser, wird die graphische Darstellung der gemessenen Werte in Diagrammen ermöglicht und die digitale Erfassung der Messdaten zur weiteren Verarbeitung und Auswertung erleichtert. Der hier bei der Versuchsreihe verwendete Messaufbau ist in nachfolgender Abbildung 7.14 dargestellt.

Die eigentliche Sonde besteht aus einem Gehäuse, in dem die Steuerelektronik untergebracht ist, einem Prozessanschluss, einem Verlängerungsrohr und einer Schwinggabel.

Da die Sonde lediglich im Labor des Instituts für Wasserwesen, bzw. bei Feldversuchen in Hafengebäcken eingesetzt werden soll, wurde ein Gehäuse aus Polyester gewählt, da die Sonde

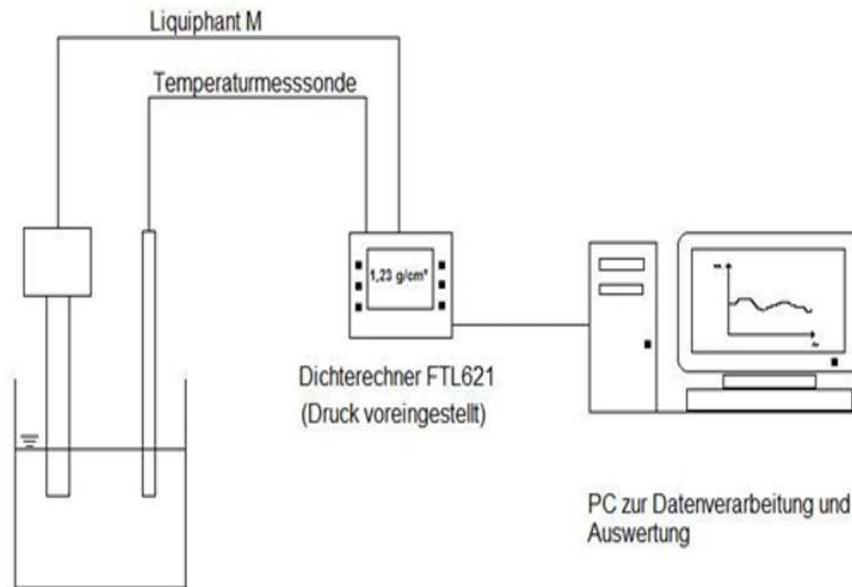


Abbildung 7.14: Komponenten der Dichtesonde Liquiphant M

keinem besonderen Schutz unterliegt. Auch dem Prozessanschluss kommt eine geringe Bedeutung zu, da das Gerät ausschließlich in Proben mit freier Oberfläche eingetaucht wird und nicht in Rohren mit heißen oder unter Druck stehenden Fluiden zum Einsatz kommt. Um den Einsatz sowohl im Laborbereich als auch bei Feldversuchen sicherzustellen, wurden zwei Sonden mit unterschiedlichen Verlängerungsrohren bestellt. Für den Laborbetrieb dienen 600 mm Verlängerung und für die Messungen in Hafenbecken wird auf eine Verlängerung von 3 m zurückgegriffen. Die Schwinggabeln am Ende der Verlängerungsrohre sind jeweils gleich ausgeführt. Sie sind 17,5 mm breit und 25 mm lang. Die nachfolgende Abbildung 7.15 zeigt den schemenhaften Aufbau des Liquiphant M.

## 7.4.2 Kalibrierung für Naturschlicke

Zur Kalibrierung des Dichtesonde Liquiphant wurde zuerst ein Naturschlick verwendet [?].

### Versuchsaufbau

Als geeignetes Prüfgefäß für die Absetzung des Schlicks und die Dichtemessung mit dem Liquiphant M soll ein PVC- Zylinder verwendet werden. Er verfügt mit seinen 11 cm Durchmesser über genügend seitlichen Platz für die Sonde. Seine Höhe beträgt 38 cm. Eine Herausforderung bei diesem Versuch stellt allerdings die Entnahme der Stoffproben für die Ermittlung der Referenzdichtewerte dar. Es muss dabei möglich sein, dieselbe Probe mit beiden Messverfahren zu untersuchen, ohne sie aus ihrem stofflichen Gefüge zu bringen. Die Entscheidung



Abbildung 7.15: Aufbau der Dichtesonde Liquiphant M

fällt auf die Verwendung von seitlichen Entnahmeröhrchen, welche sich mittels vorgefertigten Gewindes in die Außenwand einschrauben lassen. Da die Sonde bekanntlich mindestens 5cm Eintauchtiefe benötigt, um einen zuverlässigen Wert liefern zu können, werden sieben Entnahmestellen im Abstand von jeweils 5 cm voneinander am Zylinder installiert. Dadurch werden für beide Messgeräte gleiche Probestellen gewährleistet und die Vergleichbarkeit der Ergebnisse bleibt gewahrt. Außerdem kann davon ausgegangen werden, dass die Anzahl der Messstellen hinreichend ist, um eine dennoch gute Auflösung bei der Erstellung des Dichteprofils zu erreichen.

### Versuchsdurchführung

Für die Dichtesonde wird ein Messschlitten benutzt, durch den es möglich ist, dauerhaft in einer gewissen Höhe zu messen. Außerdem kann mit Hilfe des seitlich angebrachten Maßbandes die Position der Gabelzinken im Schlick exakt bestimmt werden.

Vor dem Einbringen in den Messzylinder wird der Schlick in Weithalsflaschen geschüttelt, wodurch er flüssiger wird. Es lösen sich auch die größten Bestandteile vom Behälterboden ab. Der Zylinder wird 3 Tage stehen gelassen, bis sich der Zustand einstellt, welcher in Abbildung 7.16 zu sehen ist. Dargestellt ist der Messzylinder mit dem eingefüllten Schlick und den beschrifteten Entnahmestellen für das Helium- Pyknometer.



Abbildung 7.16: Messzylinder mit Schlick gefüllt.

Schon bereits während der ersten Stunde nach dem Einfüllen des Schlicks war der Sedimentationsprozess deutlich zu erkennen. Es zeigt sich eine deutliche Schichtung, die bei der Stelle 5

auch mit einer Grautonänderung verbunden ist und auf eine mit der Tiefe zunehmende Dichte schließen lässt.

Die Entnahmen für die Referenzwertbestimmung werden getätigt, bevor die Sonde durch die Probe fährt. Der Zweck ist die Vermeidung eines möglichen Durchmischens der einzelnen Schichten, beim Herausziehen der Sonde. Die Entnahme dauert ca. 30 min pro Röhrchen, da der Schlick sehr zähflüssig ist.

Hierbei wird darauf geachtet, dass nur so viel Material entnommen wird, wie zwingend für die Ermittlung eines zuverlässigen Referenzwertes notwendig ist.

### Dichtebestimmungen

Der Schlick wird vorerst in kleine, verschließbare Proberöhrchen abgefüllt und später mit dem Pyknometer untersucht. Zur Messung des Dichteprofiles mit der Sonde wird diese von oben in die Probe eingetaucht und misst jeweils 5 min an jeder Entnahmestelle. Diese werden so angefahren, dass sie sich immer auf halber Höhe zu den Gabelzinken befinden, um einen späteren Vergleich beider Messverfahren unternehmen zu können.

In dieser Versuchsreihe geht es um die Erstellung eines Dichteprofiles in Abhängigkeit der Messtiefe. Die Dichte sollte sich dabei erwartungsgemäß mit zunehmender Tiefe erhöhen. In der Abbildung 7.17 sind die Ergebnisse beider Verfahren gegenübergestellt.

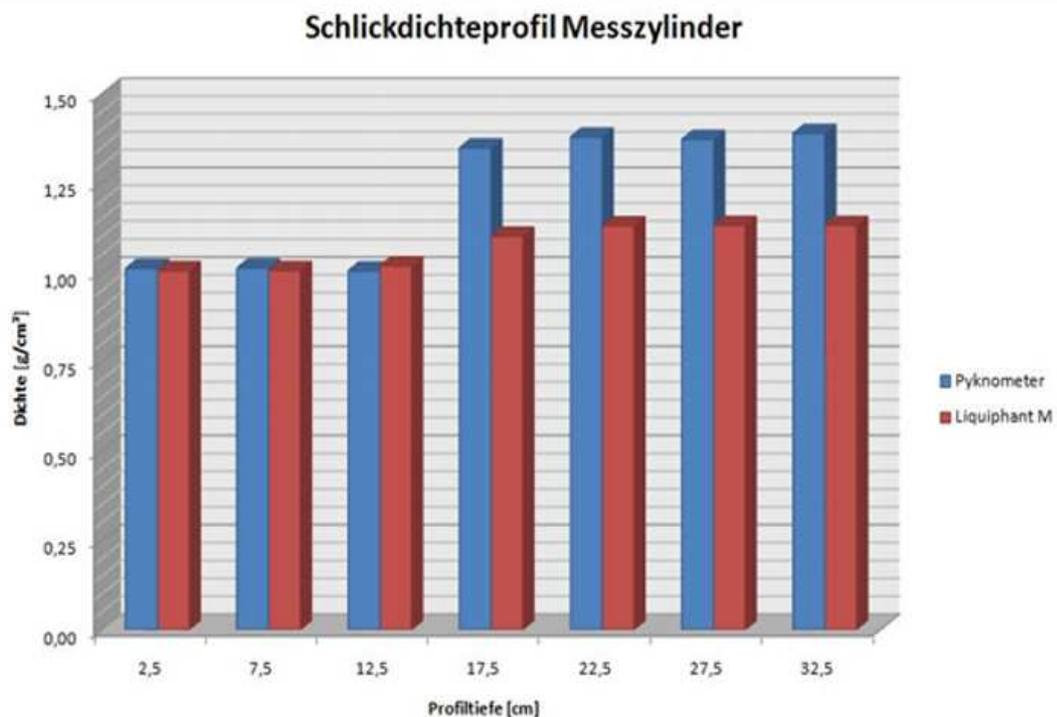


Abbildung 7.17: Ermitteltes Dichteprofil des abgesetzten Schlick im Zylinder

Die Ergebnisse des Helium- Pyknometers sind mit blauen, die des Liquiphant M mit roten

Balken dargestellt. Auf der Ordinatenachse ist die Tiefe des Messzylinders aufgetragen. Die angegebenen Tiefen entsprechen den Entnahmestellen für die Referenzproben. So befindet sich beispielsweise die erste Entnahmestelle in einer Tiefe von 2,5 cm usw. Zur besseren Orientierung kann hier noch einmal die Abbildung des Messzylinders aus der Abbildung 7.18 betrachtet werden. Wie im Diagramm zu erkennen ist, können aus den ersten 3 Entnahmestellen nur wässrige Proben entnommen werden. Vertraut man dem Bild des Zylinders, so sollte aber schon bei der 3. Entnahmestelle mit Schlick zu rechnen sein. Das Bild ist jedoch einen Tag vor den Messungen entstanden und die Schicht hat sich während dieser Zeit noch erheblich gesetzt. Der Zustand, welcher sich bei der Entnahme dieser Referenzprobe einstellt, kann in der nächsten Abbildung in Augenschein genommen werden.

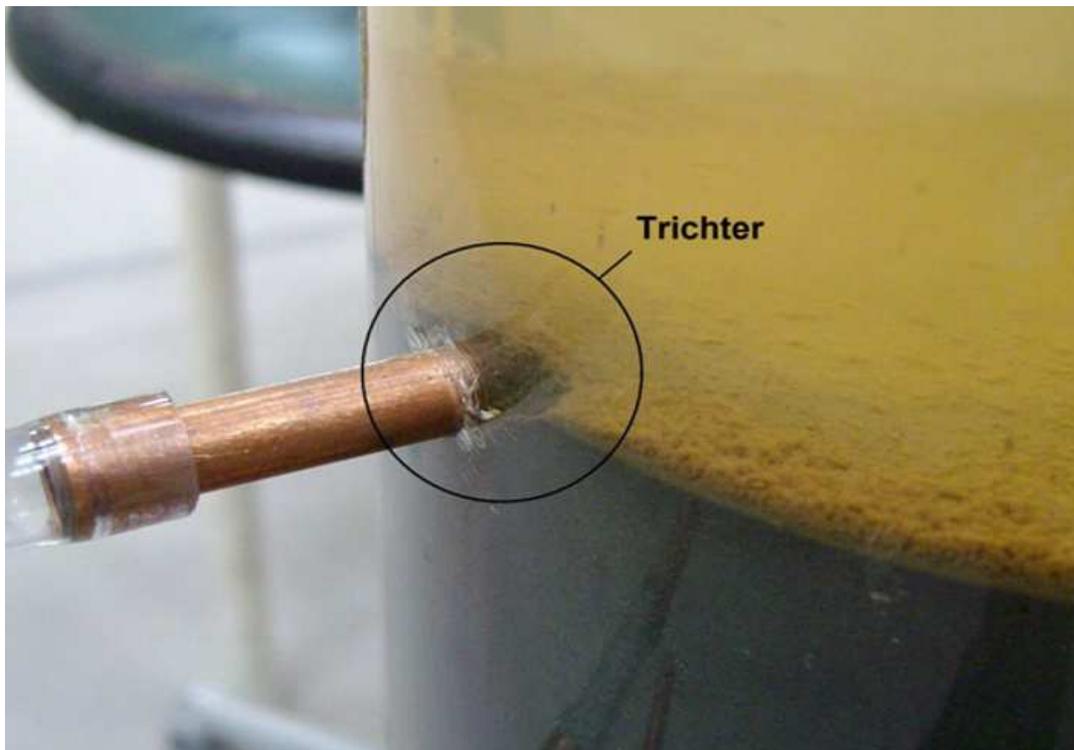


Abbildung 7.18: Absenktrichter an Entnahmestelle 3

Es bildet sich ein kleiner Absenktrichter beim Entnehmen des Materials und es zeigt sich, dass überwiegend Wasser entnommen wurde. Deutlich wird dies, vergleicht man die Werte im Diagramm miteinander. Das Pyknometer liefert einen geringeren Wert als die Sonde, wobei der Wert der Sonde hier nicht aussagekräftig ist, da sich die Gabelzinken zur einen Hälfte im Schlamm und zur anderen im Wasser befinden. Die ersten beiden Werte liegen aber in der Messgenauigkeit eng beieinander.

Werden als nächstes nur die Resultate des Pyknometers betrachtet, so fällt ein Sprung ab einer Tiefe von 17,5 cm auf. Die Dichte des Schlicks unterscheidet sich deutlich, von denen der darüber liegenden, wässrigen Schichten. Auch mit zunehmender Tiefe erhöht sich dieser Wert bis auf ein Maximum von ca.  $1,39 \text{ g/cm}^3$ . Dieser Verlauf bestätigt die vorherigen Annahmen.

Auch bei der Dichtesonde ist ab einer Tiefe von 17,5 cm ein Anstieg der Dichte zu verzeichnen. Jedoch fällt dieser Sprung deutlich geringer aus als bei den Referenzwerten. Die Dichte steigt zwar auch hier stetig mit zunehmender Tiefe, diese Veränderungen belaufen sich jedoch im Tausendstelbereich. Da der Messbereich der Sonde im Standardbetrieb seine Grenzen im Hundertstelbereich findet, ist der Anstieg als nicht signifikant nachweisbar einzuordnen. Fakt ist jedoch, dass die berechneten Werte in keinsten Weise den Referenzwerten entsprechen.

Nun können aber auch bei der Referenzwertbestimmung Fehler unterlaufen sein. So wäre es zum Beispiel möglich, dass durch die seitliche Probenahme nur bestimmte Bestandteile entnommen werden und sich dadurch kein Querschnitt durch die gesamte Schicht darstellt. Des Weiteren wäre es möglich, dass einzelne Bestandteile durch ihre Fließeigenschaften nicht durch die dünnen Rohre hindurchfließen und davor verbleiben. Es wird also nach einer Methode gesucht, mit der die Dichte einer gesamten Schicht abgebildet werden kann. Dazu müssten die einzelnen Schichtungen voneinander getrennt werden.

Die Lösung dieser Problemstellung ist das Einfrieren und das anschließende Auseinandersetzen des gesamten Zylinders. In einem Hochleistungskühlgerät wird die Probe innerhalb eines halben Tages auf etwa  $-60^{\circ}\text{C}$  gefroren. Dabei dehnt sie sich zwar etwas aus, Einfluss auf den Dichteverlauf, nimmt das jedoch nicht. In der nächsten Abbildung 7.19 sind der gefrorene Messzylinder und eine der abgeschnittenen Scheiben zu sehen.



Abbildung 7.19: Gefrorene Schlickprobe im Messzylinder.

Insgesamt wird die Probe mit der Bandsäge in 11 Teile zerschnitten. 10 Scheiben haben etwa die gleiche Dicke und bilden den gesamten sedimentierten Schlick ab, die andere Scheibe beinhaltet das gesamte darüber liegende Wasser. Nachdem diese Schichten getaut sind, werden

sie homogenisiert und mit dem Helium- Pyknometer untersucht. Das Ergebnis stellt sich wie folgt dar.

Die Art der Darstellung ist bereits aus den vorangegangenen Versuchen bekannt. Die Schicht des Wassers zeichnet sich bis in eine Tiefe von 12 cm ab. Dies ist deutlich am Dichtewert zu erkennen. Danach steigt die Dichte auf ca.  $1,15 \text{ g/cm}^3$  und tut dies weiter bis sie in der untersten Schicht ihr Maximum von  $1,45 \text{ g/cm}^3$  erreicht hat. Diese Analyse bestätigt zwar somit die Vermutung, dass durch die seitliche Entnahme nicht alle Bestandteile entnommen werden, liefert aber gleichzeitig den Beweis, dass die Sonde im Schlick nicht zuverlässig misst. Im kommenden Diagramm sind noch einmal alle drei aufgenommenen Dichteprofile aufgetragen.

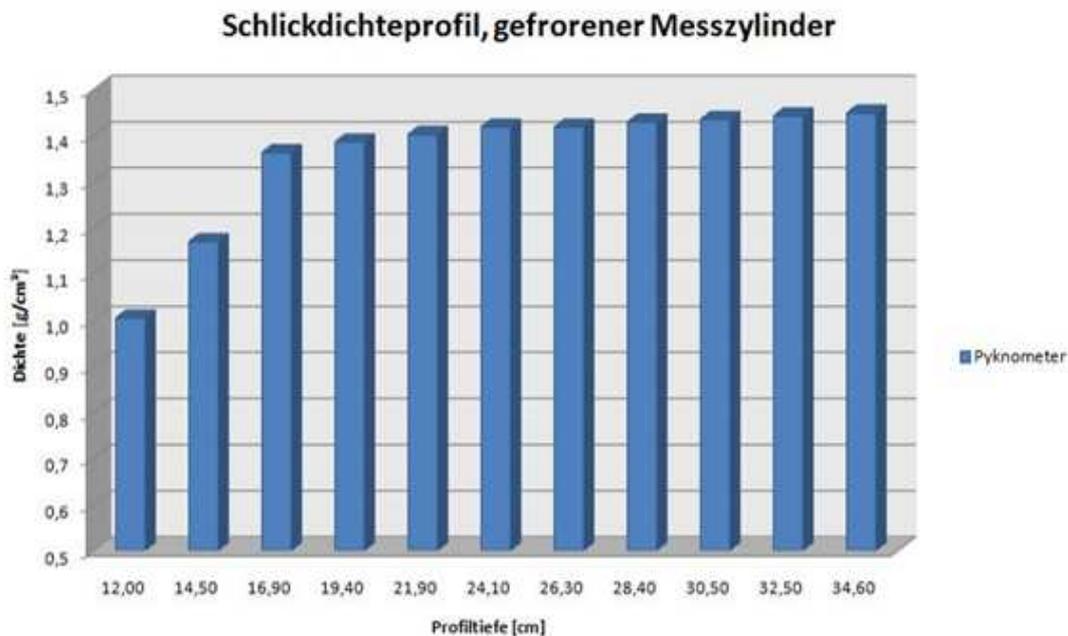


Abbildung 7.20: Darstellung des Dichteprofiles der gefrorenen Schlickprobe

Hier soll mit einer anderen Diagrammart gezeigt werden, wie sich die aufgenommenen Profile voneinander unterscheiden. Aufgetragen ist erneut die gemessene Dichte über die Profiltiefe. Es wird schnell ersichtlich, dass sich die Pyknometergraphen nur wenig voneinander unterscheiden. Sie verfügen über den gleichen Verlauf und unterscheiden sich nur in der Höhe ihrer Werte. Verblüffend ist, dass auch die Kurve der Dichtesonde einen annähernd gleichen Verlauf aufweist. Im Umkehrschluss würde die bedeuten, dass es eventuell möglich ist, die mit der Dichtesonde gemessenen Werte mittels Fitfunktion an die anderen Werte anzupassen. Würde nur mit Hilfe der letzten Abbildung einer entsprechenden Möglichkeit der Anpassung nachgegangen, so ließen sich die Werte, die mit dem Liquiphant M gemessen wurden, schon durch eine einfache Funktion an die Referenzwerte anpassen. So seien die Werte der Dichtesonde hier mit  $x$  benannt und die sich ergebende Dichte mit  $y$ . Mit der untenstehenden Gleichung ergäbe sich folgender Graph, welcher in Abbildung 7.22 zu sehen ist.

$$y = 3,05(x - 1) + 1$$

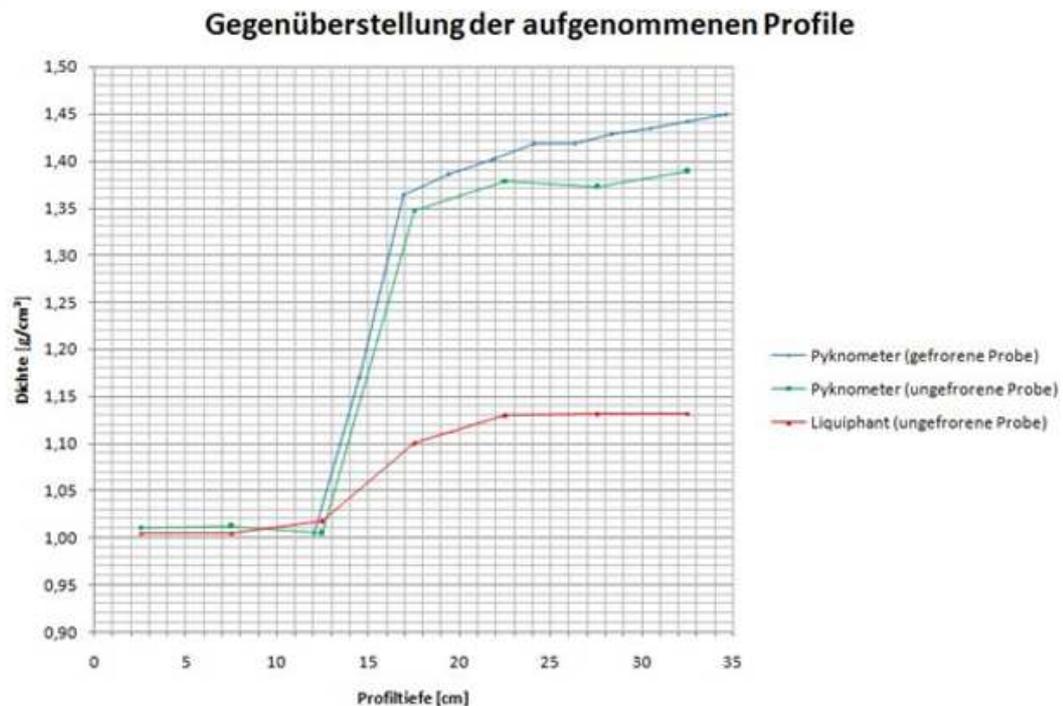


Abbildung 7.21: Gegenüberstellung aller aufgenommenen Dichteprofile

Es sind noch einmal die aufgenommenen Profile dargestellt. Hinzugekommen ist die oben beschriebene Funktion. Mit ihr wurden die vom Liquiphant M errechneten Dichten entsprechend angepasst. Schon mit dieser einfachen Funktion wäre es möglich, eine gewisse Anpassung der Werte zu erreichen.

Weitere Versuche mit anderen Schlickproben haben allerdings gezeigt, dass die gefundene Anpassungsfunktion von Versuch zu Versuch erheblichen Schwankungen unterworfen ist. Damit lässt sich der Liquiphant derzeit nicht zur Dichtebestimmung in natürlichen Flüssigschlickten einsetzen.

### 7.4.3 Kalibrierung für Quarzmehl

Da die Dichtebestimmung von Naturschlickten mit dem Liquiphanten keine eindeutigen Ergebnisse liefert, soll nun untersucht werden, ob die Sonde in Quarzmehlsuspensionen eingesetzt werden kann.

Dazu wurden wieder verschiedene Quarz-Wasser-Suspensionen mit bekanntem Feststoffanteil hergestellt, die Dichte theoretisch nach

$$\rho = \rho_W + \phi(\rho_S - \rho_W)$$

mit

$\phi$  = Feststoffanteil der Probe,

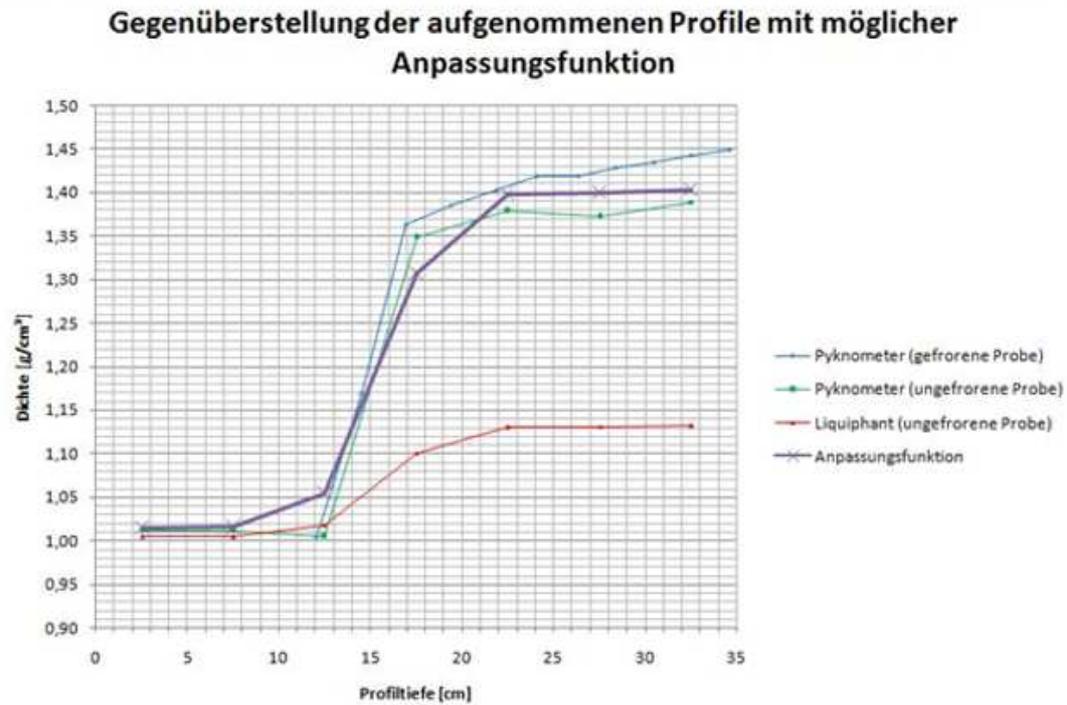


Abbildung 7.22: Mögliche Anpassungsfunktion verglichen mit den Dichteprofilen

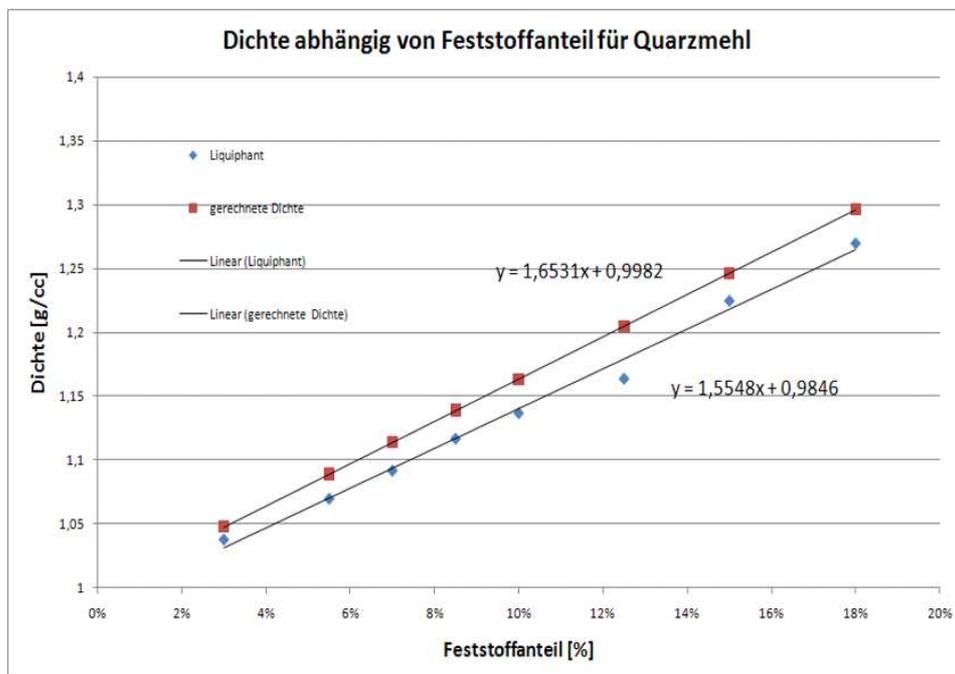


Abbildung 7.23: Dichte abhängig von Feststoffanteil für Quarzmehl

$\rho$  = Rohdichte der Probe,  
 $\rho_W$  = Rohdichte des Wassers,  
 $\rho_S$  = Trockenrohddicht der Probe

und anschließend mit dem Liquiphanten bestimmt. In der Abbildung 7.23 sind diese beiden Dichteergebnisse abhängig von Feststoffanteil aufgetragen.

In der Abbildung 7.24 ist das Verhältnis dieser beiden Werte und damit die Kalibrierungsfunktion aufgetragen. Mit dieser plausibel erscheinenden, und auch bei Mehrfachmessungen stabilen Funktion kann man nun die Dichtemessungen in Quarzmehlsuspensionen kalibrieren.

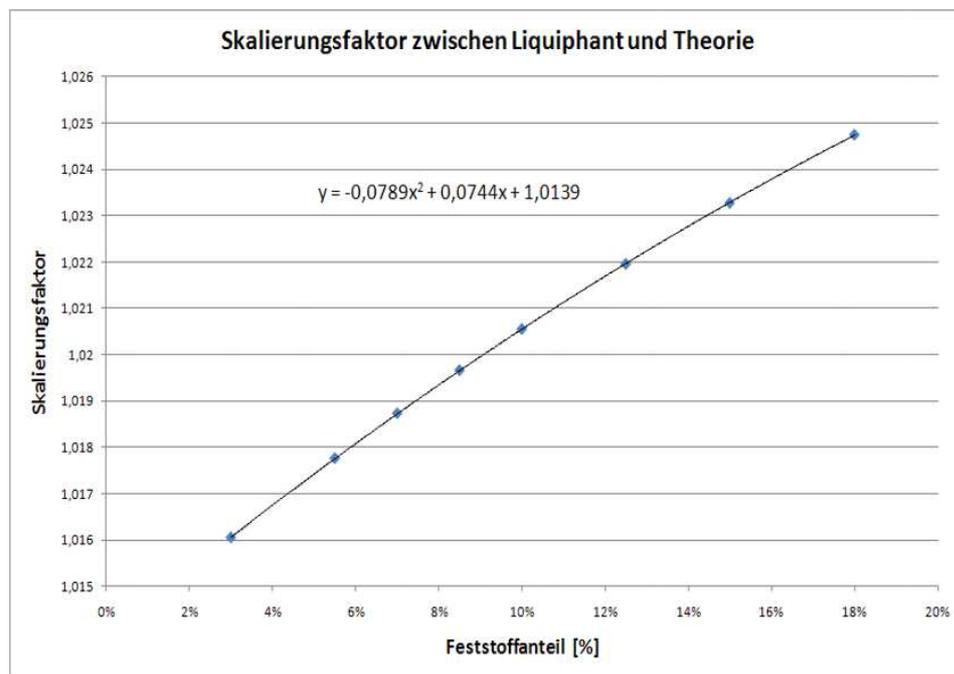


Abbildung 7.24: Skalierungsfaktor zwischen Liquiphant und Theorie

Bei den Messungen im Laborversuch kann man nun umgekehrt aus den mit dem Liquiphanten gemessenen Werten für die Dichte die kalibrierten Dichtewerte bestimmen und dann nach

$$\phi = \frac{\rho - \rho_W}{\rho_S - \rho_W}$$

in den Feststoffgehalt umrechnen.

#### 7.4.4 Folgerungen

Die vorgestellten Arbeiten zeigen, dass die Messung der Dichte von granularen Suspensionen sowohl im Labor, aber noch viel mehr in situ mit großen Problemen behaftet sind. So ist die Kalibrierung der Dichtesonde für Naturschlicke mit erheblichen Fehlern behaftet und nicht

eindeutig. Dagegen zeigt sich für Quarzmehl ein eindeutiger Zusammenhang zwischen dem Dichtemessergebnis und dem Feststoffgehalt in einer Probe.

Es ist daher im Rahmen dieses Projekts unumgänglich, die Naturschlicke aus Ems und Weser im Labormodell durch einen künstlichen Schlick aus Quarzmehl zu ersetzen, um exakte Dichteprofile zu bestimmen.

Somit bleibt die Entwicklung einer in situ Sonde zur Dichtebestimmung eine wichtige Voraussetzung, um zukünftig mit Naturschlick im Labormodell zu arbeiten.

## 7.5 Beschreibung der Einzelversuche

Das physikalische Laborhafenmodell wurde auf dem Freigelände mit den Maßen wie in Abbildung 7.25 gebaut. Die zwei Räder können mit einer maximalen Geschwindigkeit von 1 m/s laufen und die Geschwindigkeit kann beliebig gesteuert werden. Durch das Plexiglas kann man die Ablagerung des Quarzmehls sehen und messen.

Der Messwagen auf der Schiene des Modells läuft vollautomatisch mit einem gesicherten Fahrplan, der alle Messpositionen in x, y und z Koordinaten definiert. Die Messtechniken, wie in Abbildung 7.5 beschrieben, wurden an dem Messwagen aufgebaut.

Für die Messung wurden drei Fahrpläne entworfen. Den Ersten findet man vor dem Hafenbecken und den Dritten hinter dem Hafenbecken. Diese beiden Fahrpläne bestehen jeweils aus 18 Messpositionen auf einer horizontalen Ebene und 8 Messpositionen auf der vertikalen Richtung. Die Abstände der Messpositionen wurden mit  $\Delta x = 1,263m$  und  $\Delta y = 0,2m$  festgelegt. Bei dem zweiten Fahrplan wurden auf der horizontalen Ebene 104 Messpositionen und auch auf der vertikalen Richtung 8 Stellen konstruiert. Die Abstände der X-Achse und Y-Achse bei dem Fahrplan 2 wurden mit  $\Delta x = 0,513m$  und  $\Delta y = 0,214m$  gemessen (siehe Abbildung 7.25).

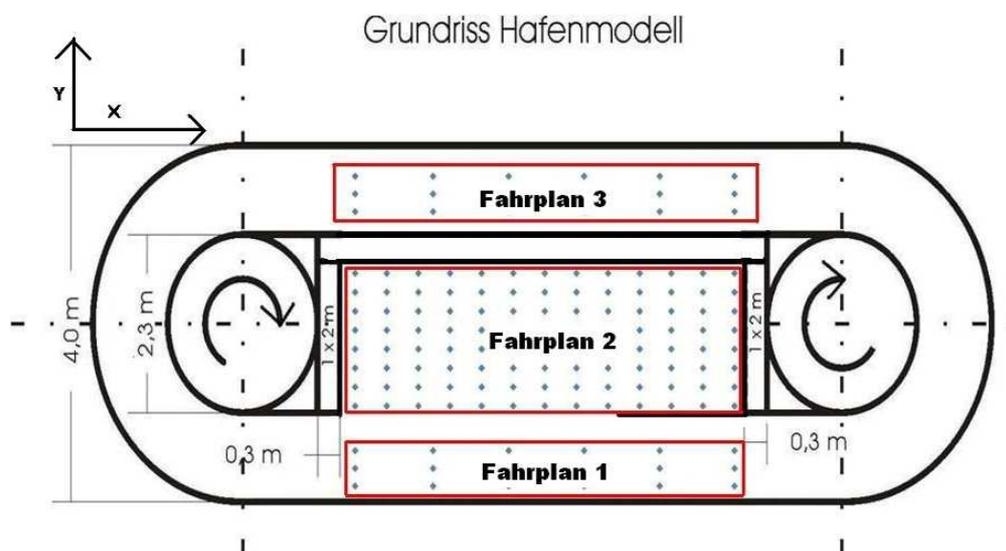


Abbildung 7.25: Messpositionen an dem Messfahrplan

### 7.5.1 Geschwindigkeitsmessung in reinem Wasser

In einem ersten Messdurchlauf an dem Modell sollten die sich einstellenden Strömungsgeschwindigkeiten ermittelt werden. Die Wahl von geeigneten Strömungsgeschwindigkeiten für die einzelnen Durchläufe ist von entscheidender Bedeutung für die Übertragbarkeit der zu erzielenden Ergebnisse. Eine zu gering eingestellte Geschwindigkeit löst keine Erosion aus. Eine zu starke dagegen erzeugt eventuell zu viele Turbulenzen, welche Ablagerungen verhindern. Dazu wurden die Schaufelräder der Versuchsanlage mit 0,076 Umdrehungen pro Sekunde in Bewegung gesetzt. Bei einem Radumfang von 7,226 m ergibt sich daraus eine Geschwindigkeit von 0,55 m/s auf der Höhe der Schaufeln. Sobald sich nach einiger Zeit eine konstante Strömungsgeschwindigkeit im gesamten Modellgebiet eingestellt hat, wurde die Geschwindigkeitsmessung begonnen.

Die Strömungsgeschwindigkeiten wurde mit einer Vectrino-Sonde gemessen. Der Impuls der Sonde wurde auf 254 Hz eingestellt. Die Messergebnisse wurden bei der Auswertung gemittelt. Die Vectrino-Sonde wurde bis zu einem Abstand von 5 cm zum Boden geführt.

Das Messergebnis der Strömungsgeschwindigkeit wurde mit Matlab dargestellt. Die in x- und y-Richtung gemessenen Geschwindigkeiten von den übereinander liegenden Messpunkten wurden über die Tiefe gemittelt und daraus das 2D-Geschwindigkeitsfeld bestimmt.

Der Pfeil gibt durch seine Spitze die Richtung der resultierenden Strömung an. Die Länge der Pfeile lässt Rückschlüsse auf die Geschwindigkeiten zu. Kurze Pfeile sind langsamen und lange Pfeile schnellen Strömungsgeschwindigkeiten zugeordnet. Das heißt, das Messergebnis ist nach Größen skaliert und grafisch dargestellt.

So ist zu erkennen, dass sich das Wasser in der um das Hafenbecken führenden Rinne im Uhrzeigersinn bewegt und auf Höhe der Schaufelräder die höchsten Strömungsgeschwindigkeiten aufweist (siehe Abbildung 7.26).

Der für die Untersuchung der Sedimentation interessantere Bereich ist das Hafenbecken selbst. Hier setzt sich das Wasser zunächst parallel zu der vor dem und auch hinter dem Hafenbecken liegenden Rinne in Bewegung. Diese relativ gerade Strömung wird dann jedoch umso stärker ins Hafenbecken gelenkt, umso näher sie der flussabwärts gelegenen Hafenbegrenzung kommt. Vor dem Hafen befindet sich eine zwei Meter lange Trennwand. Um die Sekundärströmung in das Hafenbecken zu vermeiden, wurde die Trennwand gleich nach dem Räderlauf gestellt. Durch eine weitere Umlenkung durch die Trennwand entsteht im Hafen eine kreisförmige Strömung, die sich in den Uhrzeigersinn dreht.

Diese Strömung weist anfänglich eine relativ hohe Geschwindigkeit auf, wird durch die Strömung in der Rinne angetrieben, und verliert auf dem Weg durch das Hafenbecken an Tempo. Die Regionen, an denen die Strömungsgeschwindigkeiten am niedrigsten sind, liegen hinter der Trennwand besonderes an den Ecken des Hafenbeckens.

### 7.5.2 Versuch mit Quarzsuspension

Für eine Simulation des Sedimenttransports wurden insgesamt 2,5 Tonnen des Versuchsmaterials Quarzmehl 10000 in das Modell eingebracht. Dabei wurden je 1,25 Tonnen zu einem Damm (siehe Abbildung 10) geformt, der sich über beide halbkreisförmigen Rinnenabschnit-

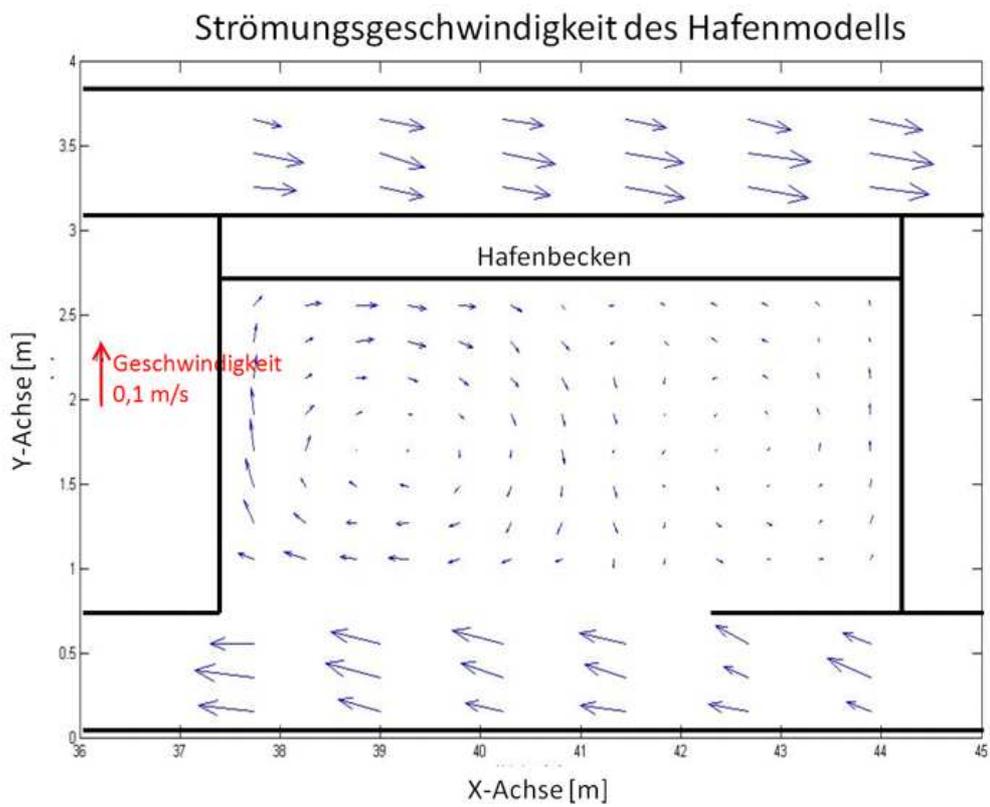


Abbildung 7.26: Strömungsbild im Hafenmodell

te erstreckt und sich an die Außenwand anlegt. Die Dämme sind an dieser Stelle ca. 35 cm hoch und fallen nach einem 12 cm, in die Rinne hereinreichendem, breiten Plateau linear auf Nullniveau an der Rinneninnenseite ab. Die Dämme sind also gegenüberliegend zu den Schaufelrädern angeordnet. Die Anordnung an diesen Positionen im Modell ist besonders günstig, da hier durch die Bewegung der Schaufelräder die höchsten Strömungsgeschwindigkeiten und Turbulenz- Intensitäten zu erwarten sind. Erosion wird hier also am ehesten auftreten. Daraufhin wird der festgelegte Wasserstand von 0,39 Metern eingestellt. Wobei darauf zu achten ist, dass beim Befüllen der Versuchsanlage möglichst wenige Turbulenzen erzeugt werden, die eine vorzeitige Erosion des Damms bewirken könnten (siehe Abbildung 7.27).

Die Messzeit beträgt ca. fünf Stunden und es gibt 140 Messpositionen auf jeder der acht Ebenen (d.h. insgesamt 1120 Messpositionen).

### **Messergebnisse der Trübung**

Entsprechend dem Fahrplan für den Messwagen ist es sinnvoll, die Messergebnisse für die Trübung im Hafenbecken auf vertikalen Schnittflächen senkrecht zur Hauptachse auszugeben. Auf jeder Schnittfläche kommen so 8 mal 8 Trübungsmessungen zusammen, die mit dem Surface Fitting Tool in MATLAB dargestellt (siehe Abbildung 7.28 und Abbildung 7.29) zu einer Flächeninformation verdichtet wurden. Die Messzeit pro Schnittebene beträgt ca. 16 Minuten.

Bereits eine halbe Stunde nach Versuchsbeginn kann man schon gut erkennen, dass die Schwebstoffe in das Hafenbecken diffundieren (siehe Abbildung ). Die Abbildung 7.28 zeigt die Messzeit von Minute 0:30 bis 0:46.

Die in den Kurven aufgewirbelten Sedimente diffundieren langsam in das Hafenbecken. Man erkennt dies an der Abnahme der Dichtekonzentration in der Wassersäule von links (Hafenmündung) nach rechts (Uferwand).

Die Dichten der unteren Schichten sind nicht deutlich größer als die der oberen Schichten, es hat sich also noch keine vertikale Profilierung durch Absetzprozesse eingestellt.

Im diesem Stadium des Versuchs hat sich noch keine stationäre Strömung im Modell eingestellt und es wird immer noch viel Material in den Kurven erodiert.

Die Einheit der Trübung wird in g/l gegeben. Bei der Abbildung 7.28 werden Trübungsdichten von ca. 55,46 g/l bis 64,82 g/l gezeigt.

Bei der Abbildung 7.29 kann man das Trübungsmessergebnis ca. 4 Stunden nach Versuchsbeginn in der Schnittebene  $X = 43,89$  m sehen. Die Messzeit für diesen Schnitt verlief von 4:00 bis 4:16. Die Schnittebene befindet sich hinter der Trennwand, wo die Strömungsgeschwindigkeit geringer als in den offenen Bereichen ist.

Es gibt zwei Unterschiede zwischen der Abbildung 7.28 und der Abbildung 7.29. Der erste Unterschied ist die Messzeit. Nach Ablauf der 4 Stunden hat sich eine fast stationäre Strömung im Modell ausgebildet und es wird nicht mehr so viel Material erodiert, wie zu Beginn des Versuchs. Der zweite Unterschied ist die Strömungsgeschwindigkeit. Wie schon erwähnt, sind die Strömungsgeschwindigkeiten hinter dem Hafenbecken viel geringer. Daher kann man bei dem vertikalen Dichteprofil gut erkennen, dass die Dichten in der unteren Schicht viel größer sind als in der oberen Schicht.

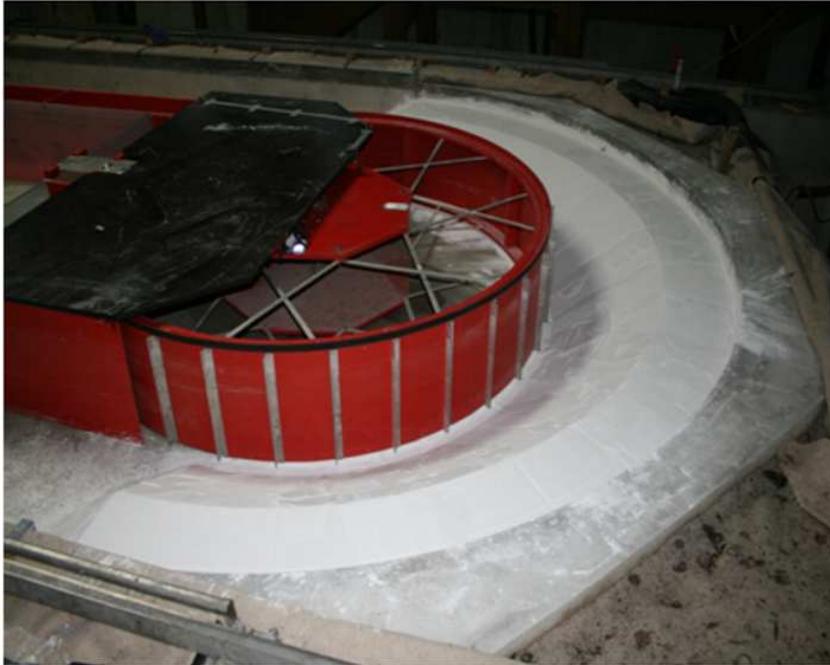


Abbildung 7.27: Quarzdam als Anfangsbedingung in dem Hafenmodell

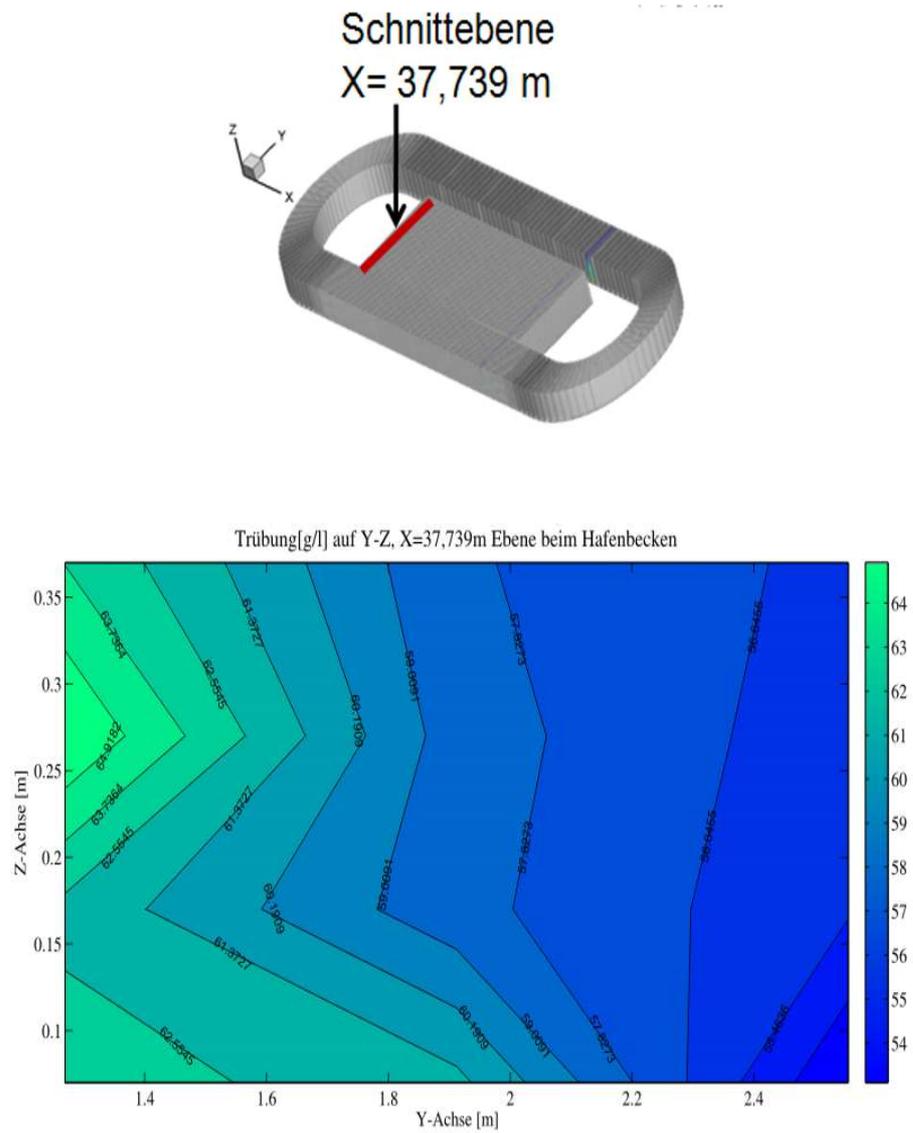


Abbildung 7.28: Trübung [g/l] auf Y-Z-Ebene, bei X = 37,739 m im Hafenbecken, Messzeit 0:30 bis 0:46

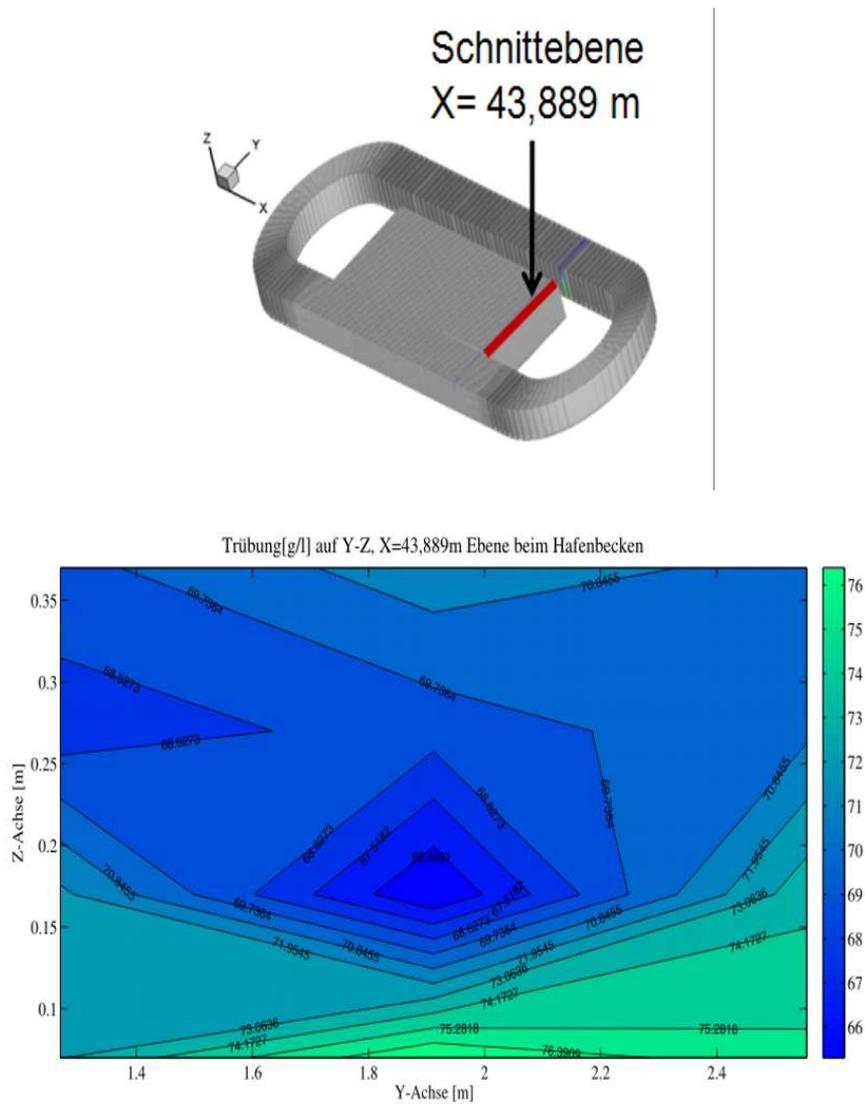


Abbildung 7.29: Trübung[g/l] auf Y-Z, X= 43,889m Ebene bei dem Hafenbecken. Messzeit 4:00 bis 4:16.

In dieser Ebene ist ebenfalls gut ersichtlich, dass eine vertikale Strömung existiert, denn in der Mitte des Profils befindet sich eine etwas geringere Trübung. Die Trübungswerte der gesamten Schnittebene hatten eine Größenordnung von 76,39 g/l bis 76,85 g/l.

### Messergebnisse der Ablagerung in dem Hafenbecken

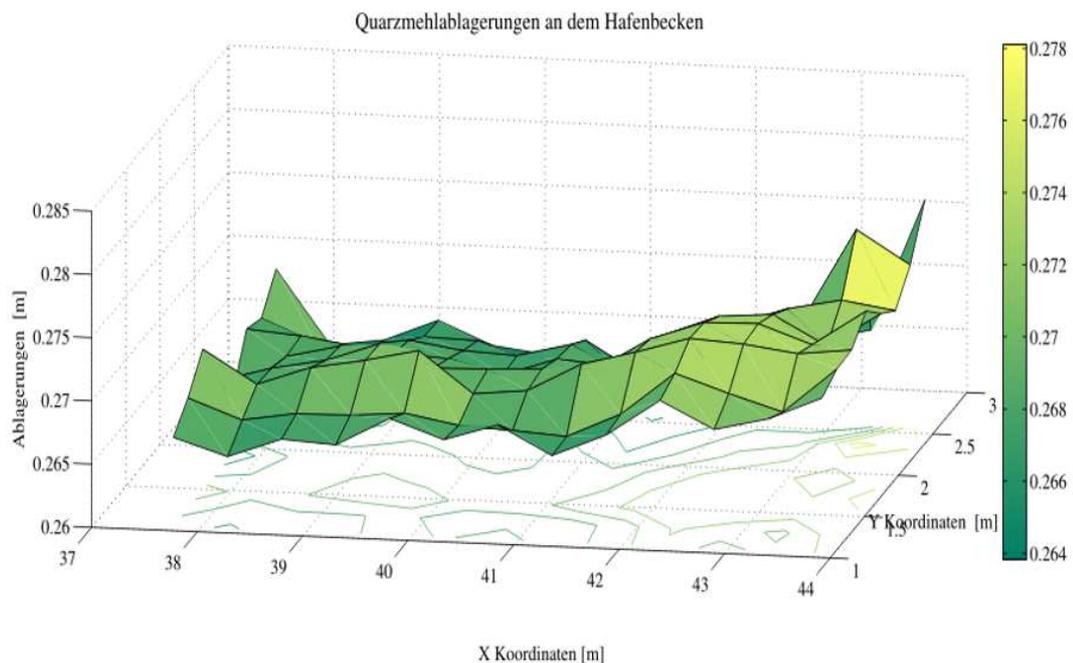


Abbildung 7.30: Quarzmehlablagerungen in dem Hafenbecken nach fünf Stunden

Zur Messung der Ablagerung wurde das Hafenmodell nach der Messungen der Dichte, Trübung und Strömungsgeschwindigkeit etwa zwei Tage in Ruhe gelassen, damit die Ablagerungsmessung ohne Strömung gemessen werden konnte.

Die mittels Ultraschallsonde ermittelten Ablagerungen wurden mit MATLAB im Hafenbecken in Abbildung 7.30 dargestellt.

So lassen sich nach Auswertung der durch die Ultraschallsonde gemessenen Sedimentablagerungen des Versuchsstoffs Quarzmehl folgende Punkte feststellen: Auf der gesamten Fläche des Hafenbeckens hat sich eine Quarzmehlschicht über fast 26 cm Dicke ergeben. Hinter der Trennwand des Hafenbeckens hat sich diese Schicht um 3 cm verstärkt (siehe Abbildung 7.30).

### Messergebnisse mit dem Liquiphanten für die Dichteverteilung

Um auch Aussagen über die Dichte der Sedimentablagerungen am Boden zu bekommen, wurden Messungen mit dem Liquiphanten durchgeführt. Die gesamte Messzeit ist wie bei den anderen Messungen ebenfalls ca. fünf Stunden, womit die Zeit für die Messung im Hafenbecken allein 3 Stunden 40 Minuten beträgt, da danach die Fahrpläne 1 und 3 abgearbeitet werden.

Im Unterschied zur Trübungssonde muss beim Liquiphanten aus Sicherheits- und Messgenauigkeitsgründen ein größerer Abstand zum Boden eingehalten werden. Die Nullstelle auf z-Achse wurde auf 5 cm etwas höher gestellt, was bei einem Vergleich mit den Trübungsergebnissen zu berücksichtigen ist.

Die Abbildungen 7.31 bis 7.39 zeigen die Dichtemessergebnisse im Bereich des Hafenbeckens. Die Darstellungen wurden mit Tecplot 3D erstellt.

Die Abbildungen 7.31 bis 7.35 zeigen Profile, die sich im offenen Bereich des Hafens, also nicht hinter der Trennwand, befinden.

Die Schnittebene der Abbildung 7.31 wurde etwa nach einer halben Stunde nach Versuchsbeginn gemessen. Bei diesem Abschnitt ist erkennbar, dass die Sedimente langsam beginnen sich in dem Hafenbecken abzulagern. Die Dichtewerte bewegen sich in dieser Ebene zwischen ca. 0,98 g/l und 1,15 g/l.

Die Messungen der Schnittebenen der Abbildungen 7.33 und 7.35 wurden ca. 1 Stunde 20 Minuten und ca. 2 Stunden 15 Minuten gestartet. Die Dichtewerte sind etwas höher als bei der ersten Ebene. Bei den Abschnitten wurden Dichten zwischen 1,0 g/l und 1,25 g/l gemessen.

Hinter der Trennwand ist die Strömungsgeschwindigkeit langsam und es ist keine Sekundärströmung, die von der Rinne direkt in das Becken fließt, vorhanden. Die Resultate kann man in den Abbildungen 7.37 und 7.39 sehen. Die Schnittebene der Abbildung 7.37 befindet sich direkt am Beginn der Trennwand. Durch eine rotierende Strömung fließt Wasser in das Hafenbecken ein. Damit bildete sich zwischen der Trennwand und dem Hafenbecken ein Tal aus.

Bei der letzten Abbildung 7.39 befindet sich die dickste Ablagerung auf dem Grund des Hafenbeckens, was durch die Ablagerungsmessung bestätigt werden konnte. In diesem Bereich befindet sich fast keine Strömungsgeschwindigkeit und das Quarzmehl sedimentiert sehr leicht.

## 7.6 Zusammenfassende Bewertung

Der hier vorgestellte Versuchsaufbau dient vor allem dazu, wohldefinierte Anfangs- und Randbedingungen für die numerische Modellierung zu garantieren. Die Anfangsbedingungen sind durch den Wasserstand im Modell und die Anfangsbelegung mit Quarzmehl wohldefiniert.

Als Randbedingung ist nur die Rotationsgeschwindigkeit der Räder vorzugeben, es wird weder Wasser noch Feststoff in das Modell ein- oder ausgetragen.

Die Messungen wurden von einem Messwagen aus durchgeführt. Das Messwagenprinzip hat im Vergleich zu Dauermessungen nur einen einzigen Vorteil: Man benötigt ein Messgerät nicht mehrfach. Der Nachteil des Messwagenprinzips besteht darin, dass alle Messungen zu unterschiedlichen Zeitpunkten stattfinden und man keine synoptischen Ergebnisse bekommt.

Während die Geschwindigkeits- und Trübungsmessungen gute und plausible Ergebnisse erbrachten, sind die Dichtemessungen mit dem Liquiphanten immer mit einem großen quantitativen Fragezeichen versehen.

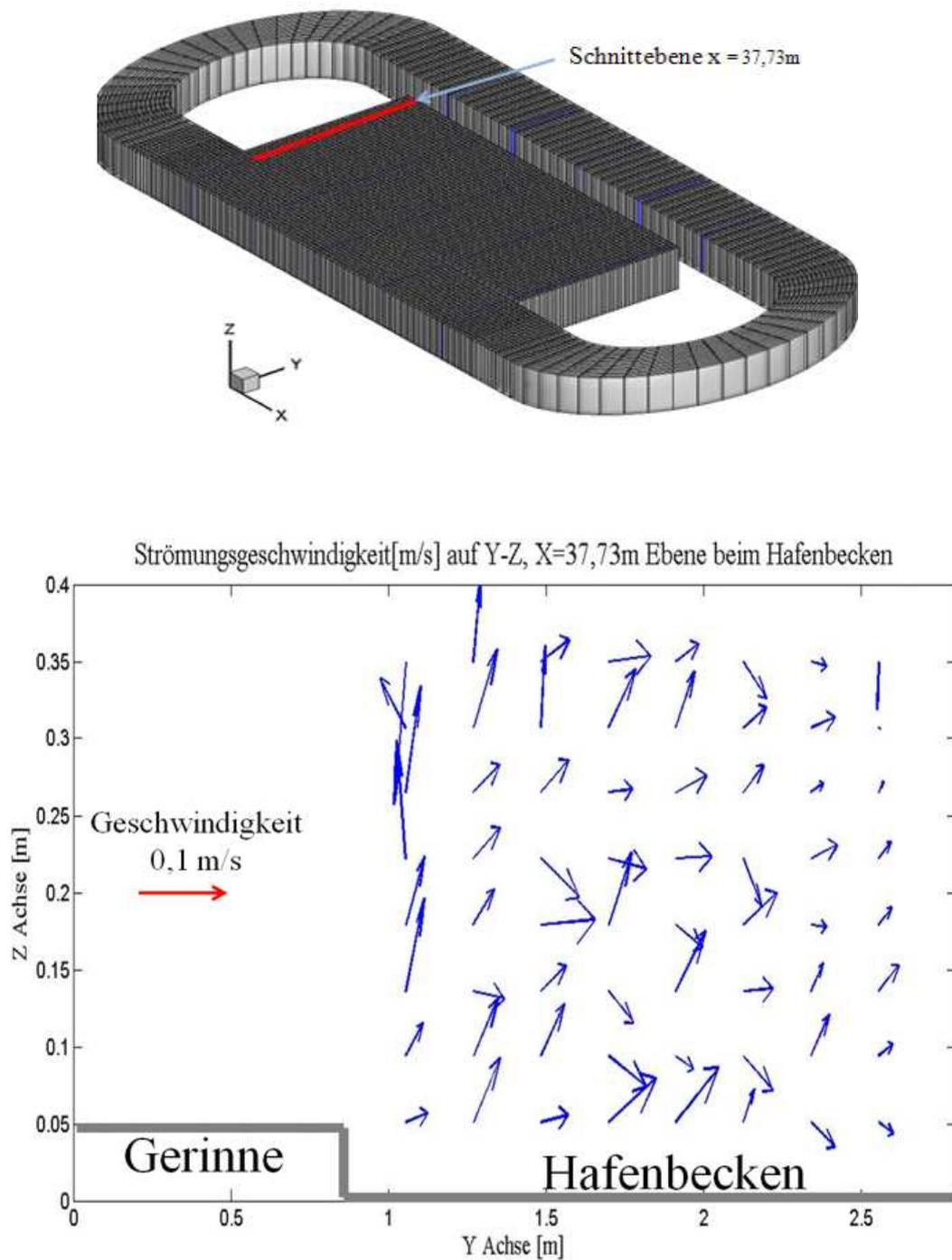


Abbildung 7.31: Strömungsgeschwindigkeit auf Y-Z-Ebene, bei  $X = 37,73\text{ m}$  in dem Hafenbecken nach einer halben Stunde

Trübung[g/l] auf Y-Z,X=37,739m Ebene beim Hafenbecken

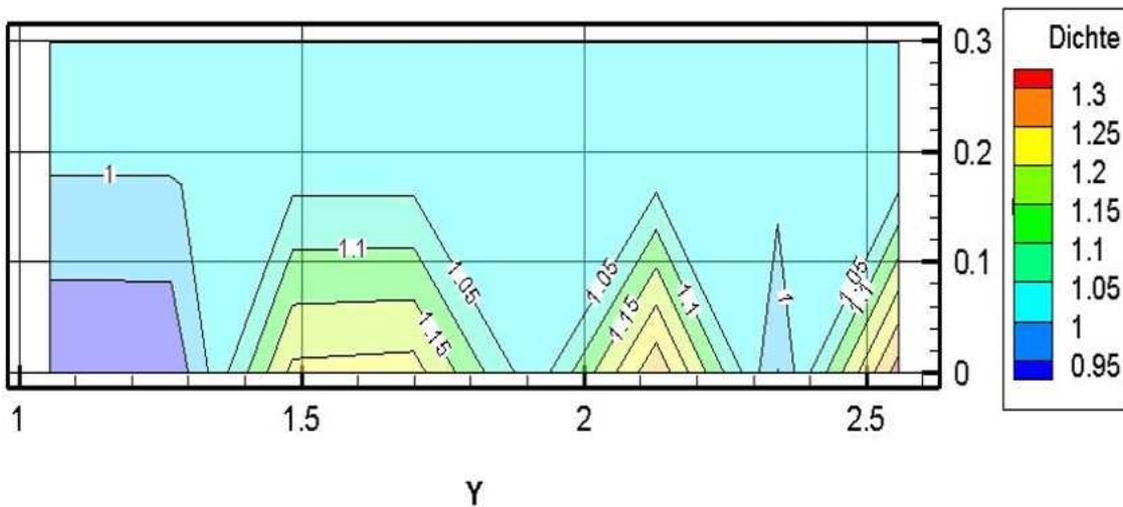
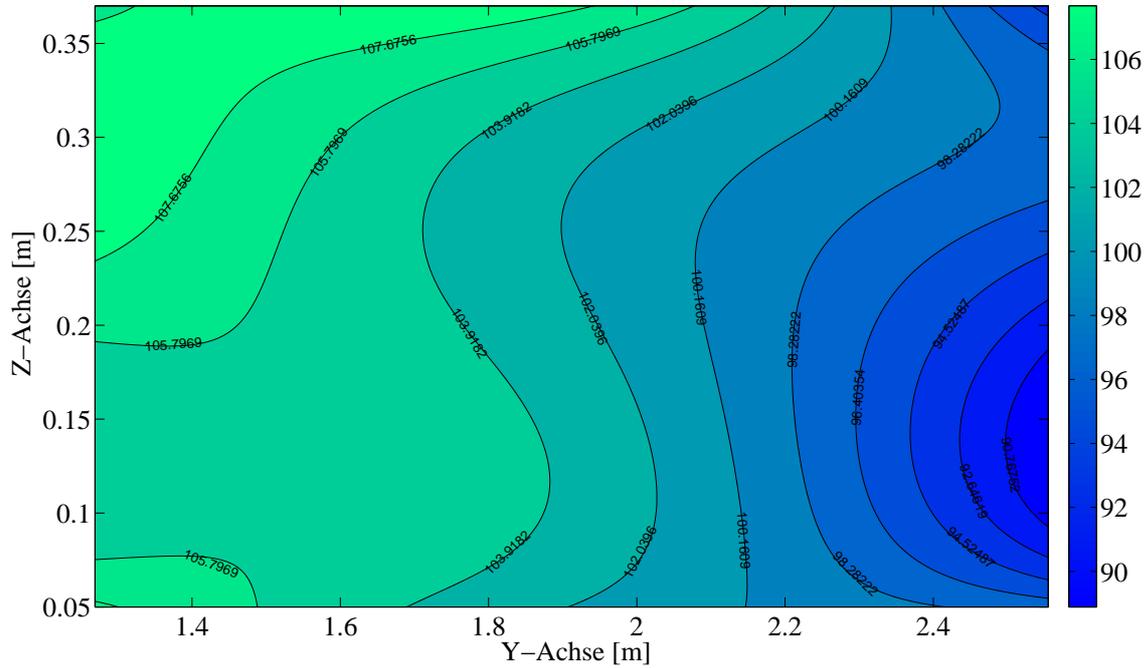


Abbildung 7.32: Trübung[g/l], und Dicht[g/cc] auf Y-Z-Ebene, bei X = 37,73 m in dem Hafenbecken nach einer halben Stunde

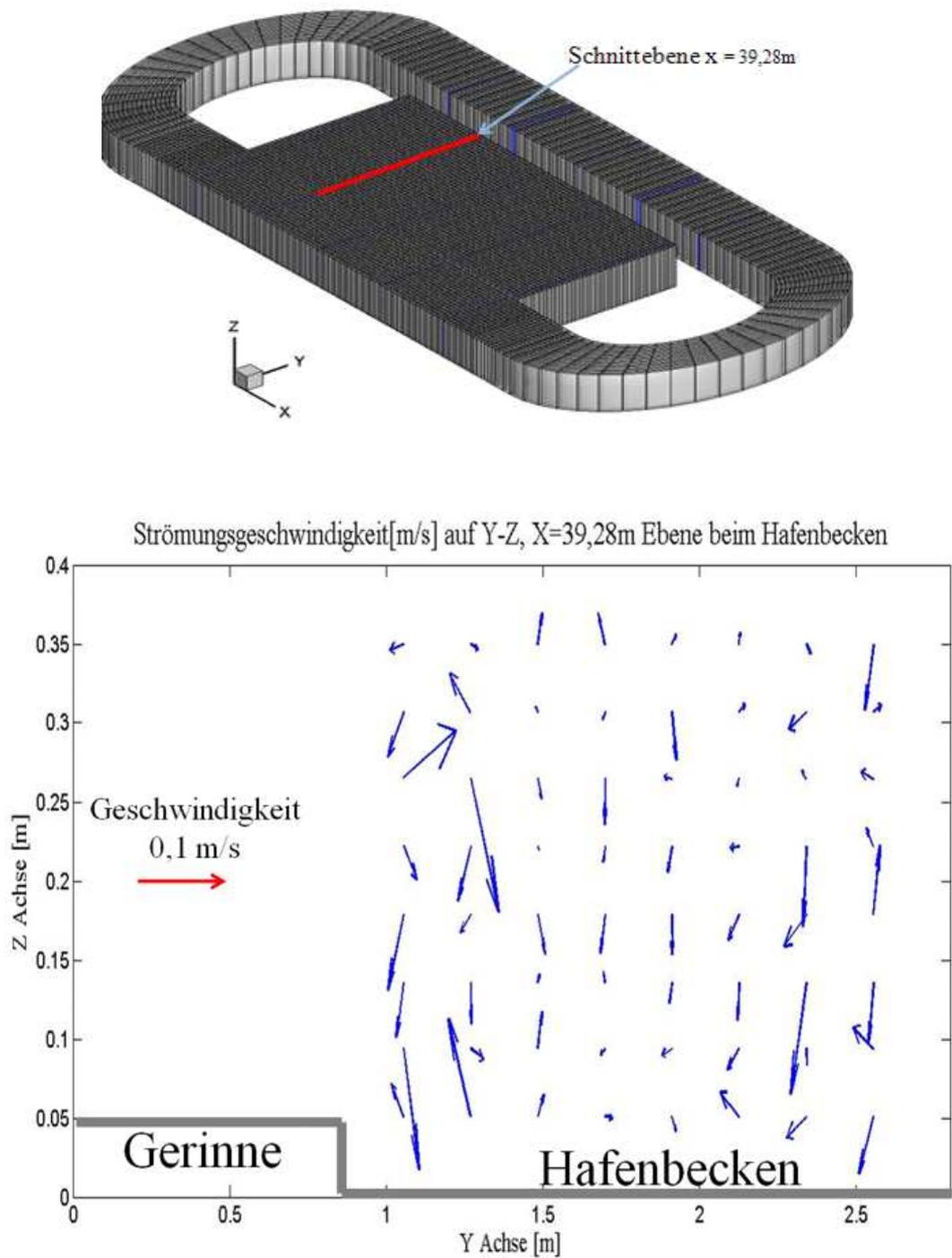


Abbildung 7.33: Strömungsgeschwindigkeit auf Y-Z-Ebene, bei  $X = 39,28\text{ m}$  in dem Hafenbecken nach ca. 1 Stunde 20 Minuten

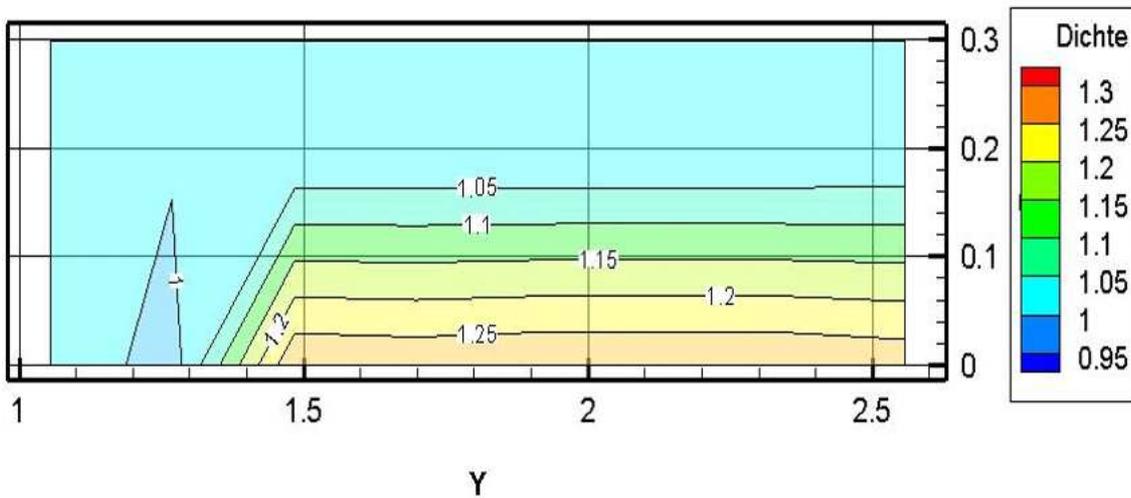
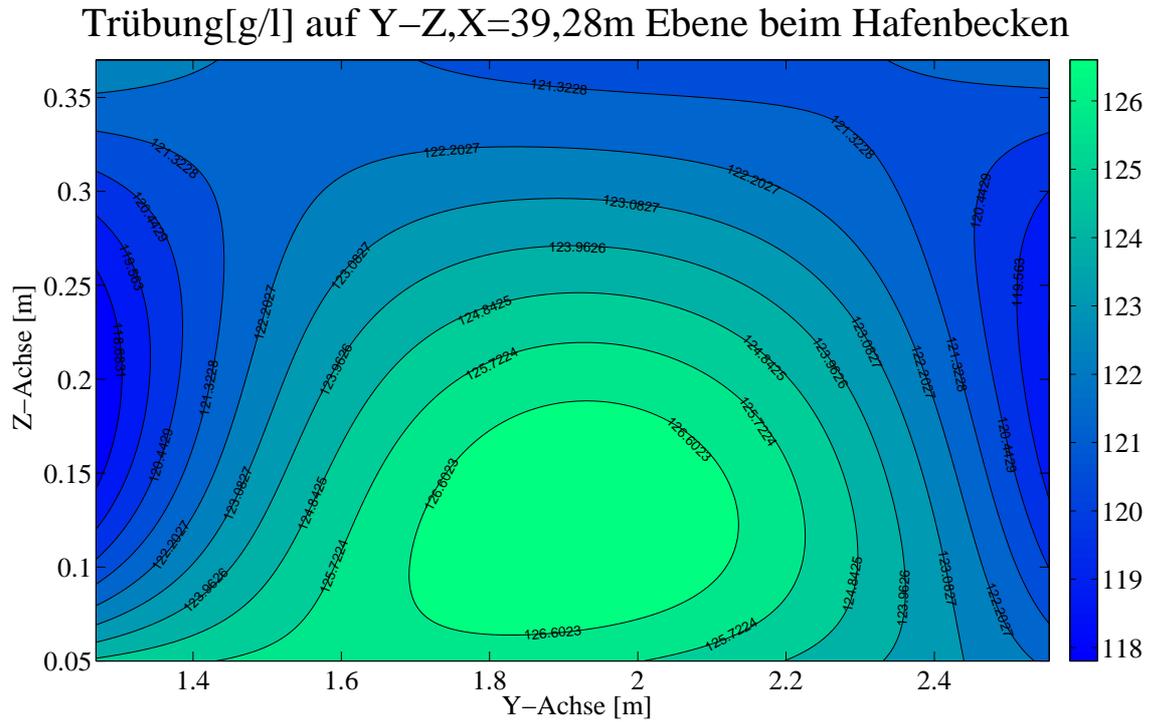


Abbildung 7.34: Trübung[g/l], Dichte[g/cc] auf Y-Z-Ebene, bei X = 39,28 m in dem Hafenbecken nach ca. 1 Stunde 20 Minuten

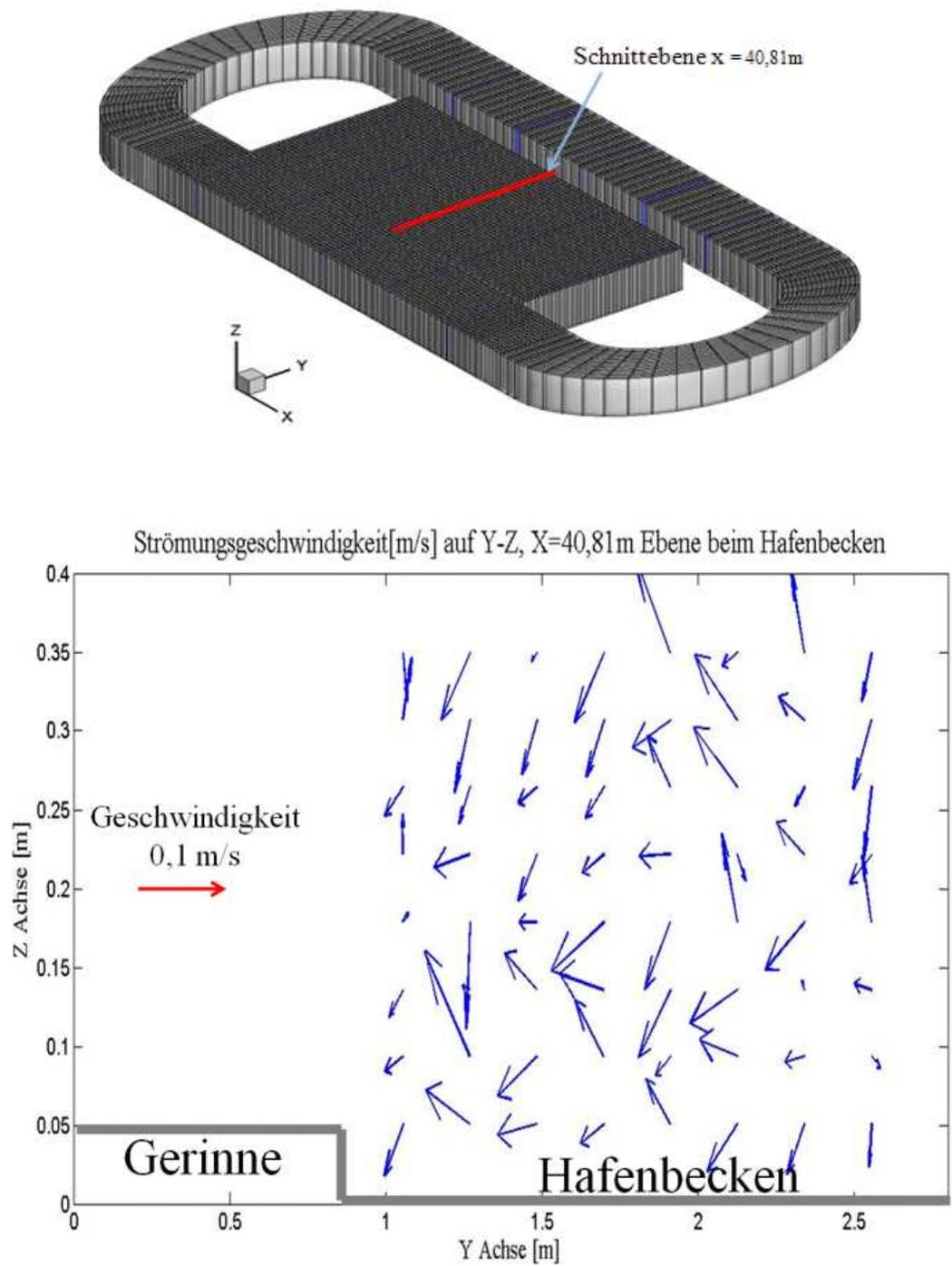


Abbildung 7.35: Strömungsgeschwindigkeit auf Y-Z-Ebene, bei  $X = 40,81\text{ m}$  in dem Hafenbecken nach ca. 2 Stunden 15 Minuten

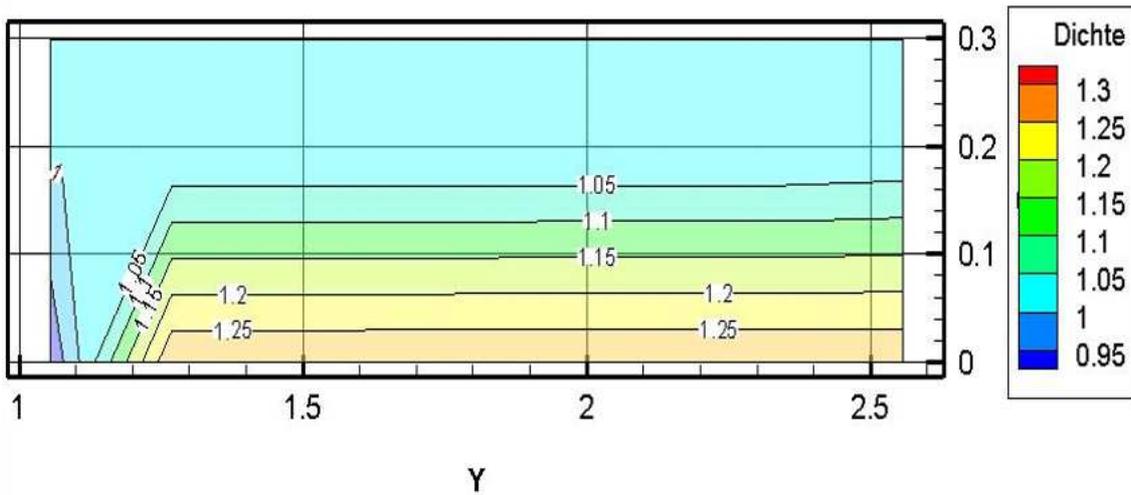
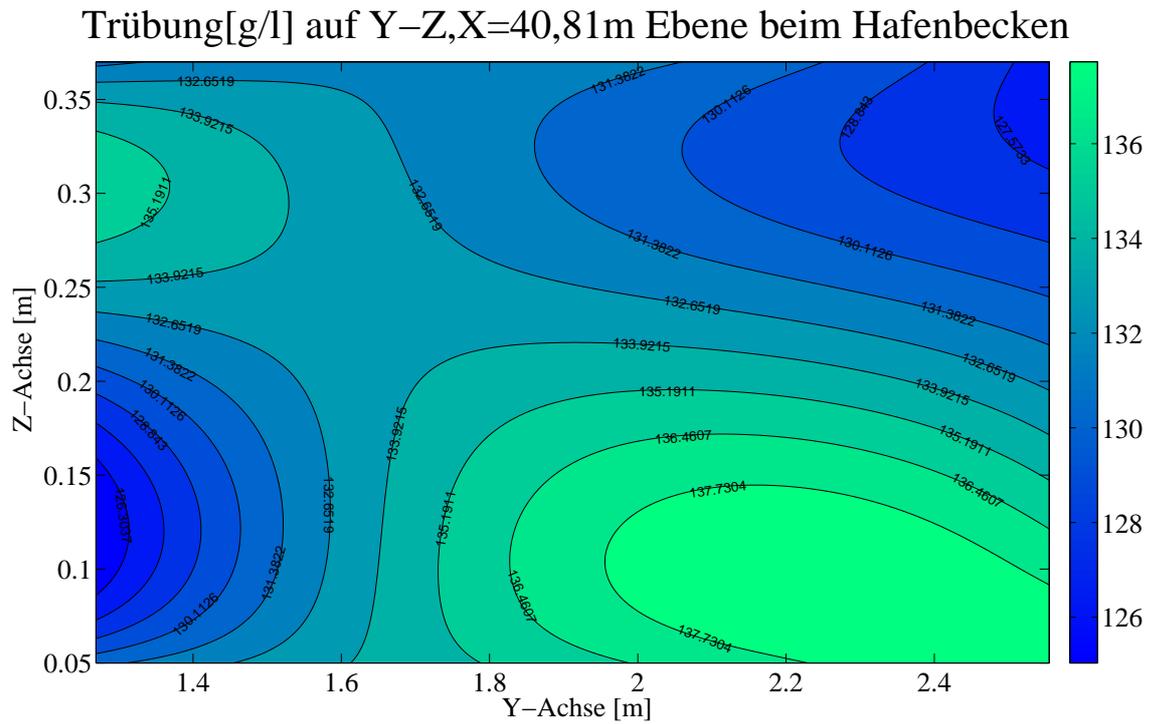


Abbildung 7.36: Trübung[g/l], Dichte[g/cc] auf Y-Z-Ebene, bei X = 40,81 m in dem Hafenbecken nach ca. 2 Stunden 15 Minuten

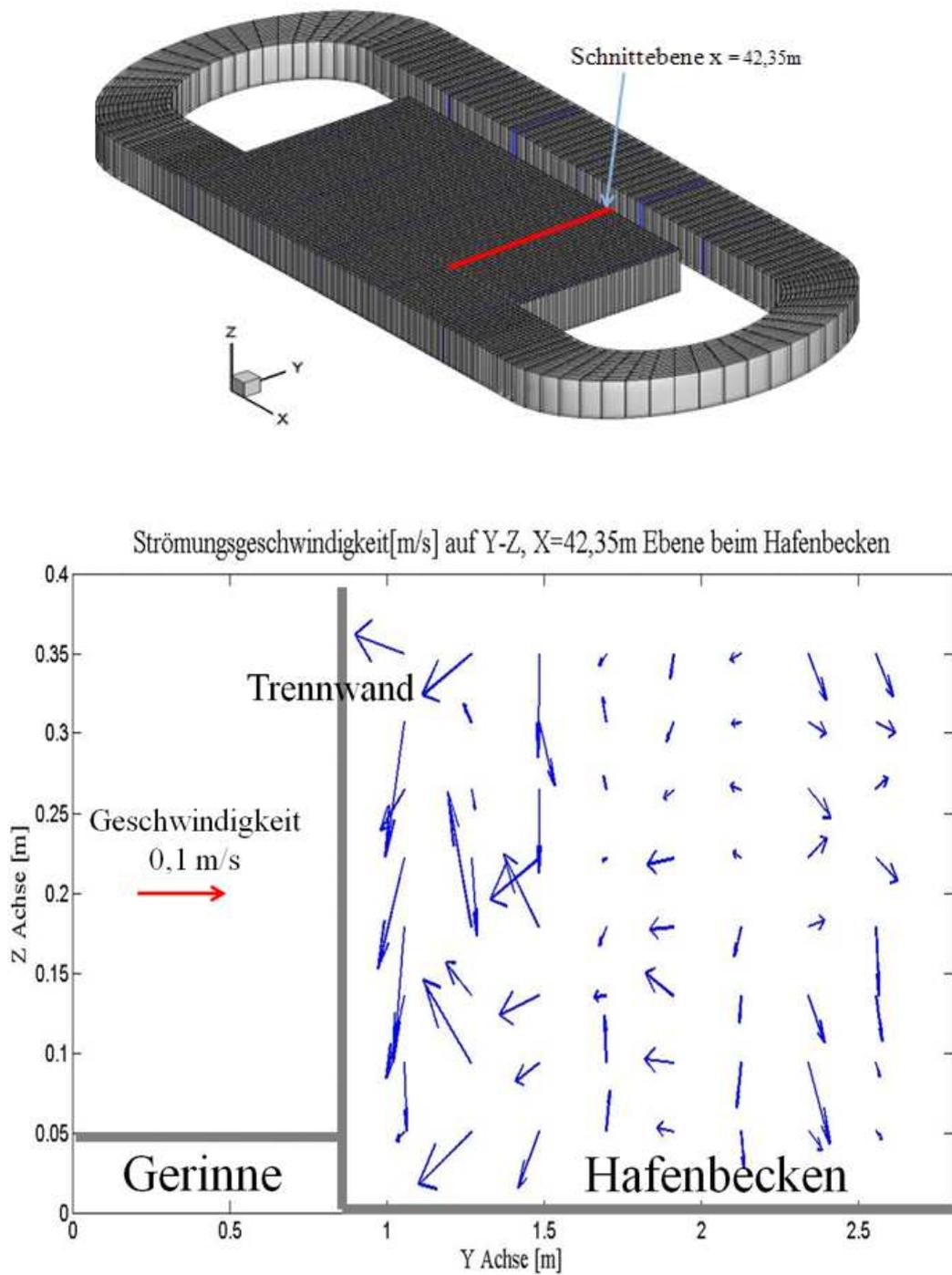


Abbildung 7.37: Strömungsgeschwindigkeit auf Y-Z-Ebene, bei  $X = 42,35\text{ m}$  in dem Hafenbecken nach ca. 3 Stunden 10 Minuten

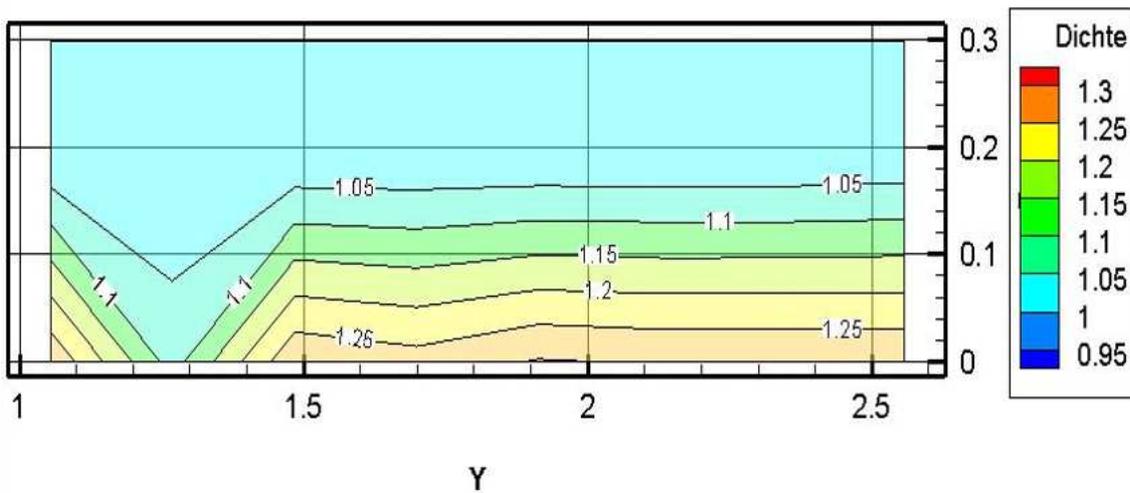
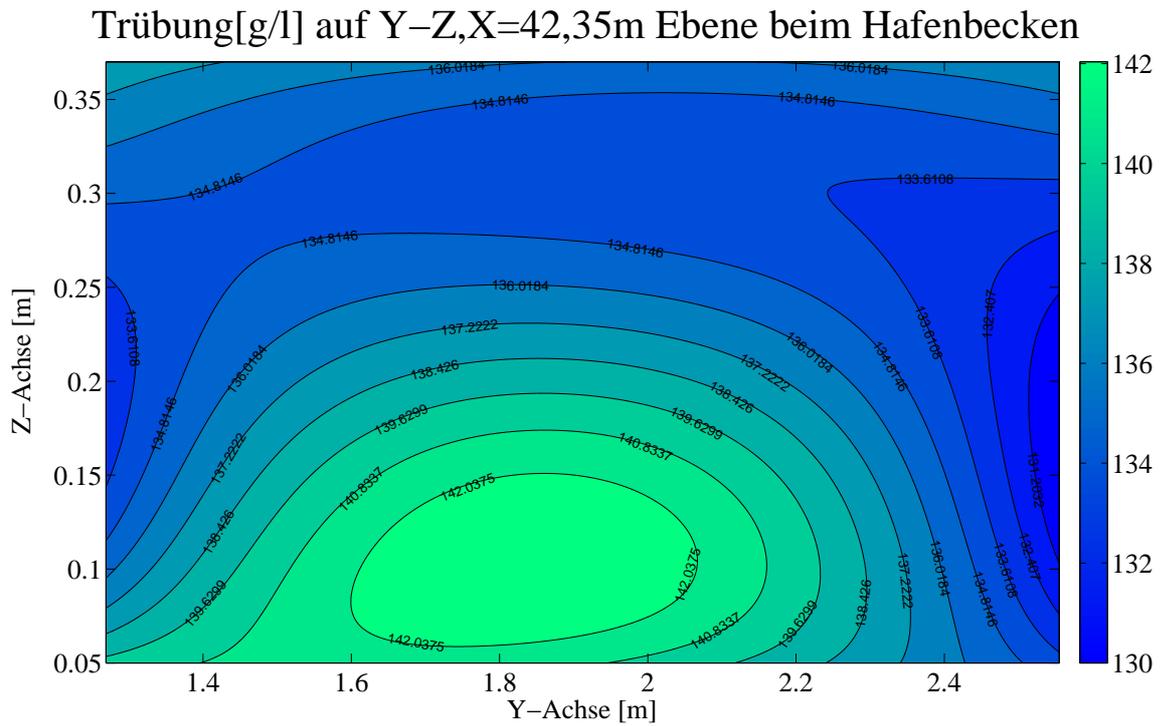


Abbildung 7.38: Trübung[g/l], Dichte[g/cc] auf Y-Z-Ebene, bei X = 42,35 m in dem Hafenbecken nach ca. 3 Stunden 10 Minuten

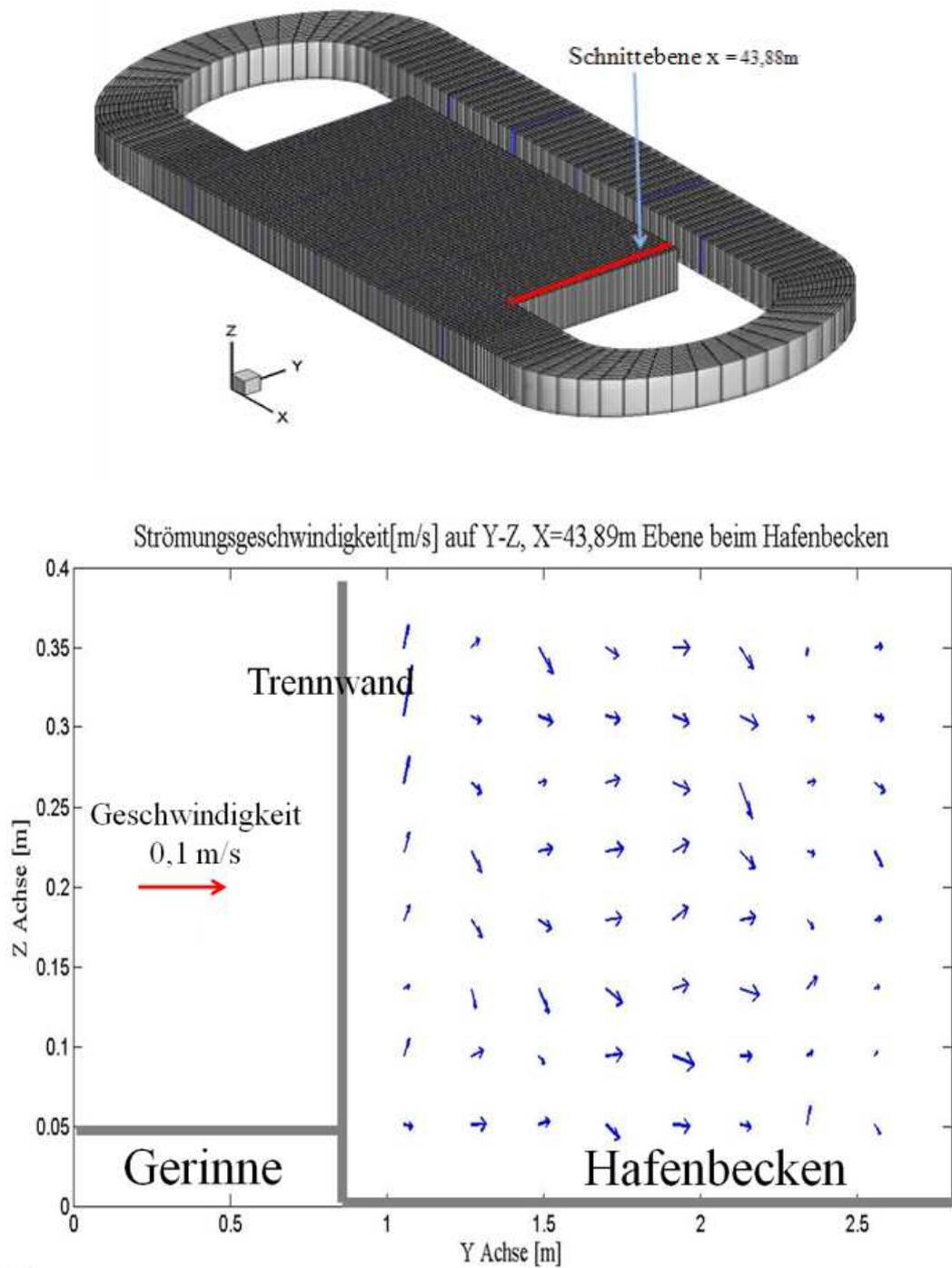


Abbildung 7.39: Strömungsgeschwindigkeit auf Y-Z-Ebene, bei  $X = 43,89\text{ m}$  in dem Hafenbecken nach ca. 4 Stunden

Trübung[g/l] auf Y-Z,X=43,889m Ebene beim Hafenbecken

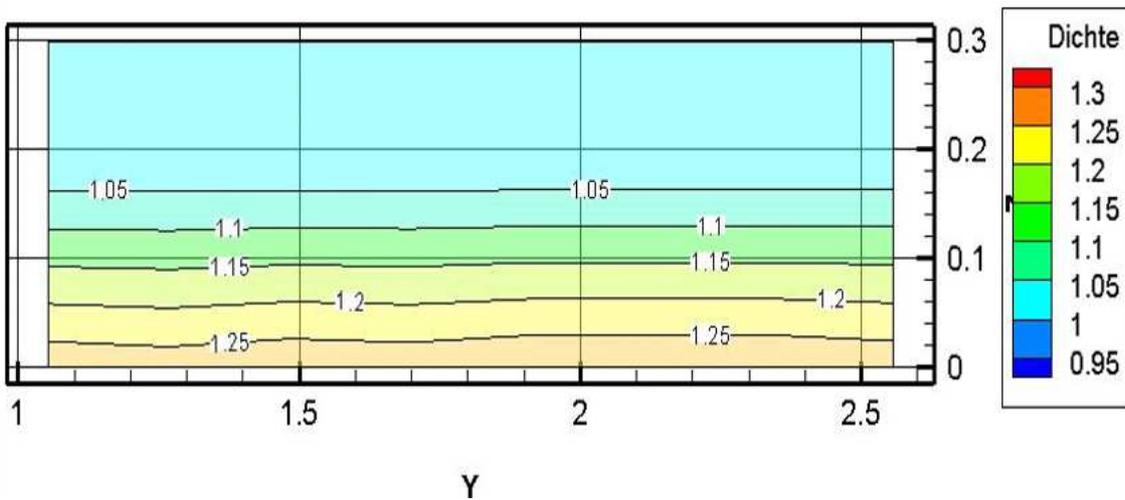
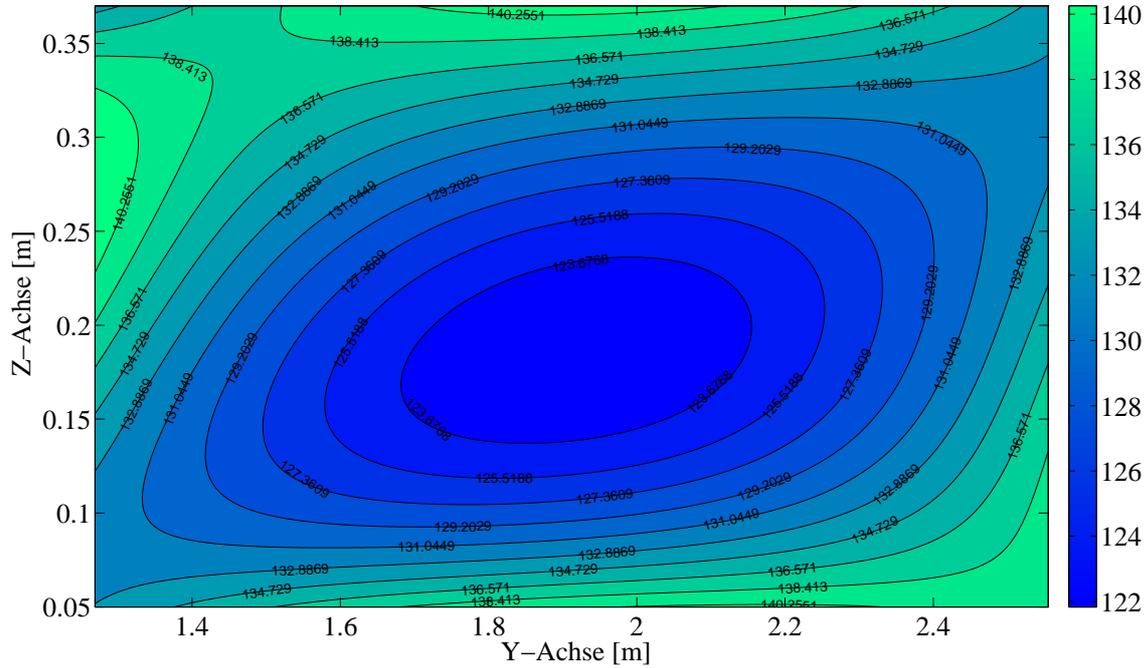


Abbildung 7.40: Trübung[g/l], Dichte[g/cc] auf Y-Z-Ebene, bei X = 43,89 m in dem Hafenbecken nach ca. 4 Stunden

# Kapitel 8

## Numerische Simulation des Laborhafens

### 8.1 MudSim

Die Beschreibung des Programms MudSim dieses Kapitels basiert auf dem Projektpartner bei Bundesanstalt für Wasserbau, Dipl.-Ing Denise Wehr Ihres Schreiben MudSim, a Mathematical Model for the Simulation of Fluid Mud Dynamics.

Zur numerischen Modellierung des Projekts MudSim wurde das Programm Untrim verwendet. Bei dem mathematischen Verfahren UNTRIM handelt es sich um eine Neuentwicklung, die von Herrn Prof. Vincenzo Casulli (Universität Trient, Italien) durchgeführt wurde. Für die Diskretisierung des numerischen Programms bieten sich die Methoden eines semi-impliziten Finite-Differenzen(-Volumen)-Verfahrens an.

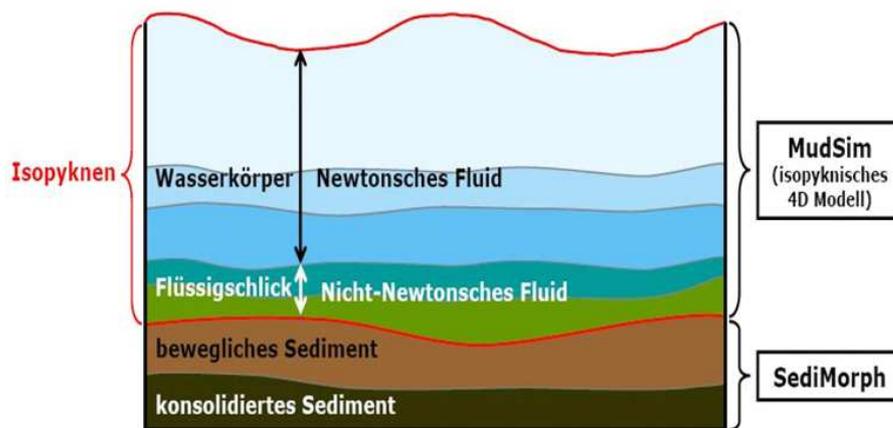


Abbildung 8.1: Schematische Darstellung der wesentlichen physikalischen Prozesse der Dynamik von Flüssigschlick

UNTRIM arbeitet auf einem unstrukturierten, orthogonalen Gitter (UOG). Hierbei wird das Lösungsgebiet von einer endlichen Anzahl konvexer Polygone überlappungsfrei über-

deckt. Ein Gitter entspricht genau dann einem UOG, wenn innerhalb eines jeden Polygons ein Punkt (Zentrum) bestimmt werden kann, so dass jede Verbindungslinie zu einem Zentrum eines Nachbarpolygons die gemeinsame Seite der Polygone senkrecht schneidet. [Quelle: Mathematisches Verfahren UNTRIM BAWIKI]

MudSim ist ein Erweiterungsprogramm von Untrim, das von Dipl.-Ing Denise Wehr (Bundesanstalt für Wasserbau, Hamburg) entwickelt wurde. Einer der wichtigsten charakterisierenden Parameter in MudSim für das Verhalten von Flüssigschllick ist der Feststoffgehalt, bzw. die dazu proportionale Dichte. Dieser Parameter wird für die numerische Modellierung genutzt, indem der Wasserkörper und die Schllicksuspension in Schichten gleicher Dichte unter Annahme einer stabilen Schichtung unterteilt werden (siehe Abbildung 8.1). Diese Schichten gleicher Dichte, genannt Isopyknen, bilden die vertikale Diskretisierung im Modell. Jeder Isopykne wird ein bestimmtes rheologisches Verhalten (Newtonsches, nicht-Newtonsches Fluid) zugeordnet (siehe Abbildung 8.2).

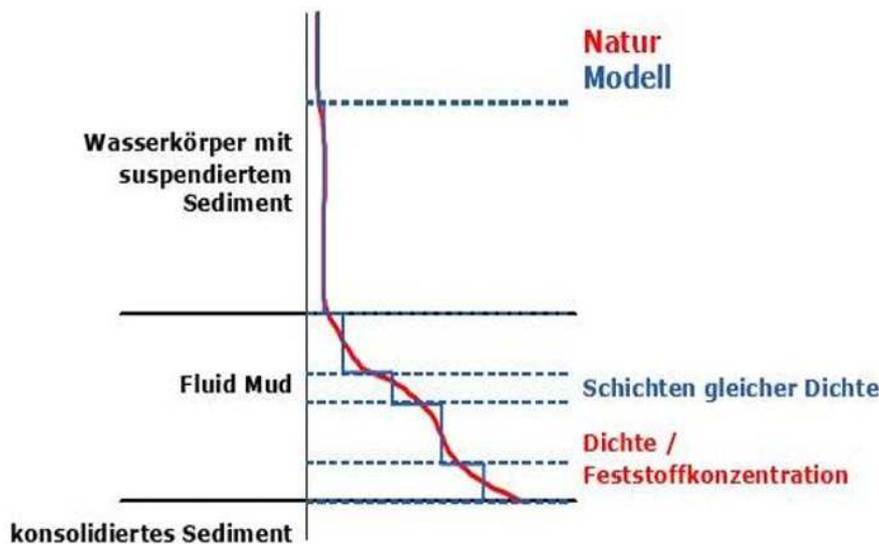


Abbildung 8.2: Schematische Darstellung der Dichteapproximation

Die Entwicklung des MudSim-Modells basiert auf einem hydrodynamischen isopyknischen Modell, welches von Prof. Dr. V. Casulli der Universität Trient, Italien, zur Verfügung gestellt wurde. Der konzeptionelle isopyknische Modellansatz ist besonders für die Modellierung stark geschichteter Strömungen geeignet. Das isopyknische Modell ist um die entscheidenden Transportprozesse wie Deposition, Konsolidierung, Entrainment und Fluidisierung sowie um rheologische Ansätze für Schllicksuspensionen zu erweitern (siehe Abbildung 8.1). [Quelle: Knoch Wehr, MudSim: Numerische Simulation der Dynamik von Flüssigschllick (MudSim-B), BAW]

Die Impulserhaltung jedes viskoelastischen Materials kann durch Cauchysche Impulsgleichung wie folgt beschrieben werden:

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i$$

mit der Zeit  $t$ , Geschwindigkeit  $u$ , Dichte  $\rho$ , und externe Kräfte  $f$ .

Das rheologische Verhalten wird durch den ersten Term auf der rechten Seite mit dem Spannungstensor  $\sigma_{ij}$  bezeichnet. Für Newtonsche Flüssigkeiten sind die inneren Spannungen gegeben als

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Daher sind die Navier-Stokes-Gleichungen für hydrodynamische Simulationen besonders bei diesem Spezialfall der Cauchy Gleichungen geeignet. Dies gilt auch für die Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen:

$$\tau_{ij} = (\mu_t + \mu_{mol}) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

mit  $\mu_t$  : der turbulenten und  $\mu_{mol}$  : der molekularen dynamischen Viskosität.

Eine Realisierung des allgemeinen rheologischen Flüssigkeitsverhaltens in einem numerischen Modell ist mit der Einführung der scheinbaren Viskosität  $\mu_{app}$ , die aus verschiedenen Stoffgesetzen gebildet ist, möglich:

$$\tau_{ij} = (\mu_t + \mu_{app}) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

So ändert sich der Schubspannungstensor der Navier-Stokes- oder Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen nicht in der Form. Auf diese Weise ist es möglich, herkömmliche dreidimensionale Codes beim Fluss- oder Küsteningenieurwesen auch für die Simulation von Fluid Mud Dynamic anzuwenden.

MudSim wurde durch ein isopyknisches, numerisches Modell gebaut. Dieses basiert auf dem Modell TRIM3D [Casulli, V. und Cheng, RT, 1992], welches ein dreidimensionales hydrodynamisches Modell mit z-Schicht ist. Die Flachwassergleichungen werden numerisch durch ein semi-implizites Verfahren [Casulli, V. und Cattani, E., 1994] mit einer effizienten und stabilen Quellcode gelöst.

Die horizontalen, hydrostatischen und schichten-tiefengemittelten Impulsgleichungen sind

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} + u_m \frac{\partial u_m}{\partial x} + v_m \frac{\partial u_m}{\partial y} = -\frac{\partial p_x}{\partial x} + \nu^h \left( \frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_m}{\partial y^2} \right) + \nu^v \frac{\partial^2 u_m}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial v_m}{\partial t} + u_m \frac{\partial v_m}{\partial x} + v_m \frac{\partial v_m}{\partial y} = -\frac{\partial p_y}{\partial y} + \nu^h \left( \frac{\partial^2 v_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_m}{\partial y^2} \right) + \nu^v \frac{\partial^2 v_m}{\partial z^2}$$

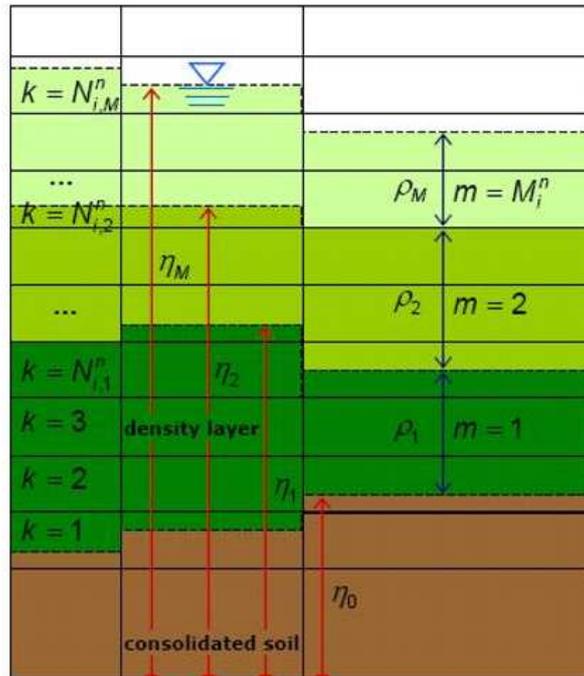


Abbildung 8.3: Vertikale Struktur des unstrukturierten, vierdimensionalen, isopyknischen Modells

wobei  $m$  der Index für die isopyknischen Schichten konstanter Dichte ist.

Die maximale Anzahl der isopyknischen Schichten ist  $M$ . Die linke Seite stellt die Advektionsterme in horizontaler Richtung für die  $m$ 'te Schicht dar. Die oberste isopyknische  $m$ 'te Schicht wird durch  $\eta_m$  gegeben und  $\eta_0$  ist für die unterste 0'te Schicht. Die kinematische und horizontale Viskosität  $\nu_h$  ist durch  $\nu_h = \mu/\rho$  definiert.

Eine Übersicht über die vertikale Struktur des Modells ist in Abbildung 8.3 angegeben.

Ein weiteres Konzept von MudSim ist der Volumen- und Massenaustausch des Sediments (siehe Abbildung 8.4). Das Konzept für diapiknischen Stofftransport durch Volumenerhaltung ist eine Anpassung der benachbarten Schnittstelle. Stofftransport von der einen zur nächsten Schicht ist mit einem spezifischen Volumen der Suspension verbunden. Mit der übertragenen Masse ( $P\Delta t\Phi_{m,m+1}\rho_m$ ) von Schicht  $m$  zu Schicht  $m+1$  ist ein Volumen ( $P\Delta t\Phi_{m,m+1}$ ) verbunden, wobei  $t\Phi_{m,m+1}$  die Transportgeschwindigkeit von Schicht  $m$  bis Schicht  $m+1$  mit der Einheit  $m/s$  ist. Die Position der Schnittstelle ( $m, m+1$ ) ändert sich entsprechend dieses Volumens. Aufgrund der geringeren Dichte der Schicht  $m+1$  ist der Masseverlust der Schicht  $m$  größer als die Massegewinn der Schicht  $m+1$ :

$$P\Delta t\Phi_{m,m+1}\rho_m \neq P\Delta t\Phi_{m,m+1}\rho_{m+1}$$

Dieses Konzepts ist in der Anzahl der Schichten beschränkt. Die Schichtanzahl muss für die Bedingung des Konzepts mindestens drei isopyknische Schichten vorweisen, ansonsten ist ein Stoffaustausch nicht möglich.

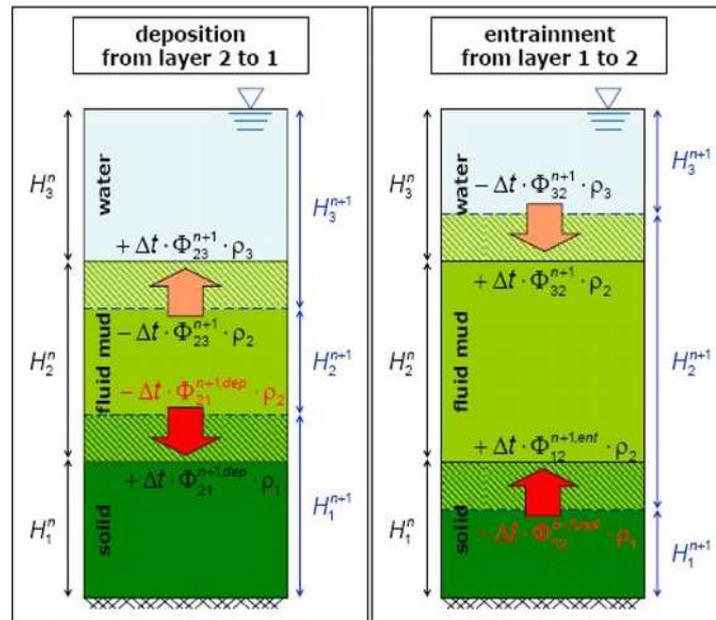


Abbildung 8.4: Masse- und Volumenaustausch zwischen isopyknischen Schichten (erster Fall: Deposition von Schicht 2 zu 1, zweiter Fall: Entrainment von Schicht 1 zu 2)

## 8.2 Gitter und Diskretisierung des Modells

Für das Erzeugen des von UNTRIM benötigten, unstrukturierten, orthogonalen Gitters wird der Gitternetz-Generator JANET, eine Entwicklung der Firma SmileConsult, eingesetzt. Der Aufbau des Gittermodells wurde bei der Bundesanstalt für Wasserbau Hamburg bearbeitet.

Das Koordinatensystem des Gittermodells wurde aus dem physikalischen Modell übernommen, da die Messergebnisse der Messpositionen mit dem numerischen Modell gut übereinstimmen. Das Modell besteht insgesamt aus 9296 Elementen mit 9597 Knoten und 18893 Ecken. Das entspricht im Hafenbecken einer Elementgröße von  $0,05 \times 0,05 \text{ m}^2$ , sonstige Elementgrößen sind von  $0,05 \times 0,05 \text{ m}^2$  bis  $0,20 \times 0,05 \text{ m}^2$ . Das Elementgitter ist in Abbildung 8.5 zu erkennen. Die Strömungsgeschwindigkeit und Dichte sind dabei in den Zellmittelpunkten definiert.

## 8.3 Rand- und Anfangsbedingungen des Modells

Aus der Theorie der (partiellen) Differentialgleichungen ist bekannt, dass zur eindeutigen Bestimmung des Problems neben den Gleichungen auch die Anfangs- und Randwerte gegeben sein müssen.

Das MudSim-Modell (inkl. Randbedingungen, physikalischer Eigenschaften des Materials, etc.) wird in Eingabedateien definiert. Hierbei handelt es sich um eine normale Textdatei, die mit jedem Editor bearbeitet werden kann.

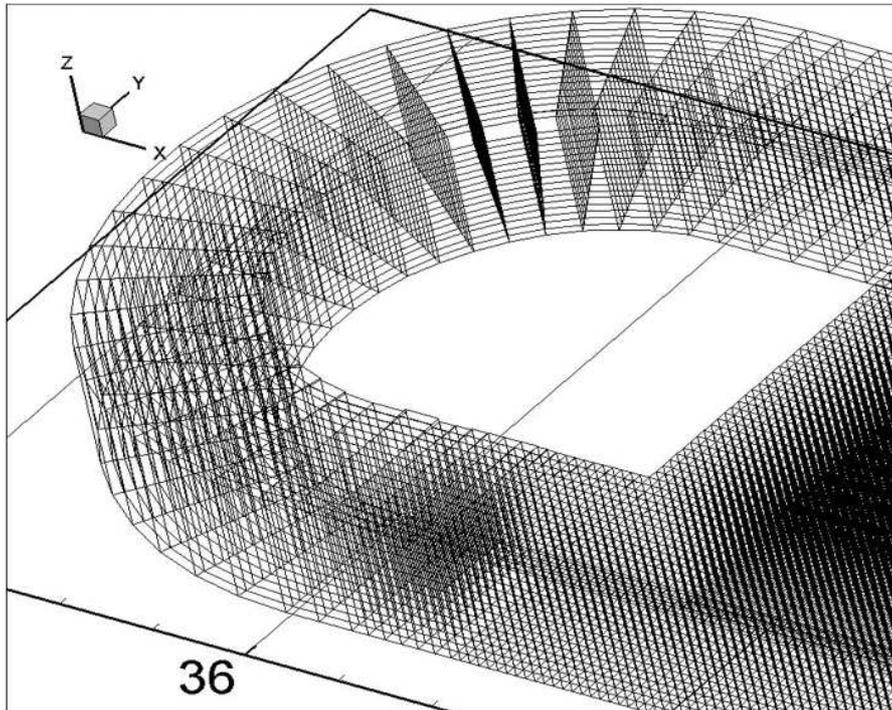


Abbildung 8.5: Gitternetz des Modells (Ausgabe: Tecpolt 3D)

### 8.3.1 Randbedingung

In dreidimensionalen, numerischen Schwebstofftransportmodellen benötigt man Randbedingungen an der freien Oberfläche sowie an der Sohle und der Wände. Schwebstoffe verlassen das Gewässer durch die freie Oberfläche nicht, daher ist die Projektion des Schwebstoffflusses auf den Oberflächeneinheitsvektor  $\vec{n}_S$  Null,  $\vec{\Phi}_c \vec{n}_S$ . Der Sedimentfluss an der Sohle  $\vec{\Phi}_c \vec{n}_B$  muss nicht Null sein, da hier Sediment sich ablagern bzw. erodiert werden kann. Unter Berücksichtigung der Stokesschen Haftbedingung gilt für eine horizontale Sohle. [Quelle: Sedimenttransport und Morphodynamik, Prof. Malcherek]

Die Abbildung 8.6 zeigt die geschlossenen Ränder für die Wände, wo die Projektion des Schwebstoffflusses auf den Oberflächeneinheitsvektor  $\vec{n}_S$  Null ist.

Um die Strömung zu erzeugen, müssen offene Ränder definiert werden. Dafür wurde die Strömungsgeschwindigkeit direkt in die Mitte der Kante (siehe Abbildung 8.7) eingesetzt, sodass sie tangential an den halben Kreisen liegt. Die Kantenummern sind bei dem Gitter und der Diskretisierung des Modells bereits bekannt. Auf einer Textdatei wurden die Anzahl der Kanten, die Kantenummern und die Radgeschwindigkeit gesichert, damit diese als Anfangsbedingungen in MudSim eingesetzt werden können. Die Einheit der Radgeschwindigkeit ist  $m/s$ .

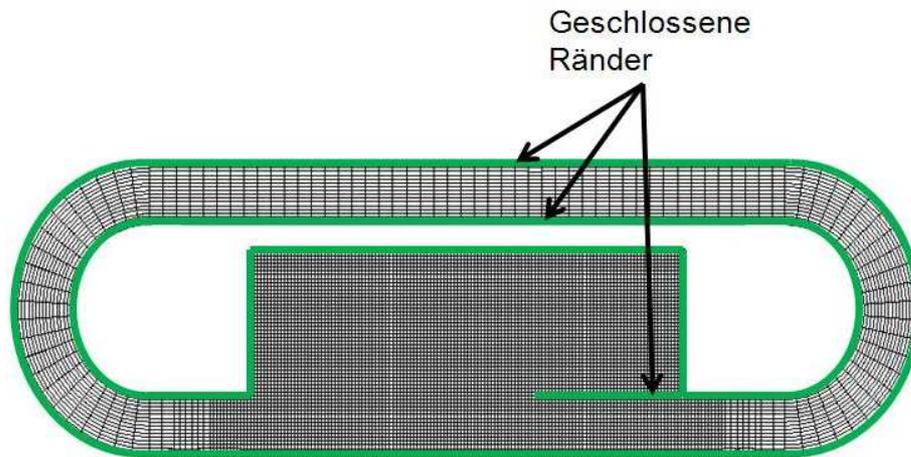


Abbildung 8.6: Geschlossene Ränder des Modells

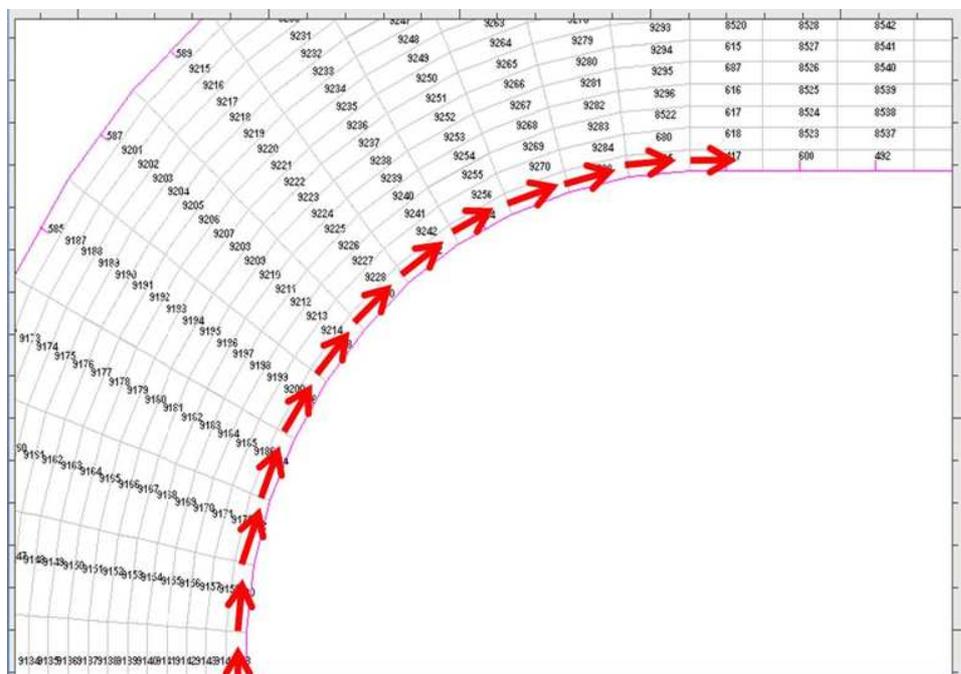


Abbildung 8.7: Randbedingung für die Strömung (Gitternetz-Generator JANET)

### 8.3.2 Anfangsbedingung

Die Anfangsbedingungen des Programms wurden in Input Dateien eingesetzt, die mit Textdatei gesichert sind. Die folgenden Bedingungen müssen zur Steuerung eingefügt werden.

- Anzahl der isopyknischen Schichten
- Dichte der isopyknischen Schichten
- Aufbau des Sedimentdammes
- konstante Strömungsgeschwindigkeit

Die Anzahl der isopyknischen Schichten steht schon als Anfangsbedingung fest. Damit müssen nur mindestens drei Schichten berücksichtigt werden, wie schon bei der Bedingung des Volumen- und Massenaustausch erläutert wurde. Bei diesem Modell wurde vier Schichten erstellt.

Eine weitere Bedingung ist die Dichte der isopyknischen Schicht. Die Dichte der isopyknischen Schicht ändert sich nicht, sondern nur die Höhe der Schicht ändert sich. Daher muss eine plausible Dichte für die Schicht definiert werden. Die Dichten wurden bei der Messung in dem Laborhafen ermittelt (siehe Kapitel 7). Bei diesem Modell wurden die Dichten mit  $1,000g/cm^3$ ,  $1,050g/cm^3$ ,  $1,100g/cm^3$ ,  $1,250g/cm^3$  gemessen. Die Differenzen der Werte müssen möglichst sein, damit ein stabiles Ergebnis ausgegeben werden kann.

Der Sedimentdamm, der in dem Hafenmodell konstruiert wurde, muss ebenfalls in dem numerischen Modell simuliert werden. Bei der Anfangsbedingung muss auf die Dichte Acht gegeben werden, da die Dichte des Sediments unter Wasser geringer ist. Daher sind die Dichten der isopyknischen Schichten mit den höchsten Werten von  $1,250g/cm^3$  gegeben. Das Volumen des Sedimentdammes muss ausgehend von dem Labormodell in das numerische Modell eingesetzt werden. (siehe Abbildung 8.8)

Die letzte Bedingung ist die Radgeschwindigkeit. Diese wird als ein konstanter Wert in eine Input Datei eingesetzt. Bei diesem Modell wurde die Radgeschwindigkeit von 0,55 m/s eingestellt. In der Abbildung 8.9 ist das durch die Radgeschwindigkeit erzeugte Strömungsfeld und der Sedimentdamm in einem Schnitt in der vorderen Rinne zu sehen. Zusätzlich ist erkennbar, wie der Damm durch die Strömung gebrochen wurde.

## 8.4 Abschließende Bewertung

### 8.4.1 Vergleich zwischen dem physikalischen und numerischen Modell

Durch den physikalischen Versuch wurden die Strömungsgeschwindigkeit und die Dichte des Hafenmodells bekannt gegeben. Die Messergebnisse müssen bei der numerischen Modellierung kalibriert werden. Die Wahl der Parameter, die bei der numerischen Modellierung eingesetzt werden, ist für die Simulation von immenser Bedeutung. Daher ist es notwendig die Simulationsparameter anhand von experimentellen Untersuchungen zu kalibrieren.

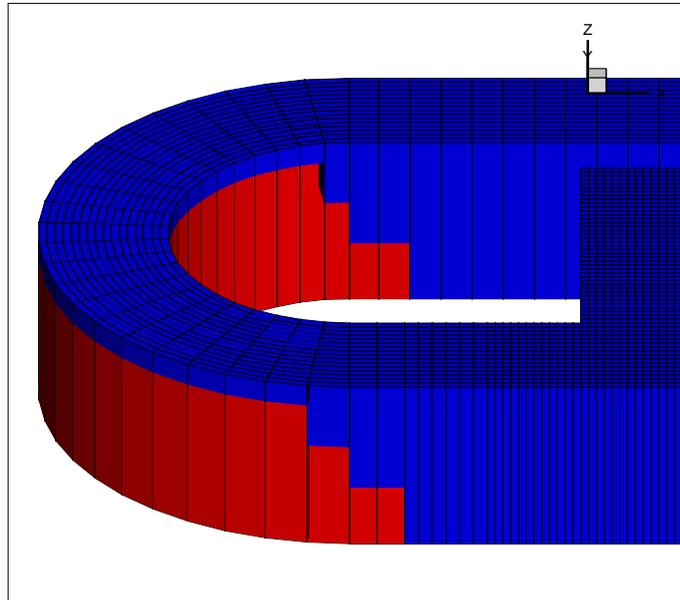


Abbildung 8.8: Anfangsbedingung des Sedimentdammes (Bild: Tecplot 3D)

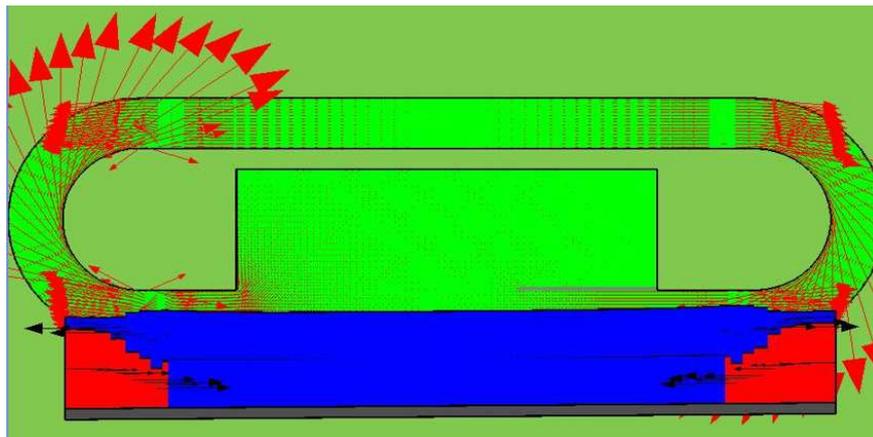


Abbildung 8.9: Strömungsgeschwindigkeit und eine Schnitt der Rinne (Bild: MudSim)

Um die Komplexität des Optimierungsproblems zu reduzieren, wurde entschieden, nicht die gesamten Messpositionen auf einmal im Simulationsmodell abzubilden, sondern die bestimmten Positionen zu kalibrieren. Die Positionen wurden in Abbildung 8.10 dargestellt.

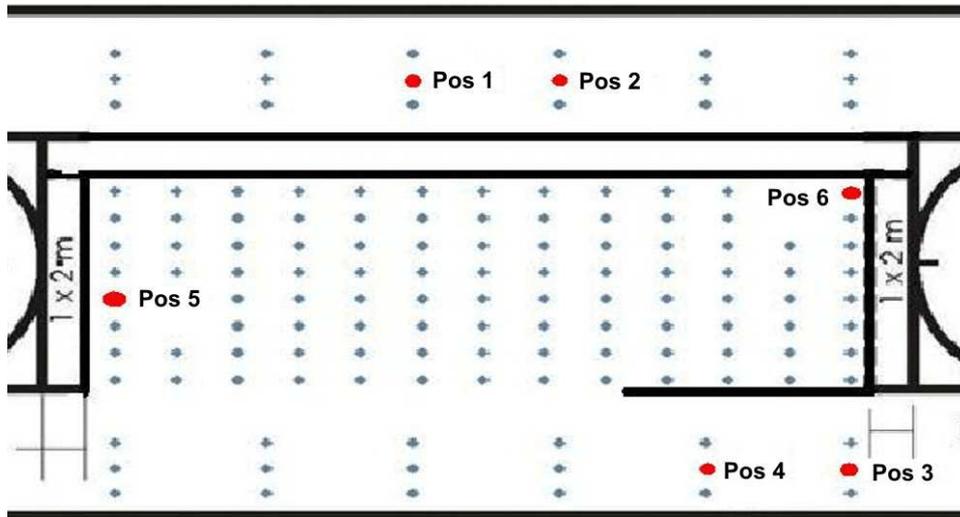


Abbildung 8.10: Messpositionen zum Vergleich

### Strömungsgeschwindigkeit

Zum Vergleich der beiden Modelle wurde die Strömungsgeschwindigkeit auf einer zweidimensional tiefengemittelt (siehe Abbildungen 8.11, 8.12). Bei beiden Modellen wurden als Anfangsbedingung eine Radgeschwindigkeit von 0,55m/s eingestellt.

Für die Auswertung der Berechnungsergebnisse des UNTRIMs werden diese mit den Ergebnissen des physikalischen Versuchs aus Messungen mit der ADV-Sonde an den 6 Positionen verglichen (siehe Abbildung 8.13).

Die Positionen 1, 2, 3 und 4 liegen auf den Flussgerinnen, wo die Strömungsgeschwindigkeit hoch ist. Bei dem physikalischen Modell erreicht die maximale Strömungsgeschwindigkeit in dem Flussgerinne ca. 0,18 m/s gegenüber der numerischen Modellierung von ca. 0,16 m/s. Die weiteren Positionen 5 und 6 liegen im Hafenbecken, wo die Sedimente am stärksten abgelagert werden, da die Strömung relativ gering ist. Die Ergebnisse in beiden Modelle zeigen deutlich, wo das niedrige Strömungsgebiet ist.

### Dichte

Nach der Berechnung des MudSim-Modells wurde ein hydrodynamisch isopyknisches Modell gebaut. Die isopyknische Dichteverteilung der numerischen Berechnung ist gut vergleichbar mit dem physikalischen Modell. Zum Vergleich der Dichteverteilung muss man die Messzeit des Versuchs berücksichtigen, denn die Messungen nach einander durchgeführt sind.

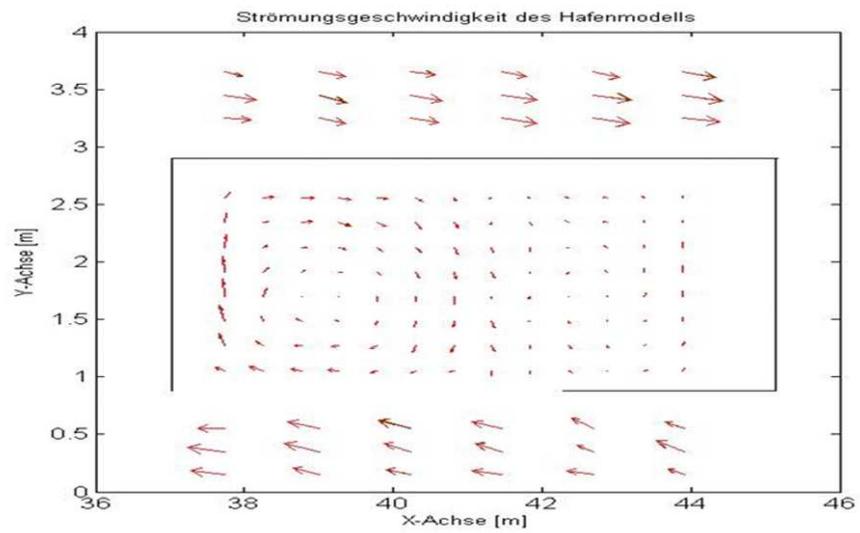


Abbildung 8.11: Physikalisches Strömungsfeld des Modellgebiets

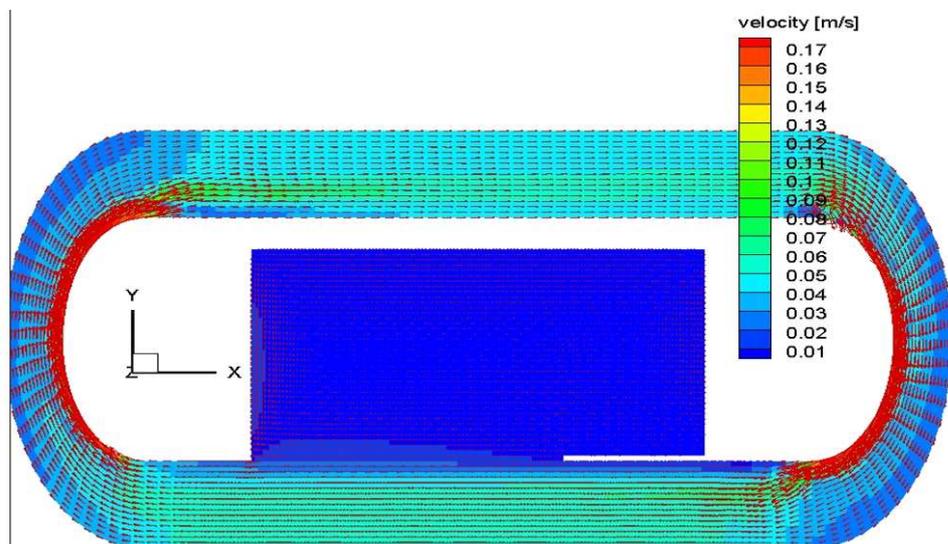


Abbildung 8.12: Numerisches Strömungsfeld des Modellgebiets

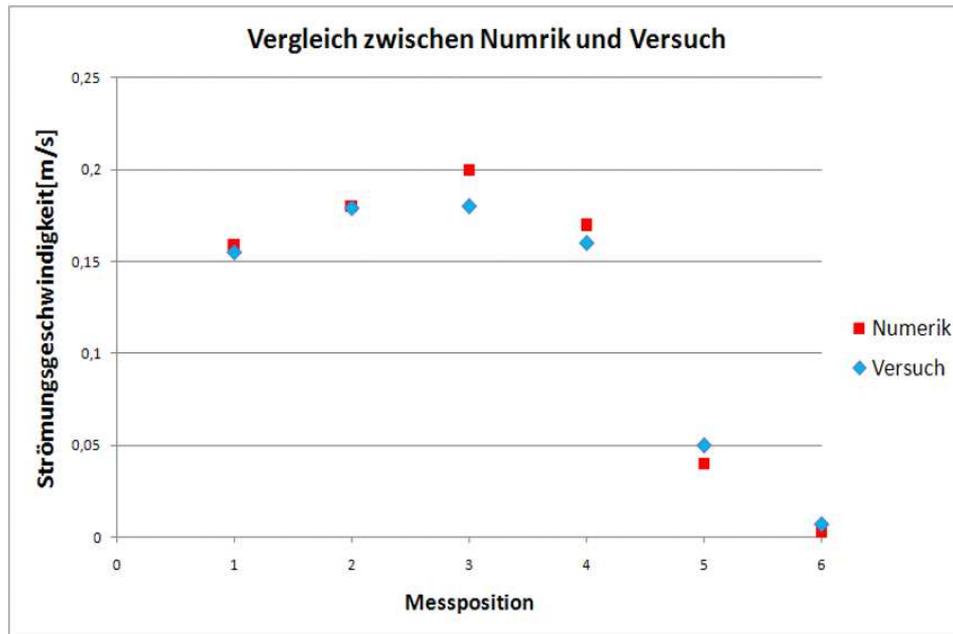


Abbildung 8.13: Vergleich der tiefengemittelten Strömungsgeschwindigkeit an den 6 Positionen zwischen Numerik und Versuch

Die Ausgabe des Berechnungsergebnisses des MudSim-Modells wurde mittels des Programms Tecplot 3D dargestellt. Das Berechnungsergebnis des MudSim-Modells wurde alle 15 Minuten ausgegeben.

Um die Dichteverteilung einer Ebene an dem Hafenbecken zu vergleichen, wurde eine Ebene ausgewählt (siehe Abbildung 8.14), in der das Sediment im physikalischen Versuch am deutlichsten abgelagert wurde. Die Messzeit des Versuchs beträgt in der Ebene ca. 4 Stunden. Nach den vielen physikalischen Versuchen wurden die isopyknischen Dichten festgestellt. Die höchste Dichte ist  $1250 \text{ kg/m}^3$  und die niedrigste ist  $1000 \text{ kg/m}^3$ . Um weitere Zwischenschichten der Dichte bei dem MudSim-Modell einzubinden, wurden als Anfangsbedingungen noch zwei Schichten mit  $1050 \text{ kg/m}^3$  und  $1100 \text{ kg/m}^3$  eingestellt. Zur Darstellung in dem Programm Tecplot 3D wurde die Ausgabe der Dichteverteilung interpoliert.

Insgesamt wird in diesem Kapitel die Dichteverteilung des Quarzmehls in fünf Querschnitten exemplarisch dargestellt (Abbildung 8.16).

Die Koordinaten der Querschnitte lauten  $X = 37,74 \text{ m}$ ,  $X = 39,25 \text{ m}$ ,  $X = 40,76 \text{ m}$ ,  $X = 42,27 \text{ m}$  und  $X = 43,78 \text{ m}$ . Bei den ersten drei Querschnitten wurde durch eine Sekundärströmung eine hohe Sedimentschicht erzeugt. Hinter der Trennwand ist die Strömungsgeschwindigkeit etwas geringer und daher wurde dort die hohe Sedimentschicht erzeugt.

Das Ergebnis dieser Berechnung zeigt insgesamt jedoch, dass für feine Sedimente in den Flussgerinnen die analytischen Lösungen greifen, so dass man diese für eine grobe Abschätzung der zu erwartenden Dichteverteilungen anwenden kann.

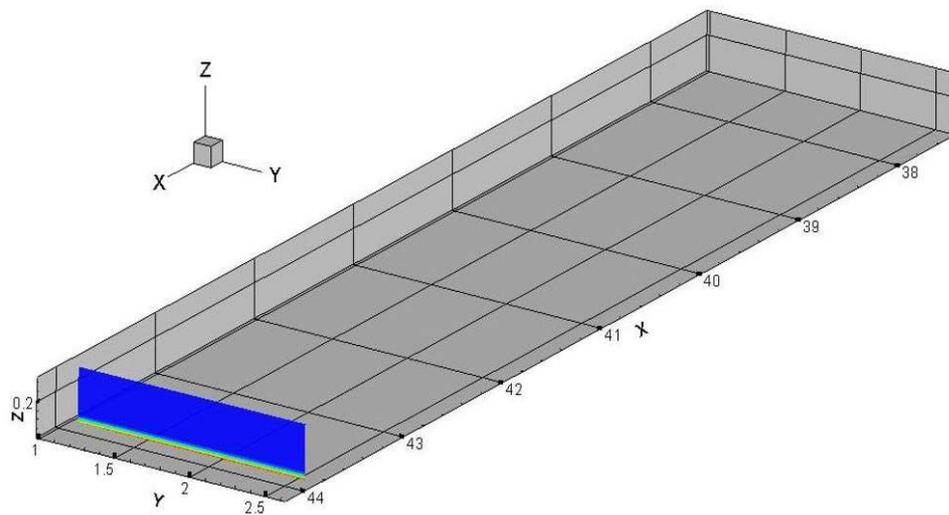


Abbildung 8.14: Die Schnittstelle des Hafenbeckens (Tecplot 3D)

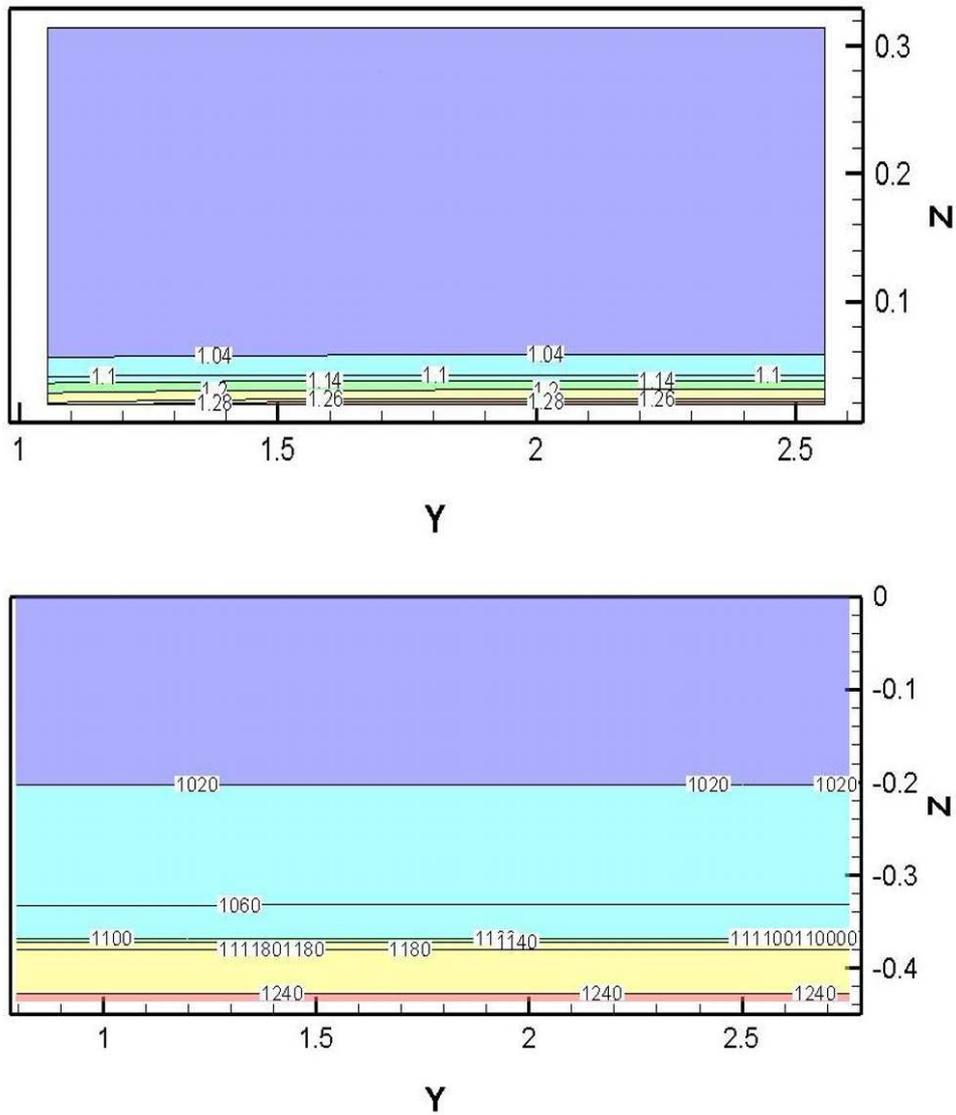


Abbildung 8.15: Dichteverteilung der Schnittebene des Hafenbeckens (oben: physikalisch [ $g/cm^3$ ], unten: numerisch [ $kg/m^3$ ])

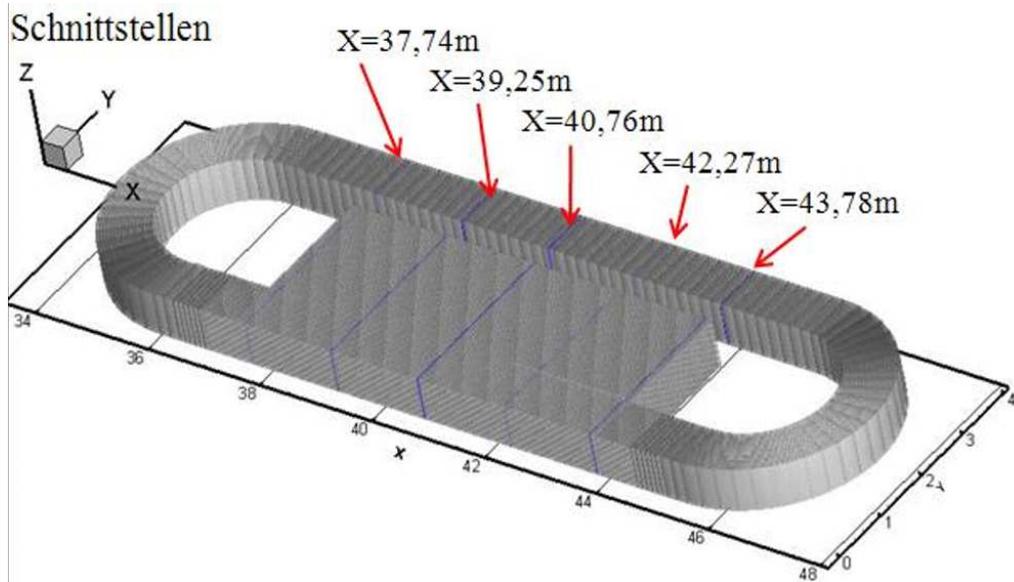


Abbildung 8.16: 5 Bilder

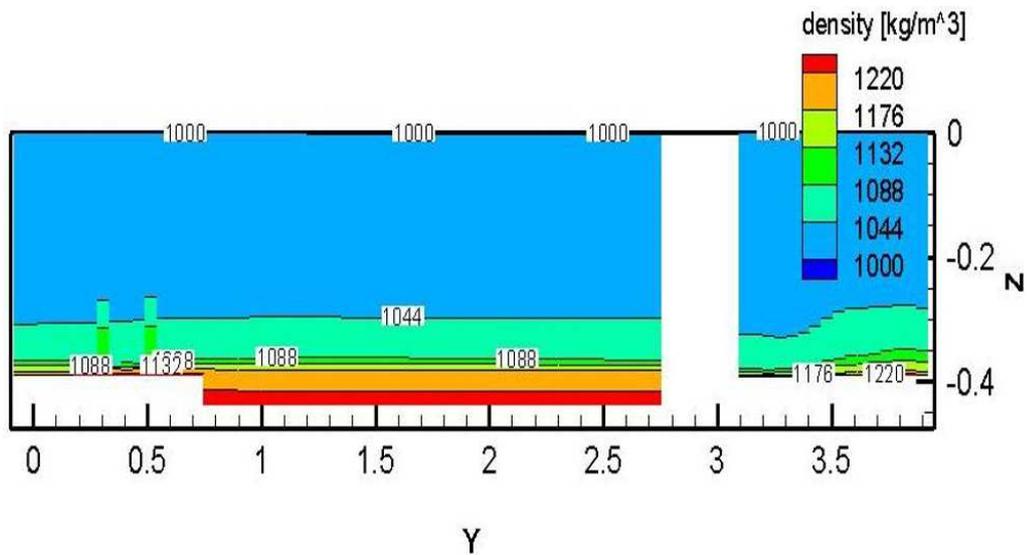


Abbildung 8.17: Die Koordinaten des Querschnitts X = 37,74m

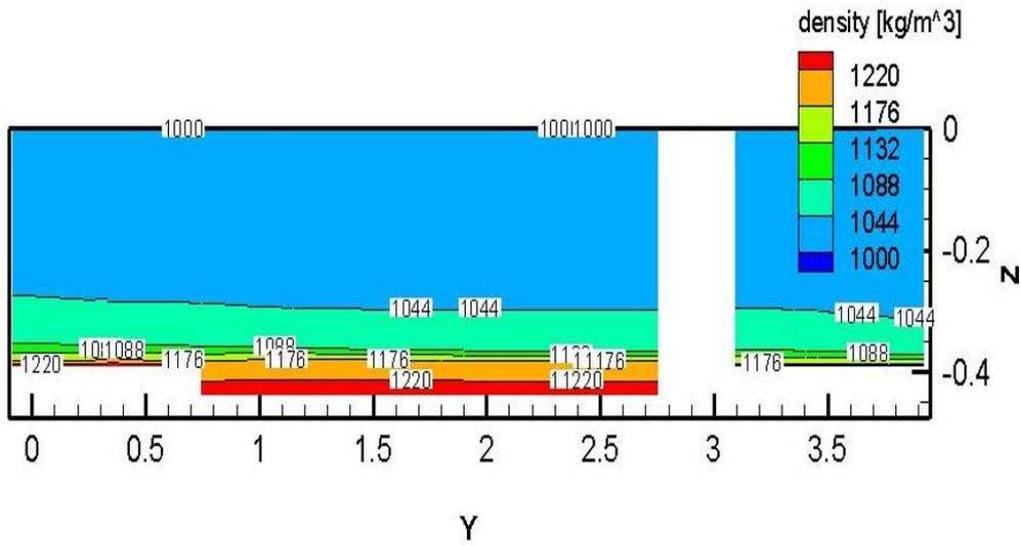


Abbildung 8.18: Die Koordinaten des Querschnitts X = 39,25m

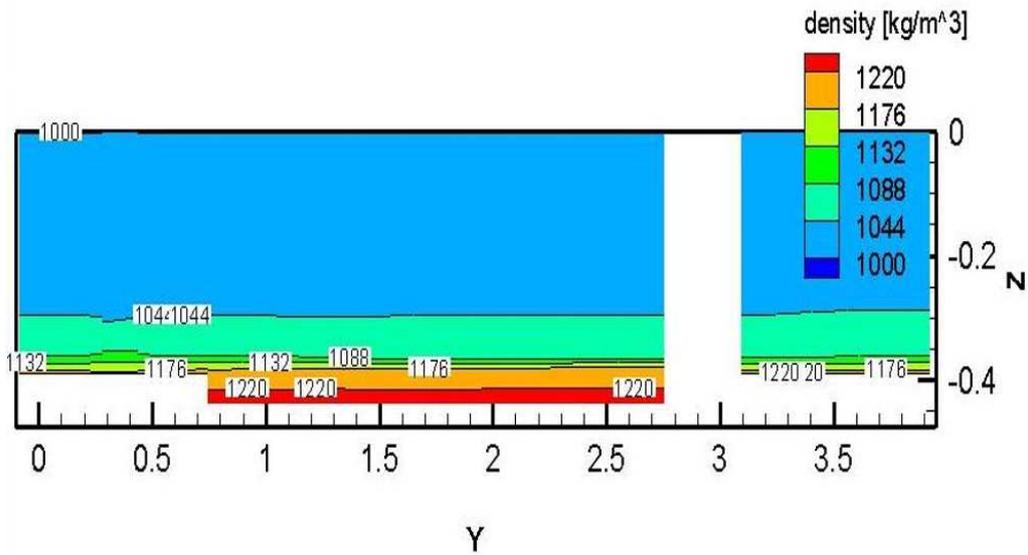


Abbildung 8.19: Die Koordinaten des Querschnitts X = 40,76m

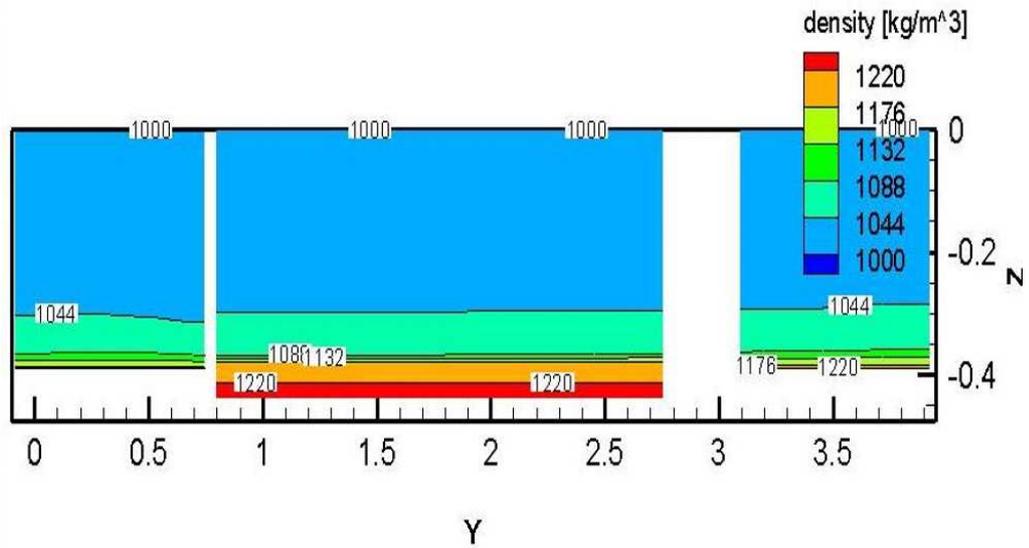


Abbildung 8.20: Die Koordinaten des Querschnitts X = 42,27m

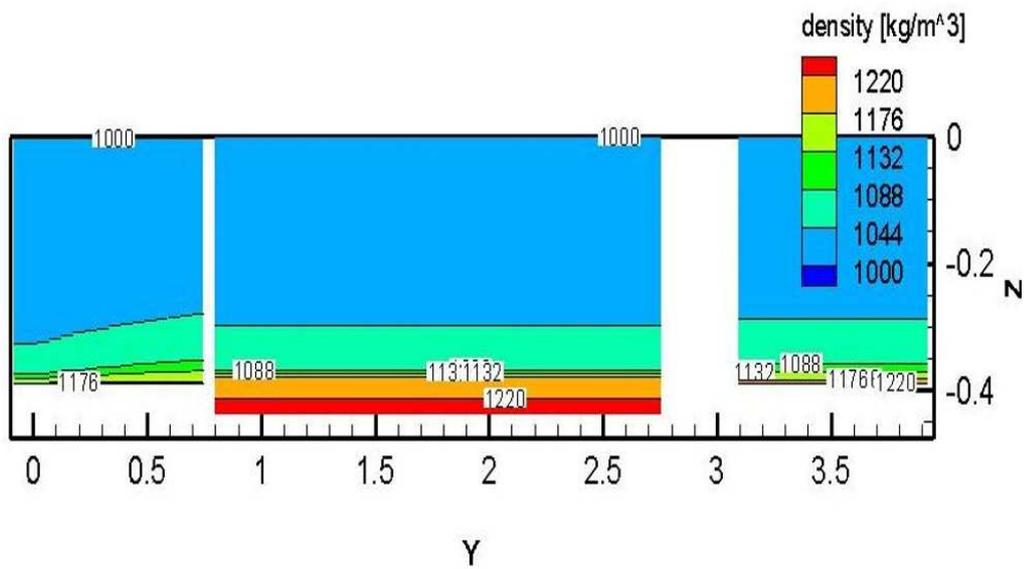


Abbildung 8.21: Die Koordinaten der Querschnitts X = 43,78m



# Literaturverzeichnis

- [1] Arbeitskreis Nassbaggerei Küste der Wasser- und Schifffahrtsverwaltung des Bundes. Nassbaggerunterhaltungsarbeiten im Küstenbereich. Jahresbericht 2003, Baggerbüro Küste, Bremerhaven, 2004. unveröffentlicht.
- [2] Barnes, H.A. Shear-Thickening ('Dilatancy') in Suspensions of Nonaggregating Solid Particles Dispersed in Newtonian Liquids. *J. Rheology*, 33(2):329–366, 1989.
- [3] Batchelor, G.K. and Green, J.T. The Determination of the Bulk Stress in a Suspension of Spherical Particles to Order  $c^2$ . *J. Fluid Mech.*, 56 (3):401–427, 1972.
- [4] Crapper, M. and Ali, K.H.M. A Laboratory Study of Cohesive Sediment Transport. In R. Parker N. Burt and J. Watts, editors, *Cohesive Sediments*, pages 149–174, London, 1997. J. Wiley.
- [5] de Wit, P.J. *Liquefaction of Cohesive Sediments caused by Waves*. PhD thesis, Technische Universiteit Delft, Delft, 1995.
- [6] Eilers, H. Die Viskosität von Emulsionen hochviskoser Stoffe als Funktion der Konzentration. *Kolloid-Z.*, 97(3):313–321, 1941.
- [7] Gibson, R.E., England, G.L., and Hussey, M.J.L. The Theory of One-Dimensional Consolidation of Saturated Clays. 1. Finite Non-Linear Consolidation of Thin Homogeneous Layers. *Geotechnique*, 17:261–273, 1967.
- [8] Herschel, W. H. and Bulkley, R. Konsistenzmessungen von Gummi-Benzollösungen. *Colloid and Polymer Science*, 39(4):291–300, 1926.
- [9] Jeffery, G.B. The Motion of Ellipsoidal Particles Immersed in a Viscous Fluid. *Proc. Roy. Soc. A*, 102:161–179, 1922.
- [10] Krieger, I.M. and Dougherty, T.J. A Mechanism for Non-Newtonian Flow in Suspensions of Rigid Spheres. *Transactions of the Society of Rheology*, III:137–152, 1959.
- [11] Merckelbach, L. *Consolidation and Strength Evolution of Soft Mud Layers*. PhD thesis, Technische Universiteit Delft, Delft, 2000.
- [12] Migniot, C. Étude des propriétés physiques de différents sédiments très fins et de leur comportement sous des actions hydrodynamiques. *La Houille Blanche*, 7:591–620, 1968.

- [13] Migniot, C. Tassement et rhéologie des vases. 2ième Partie. *La Houille Blanche*, 2:95–111, 1989.
- [14] Nguyen, Q.D. and Boger, D.V. Measuring the Flow Properties of Yield Stress Fluids. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 24:47–88, 1992.
- [15] Scheraga, H.A. Non-Newtonian Viscosity of Solutions of Ellipsoidal Particles. *J. Chem. Phys.*, 23:1526–1532, 1955.
- [16] Schmidt, H.-H. *Grundlagen der Geotechnik*. B.G. Teubner, Wiesbaden, 2006.
- [17] Stickel, J.J. and Powell, R.L. Fluid Mechanics and Rheology of Dense Suspensions. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 37:129–149, 2005.
- [18] Toorman, E.A. and Huysentruyt, H. Towards a New Constitutive Equation for Effective Stress in Self-Weight Consolidation. In R. Parker N. Burt and J. Watts, editors, *Cohesive Sediments*, pages 121–132, London, 1997. J. Wiley.
- [19] Worrall, W.E. and Tuliani, S. Viscosity changes during the ageing of clay-water suspensions. *Trans British Ceramic Society*, 63:167–185, 1964.
- [20] Wurpts, R. Hyperconcentrated Flow. *HANSA Internatinal Maritime Journal*, 142(09):75–88, 2005.