

# Energiedissipation im Unterwasser von Labyrinth-Wehren

Jennifer Pfrommer M. Sc., Dr.-Ing. Michael Gebhardt, Fabian Belzner M. Eng.,  
Bundesanstalt für Wasserbau

Labyrinth-Wehre können eine mögliche Alternative zu festen Wehren darstellen, insbesondere an Wasserstraßen mit geringer Abflussvariabilität, geringem Rückstau einfluss sowie begrenztem Platzangebot. Bisherige Untersuchungen an Labyrinth-Wehren zeigen deutlich die hydraulischen Vorteile dieser Wehrtypen. Im Hinblick auf die Energiedissipation findet sich hingegen nur wenig Literatur. Die meisten Modelluntersuchungen wurden für den Einsatz an Talsperren durchgeführt, wo sich die hydraulischen Randbedingungen deutlich von denen im Fließgewässer unterscheiden. Um die Strömungseigenschaften eines Labyrinth-Wehres im Unterwasser zu bewerten, wurde eine experimentelle Studie in einer horizontalen Rinne mit variablen Unterwasserständen und Abflüssen durchgeführt.

## 1 Theoretischer Hintergrund

Beim Überströmen eines Wehrs wird ein Großteil der potenziellen Energie in kinetische Energie umgesetzt. Bei geringen Unterwasserständen herrscht hinter dem Wehr-

überfall schießender Abfluss mit hohen Fließgeschwindigkeiten. Bei höheren Unterwasserständen entsteht ein Fließwechsel von schießend nach strömend (Bild 1). Dieser Fließwechsel erfolgt in Form eines Wechselsprungs, dessen Form von der Froudezahl  $Fr_1$  und der Wassertiefe  $y_1$  im schießenden Bereich sowie von den Fließverhältnissen im Unterwasser abhängig ist (Chow 1959). Zur Vermeidung von Erosionsschäden, welche die Standsicherheit der gesamten Anlage gefährden können, sind die Tosbecken derart zu dimensionieren, dass sich die Energieumwandlung auf einen begrenzten und befestigten Bereich beschränkt.

Bei der Gestaltung von Tosbecken handelt es sich in den meisten Fällen um individuelle, standortspezifische Lösungen, die in der Vergangenheit zu sehr unterschiedlichen Geometrien geführt haben. Es gibt wenige Standardlösungen, wie z. B. die vom United States Bureau of Reclamation (USBR), das auf Basis von Modelluntersuchungen Standardtosbecken entwickelte, die für bestimmte Froudezahlen  $Fr_1$  eingesetzt werden können. Es sei auch auf DIN 19661-2 hingewiesen, in der eine Klassifikation von Tosbecken zu finden ist.

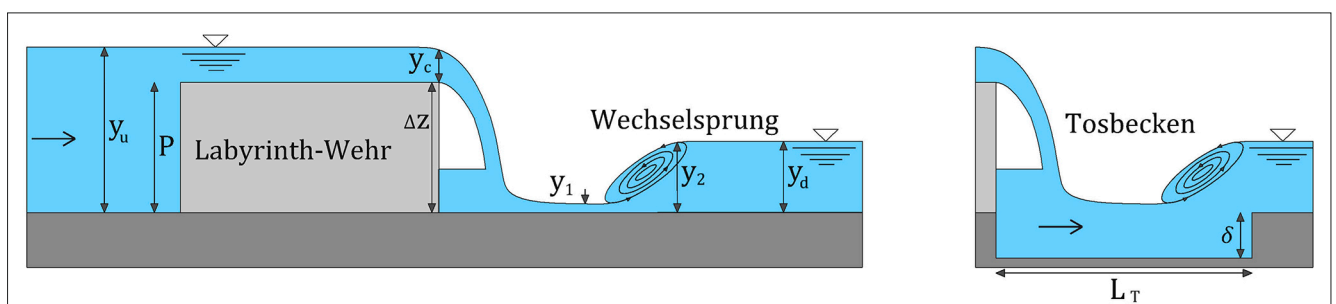


Bild 1: Definitionsskizze

Die Vorbemessung eines Tosbeckens erfolgt in der Regel über die Berechnung eines ebenen Wechselsprungs unter Anwendung des Impulssatzes. Der Energieverlust durch den Wechselsprung ist ausschließlich von den konjugierten Wassertiefen,  $y_1$  und  $y_2$ , abhängig. Ein wichtiger Parameter für die Funktionalität des Tosbeckens ist hierbei der Einstaugrad  $\varepsilon$ , welcher sich als Sicherheitsfaktor aus dem Verhältnis von vorhandener Wassertiefe zu benötigter Wassertiefe wie folgt definieren lässt:

$$\varepsilon = \frac{y_d + \delta}{y_2} \quad (1)$$

Dabei entspricht  $y_d$  [m] der Wassertiefe im Unterwasser,  $\delta$  [m] der Tosbeckentiefe und  $y_2$  [m] der konjugierten Wassertiefe. Für  $\varepsilon > 1$  bleibt der Wechselsprung im Tosbecken; bei  $\varepsilon < 1$  wandert er in das Unterwasser ab. Er sollte für eine sichere Bemessung im Bereich zwischen 1,05 und 1,25 liegen (Strobl und Zunic 2006).

Eine weitere Bemessungsgröße ist die Länge des Tosbeckens, die sich an den charakteristischen Wassertiefen des Wechselsprungs orientiert. In der Literatur gibt es hierzu mehrere empirische Berechnungsformeln, welche im Vergleich ein breitgefächertes Ergebnis aufzeigen. Für ein Becken ohne Einbauten kann die Tosbeckenlänge  $L_T$  [m] mit der empirischen Formel nach Smetana pauschal zu

$$L_T = 6 \cdot (y_2 - y_1) \quad (2)$$

bestimmt werden. Gleichung 2 liegt gemäß der Empfehlung von Hack (2009) im Mittel anderer empirischer Formeln.

Für eine effektivere Energieumwandlung werden Einbauten wie Prallblöcke für das Tosbecken empfohlen. Diese sind jedoch aus ökologischer Sicht umstritten, da sie für über das Wehr abwandernde Fische ggf. eine Gefährdung darstellen und deshalb nachfolgend nicht weiter betrachtet werden.

Anders als bei einem linearen Wehr findet beim Labyrinth-Wehr aufgrund der gefalteten Überfallkrone ein Teil der Energieumwandlung bereits beim Wehrüberfall statt, da die gegenüberliegenden Überfallstrahlen aufeinandertreffen. Dadurch ist die Wassertiefe  $y_1$  unmittelbar nach dem Wehrüberfall größer und die Froudezahl  $Fr_1$  niedriger. Somit ergeben sich kleinere, wirtschaftlich vorteilhafte Abmessungen für das Tosbecken.

## 2 Labormodell

Die Versuche wurden in einer 12 m langen und 60 cm breiten Glasrinne (Bild 2, links) durchgeführt. Dabei wurden Kombinationen aus spezifischen Abflüssen zwischen  $0,12 \text{ m}^2/\text{s} \leq q \leq 0,30 \text{ m}^2/\text{s}$  und Unterwasserständen im Bereich von  $0,05 \text{ m} \leq y_d \leq 0,50 \text{ m}$  untersucht. Die Rinne verfügt über einen autarken Wasserkreislauf mit drei Pumpen. Der Zufluss wurde mit elektrisch verstellbaren Rohrleitungsschiebern und einer magnetisch-induktiven Durchflussmessung geregelt. Der Unterwasserstand



Bild 2: Links: Versuchsrinne, rechts: rechteckförmiges Labyrinth-Wehr-Modell

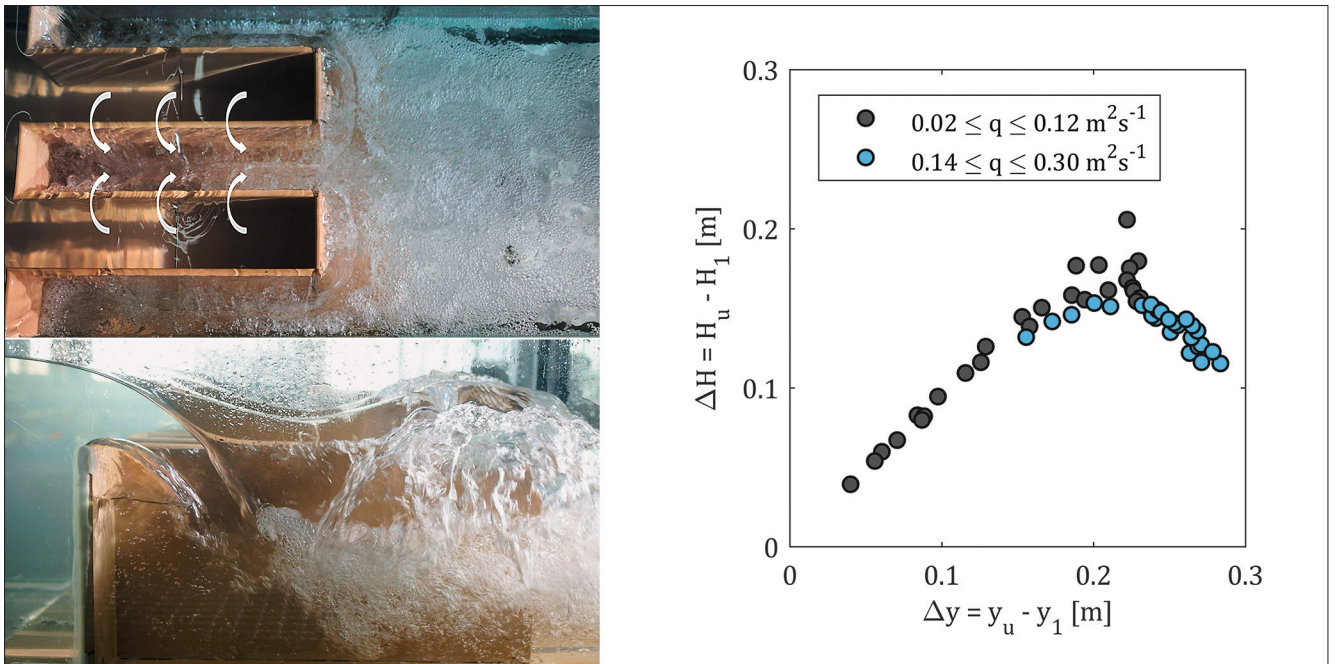


Bild 3: Links: Abfluss über das Labyrinth-Wehr bei  $q = 0,04 \text{ m}^2/\text{s}$  (oben) und  $q = 0,14 \text{ m}^2/\text{s}$  (unten); rechts: Differenz zwischen der Energiehöhe vor und nach dem Wehrüberfall am Labyrinth-Wehr für unterschiedliche Abflüsse

wurde mit einer manuell verstellbaren Klappe am unterwasserseitigen Ende der Rinne eingestellt. Ein Spitzentaster zur Messung des Wasserstands befand sich im Oberwasser im Abstand von 3,86 m vom Wehr. Ein weiterer Spitzentaster im Unterwasser wurde im Abstand von 4,14 m hinter dem Wehr installiert.

Als Modell wurde ein rechteckförmiges Labyrinth-Wehr (Bild 2, rechts) mit einer Wehrhöhe von  $P = 0,26 \text{ m}$  gewählt. Die lichte Weite der Keys beträgt  $W_i = 0,125 \text{ m}$ . Die Seitenwände hatten eine Länge von  $B = 0,50 \text{ m}$  sowie eine Stärke von  $T_s = 0,01 \text{ m}$ . Das Labyrinth-Wehr wurde auf eine 1 cm dicke Platte montiert. Die Überfallkrone war halbrund geformt.

### 3 Energieumwandlung am Labyrinth-Wehr

Aufgrund der Geometrie ergibt sich bei der Überströmung der gefalteten Wehrkrone eine dreidimensionale Strömung. Die Abflussaufteilung erfolgt über die Rück-, Front- und Seitenwände, weshalb es bei größeren Abflüssen zu einer gegenseitigen Beeinflussung der Überfallstrahlen kommt, die bereits zur Energiedissipation

beiträgt. In den Outlet-Keys wird ebenfalls Energie dissipiert, da der Überfall als Tauchstrahl auf ein Wasserpulster trifft. Basierend auf der Energie- und Impulsgleichung nach White (Naudascher 1987) lässt sich die Energiedifferenz  $\Delta H$  zwischen der Energiehöhe vor dem Wehrüberfall  $H_u$  und der Energiehöhe unmittelbar nach dem Wehrüberfall  $H_1$  mit

$$\frac{H_1}{y_c} = \frac{\sqrt{2}}{a + \sqrt{\frac{\Delta z}{y_c} + b}} + \frac{\left( a + \sqrt{\frac{\Delta z}{y_c} + b} \right)^2}{4} \quad (3)$$

ermitteln.  $\Delta z$  entspricht hierbei der Absturzhöhe und kann an dieser Stelle mit der Wehrhöhe  $P$  gleichgesetzt werden.  $y_c$  ist die kritische Wassertiefe über der Wehrkrone. Nach dem Ansatz von White ergeben sich für ein lineares Wehr die Parameter  $a = 1,06$  und  $b = 1,5$ .

Bild 3 (rechts) zeigt auf der Abszisse die Wasserstandsdifferenz zwischen der Oberwassertiefe  $y_u$  und der schießenden Unterwassertiefe  $y_1$ . Auf der Ordinate ist die Differenz zwischen der Oberwasserenergiehöhe  $H_u$  und der Unterwasserenergiehöhe  $H_1$  aufgetragen. Für spezifische Abflüsse zwischen  $0,02 \text{ m}^2/\text{s}$  und  $0,12 \text{ m}^2/\text{s}$  ist in Bild 3 (rechts) eine stetige Zunahme der Energiehöhendifferenz zu erkennen, die nahezu linear proportional zu  $\Delta y$

ist. Bei größeren spezifischen Abflüssen, von  $0,14 \text{ m}^2/\text{s}$  bis  $0,30 \text{ m}^2/\text{s}$ , ist hingegen zu beobachten, dass die Energiehöhendifferenz wieder abnimmt. Dies lässt sich dadurch erklären, dass ein Teil der Energiedissipation bei kleineren Abflüssen bereits in den Outlet-Keys stattfindet. Der Überfall erfolgt hier im Wesentlichen lateral und weniger in Fließrichtung (Bild 3, links oben). Die Strömung muss dabei erst um  $90^\circ$  umgelenkt und dann wieder beschleunigt werden. Bei größeren Abflüssen hingegen nimmt der Abflussanteil über die Stirnseite zu, der Impuls in Fließrichtung ist größer und die Strömung im Outlet-Key erfährt eine stärkere Beschleunigung (Bild 3, links unten). Infolgedessen nimmt die Energiedissipation ab (Bild 3, rechts).

Unter Verwendung von Gleichung (3) kann ein Vergleich zwischen dem Labyrinth-Wehr und dem linearen Wehr hinsichtlich der Energiedissipation beim Wehrüberfall vorgenommen werden. Dabei ist zu erkennen, dass bei beiden Wehrtypen mit steigendem Abfluss die Energiehöhe hinter dem Wehrüberfall zunimmt, die Energiehöhe  $H_1$  beim Labyrinth-Wehr im Vergleich jedoch deutlich niedriger ist (Bild 4). Dies lässt den Schluss zu, dass beim Labyrinth-Wehr durch die dreidimensionale Strömungscharakteristik des Wehrüberfalls deutlich mehr Energie umgewandelt wird als bei einem linearen Wehr. Unter Verwendung der Modellergebnisse konnten die Parameter  $a$  und  $b$  im Ansatz nach White für das Labyrinth-Wehr

angepasst werden. Damit ist es möglich, die Energiehöhe  $H_1$  nach dem Wehrüberfall mit der modifizierten Formel nach White ( $a = -0,85$ ;  $b = 6,17$ ) zu bestimmen.

## 4 Klassifizierung des Wechselsprungs

In der Vergangenheit wurden Labyrinth-Wehre häufig als Hochwasserentlastungsanlagen an Talsperren eingesetzt, an denen die Energieumwandlung mit Hilfe von Sprungschancen oder gestuften Schussrinnen (Silvestri et al. 2013) erfolgen kann. Nur wenige Studien geben Hinweise über die Strömungssituation und die Energiedissipation unterstrom von in Fließgewässern angeordneten Labyrinth-Wehren. Aufgrund des steigenden Interesses an gefalteten Wehren in Flüssen sind jedoch Aussagen zu geeigneten Tosbeckengeometrien erforderlich, um Auskolkungen hinter der Wehranlage zu verhindern. Lopes et al. (2011) führte Untersuchungen an trapezförmigen Labyrinth-Wehren durch und erhielt als Ergebnis im Unterwasser einen dreidimensionalen Strömungszustand in Kombination mit Lufteintrag und Scherwellen. Pfister et al. (2017) untersuchte Piano-Key-Wehr-Modelle in Hinblick auf den Auskolkungsprozess im Unterwasser bei Fein- und Grobsediment und ermittelte daraus die Kolkform. Da der Auskolkungsbereich aufgrund seiner Größe inakzeptabel war, wurde als Gegenmaßnahme eine grobe Schicht aus Steinschüttung empfohlen.

Neben dem Maß der Energiedissipation ist aber auch die Form des Wechselsprungs von Bedeutung. Chow (1959) führte eine Klassifizierung des Wechselsprungs auf Basis der Anström-Froudezahl  $Fr_1$  ein. Für  $Fr_1 = 1$  stellt sich der kritische Abfluss ein und es kann sich kein Wechselsprung ausbilden. Liegt  $Fr_1$  zwischen 1 und 1,7, ist die Wasseroberfläche gewellt und der Zustand wird als gewellter Wechselsprung klassifiziert. Eine Reihe kleiner Wechselsprünge entlang der Wasseroberfläche ergeben sich bei  $Fr_1 = 1,7$  bis 2,5. Die Wasseroberfläche im Unterwasser ist dabei nahezu glatt und der Zustand wird als schwacher Wechselsprung bezeichnet. Oszillierende Wechselsprünge, welche zwischen  $Fr_1 = 2,5$  und 4,5 auftreten, zeigen keine Regelmäßigkeiten auf und können Schäden an der Gewässersohle und dem Flussufer hervorrufen. Für  $Fr_1 = 4,5$  bis 9,0 ergibt sich eine ausgeprägte

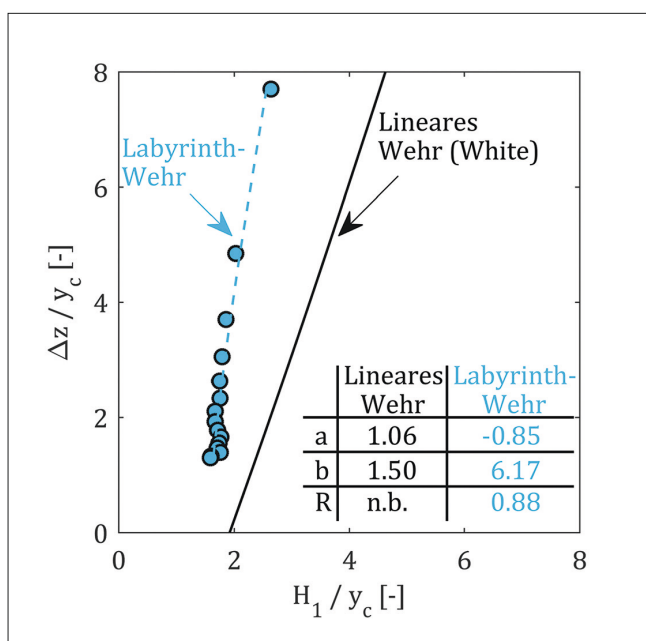


Bild 4: Energiedissipation am Labyrinth-Wehr im Vergleich zum linearen Wehr nach dem Ansatz von White

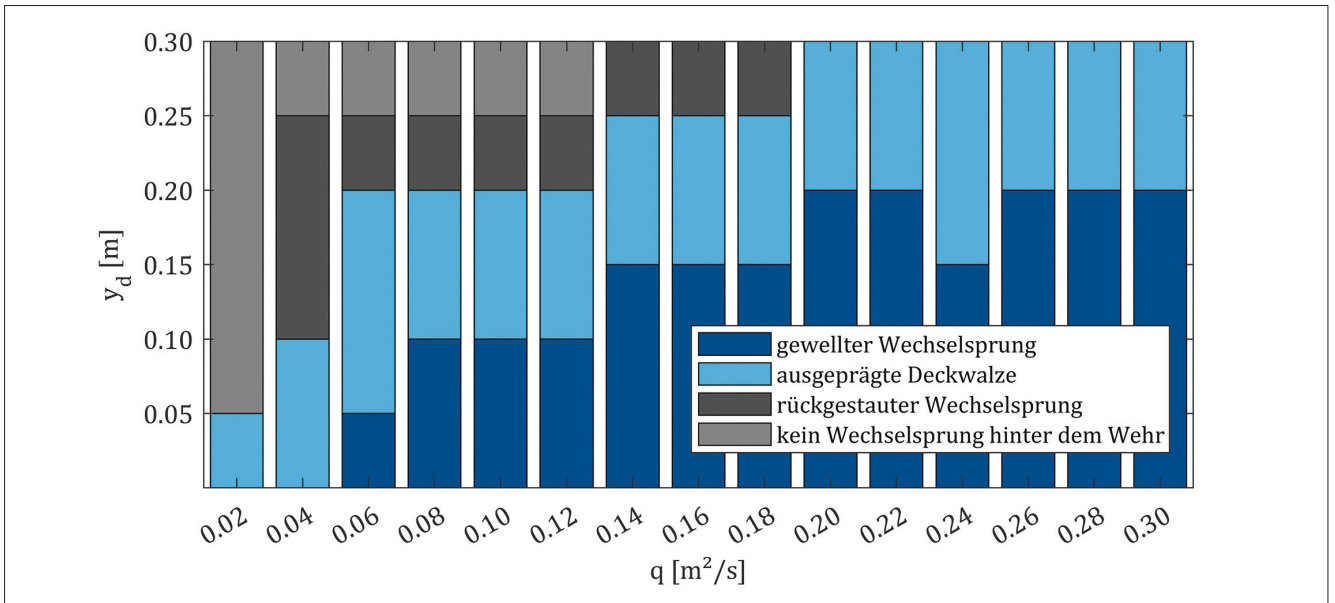


Bild 5: Wechselsprungarten am Labyrinth-Wehr für die betrachteten Unterwasserstand-Abfluss-Beziehungen

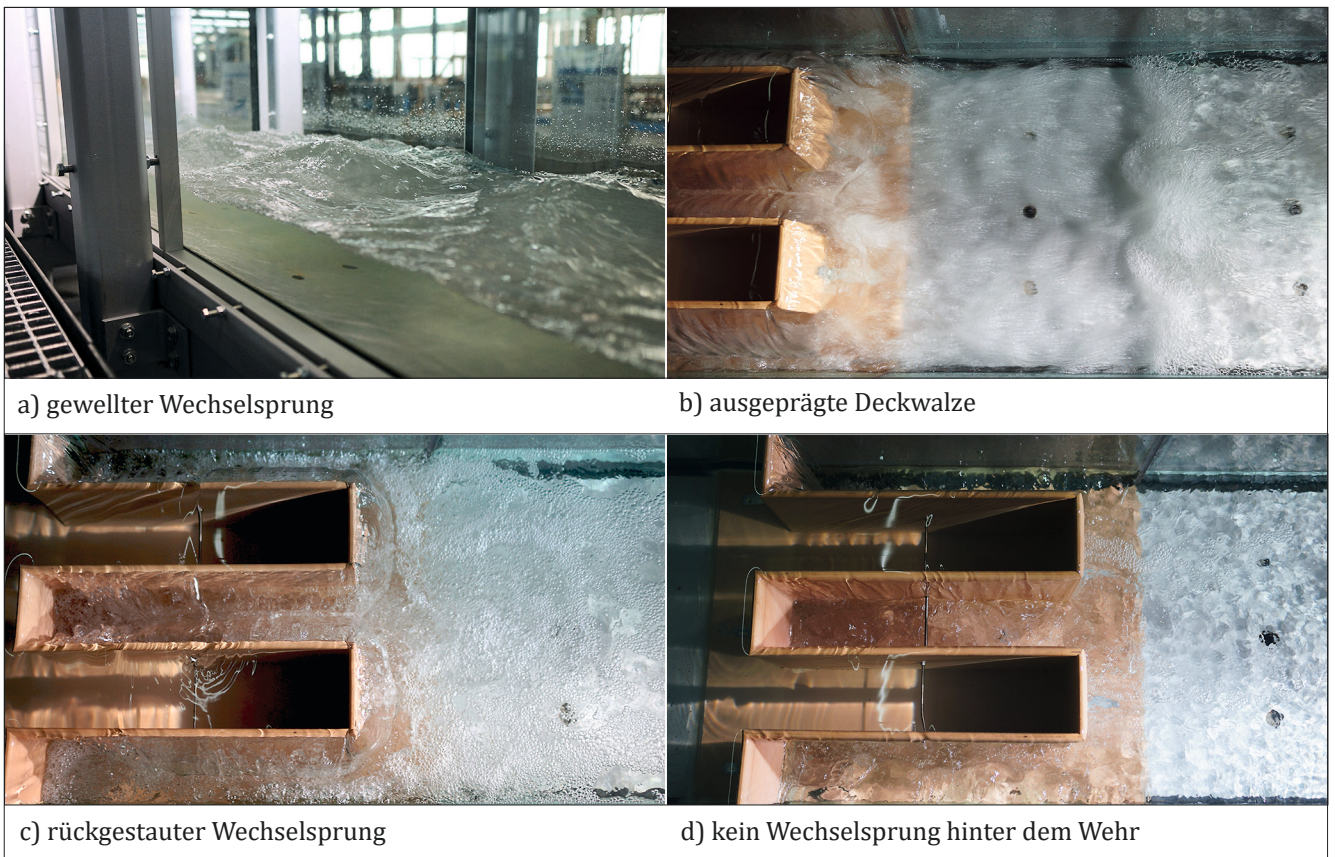


Bild 6: Beobachtete Wechselsprungarten unterhalb des Labyrinth-Wehres

Deckwalze mit hoher Energiedissipation. Ein starker Wechselsprung mit rauer Oberfläche erfolgt ab  $Fr_1 = 9,0$ .

Im Modell konnten vier Wechselsprungarten beobachtet und identifiziert werden (Bild 5).

Bei hohen Abflüssen und geringen Unterwasserständen wurde ein gewellter Wechselsprung beobachtet. Mit steigendem Unterwasserstand entwickelte sich ein Wechselsprung mit ausgeprägter Deckwalze oder ein rückgestauter Wechselsprung (Bild 6). Bei kleinen Abflüssen und

hohen Unterwasserständen fand in einem Tauchstrahl die Energieumwandlung statt, die dadurch gekennzeichnet ist, dass ein Wasserstrahl mit großem Geschwindigkeitsunterschied zur Umgebung in ein Wasserpolster eintritt. Ein instabiler oder ins Unterwasser abwandern der Wechselsprung konnte nicht beobachtet werden.

Nicht alle der betrachteten Zustände sind für die Praxis relevant. Beispielsweise tritt schießender Abfluss im Unterwasser nur an Flüssen mit großem Gefälle, wie z. B. in Gebirgsflüssen, auf.

## 5 Vorbemessung des Tosbeckens

Für die Vorbemessung des Tosbeckens werden sowohl der Unterwasserstand  $y_a$  als auch die konjugierte Wassertiefe  $y_2$  und die schießende Wassertiefe  $y_1$  benötigt. Aufgrund der hochturbulenten Strömung im Unterwasser wurden die Wasserstände mit Hilfe eines Maßstabs außerhalb der Versuchsrinne bestimmt. Im Fall von stehenden Wellen entsprach  $y_2$  dem Wert des Wellenbergs.

Zur Ermittlung der Tosbeckengeometrie wurden die Gleichungen 1 und 2 mit Hilfe der gemessenen Wasserstände ausgewertet. Unter Berücksichtigung eines Einstaugrades  $\varepsilon$  von 1,25 als Sicherheitsfaktor ergab sich eine rechnerische Tosbeckentiefe von  $\delta = 0,13$  m, die der Hälfte der Wehrhöhe entspricht. Der Einstaugrad von  $\varepsilon = 1,25$  würde für die gewählte Eintiefung einen ortsstabilen Wechselsprung im Tosbecken gewährleisten. Für die Tosbeckenlänge würde sich nach Gleichung 2 eine Länge von  $L_T = 0,75$  m ergeben, die etwa dem Dreifachen der Wehrhöhe entspricht.

## 6 Tosbeckenuntersuchungen

Auf Basis der oben beschriebenen Vorbemessung wurde im Labor ein 0,75 m langes und 0,13 m tiefes Tosbecken eingebaut. In den Versuchen wurden dabei vorwiegend die Varianten betrachtet, die aufgrund des gewellten Wechselsprungs als kritisch angesehen wurden. Dabei zeigte sich, dass mit Tosbecken der Überfallstrahl eher

einem Tauchstrahl ähnelt und weniger turbulent ist als in der Variante ohne Tosbecken. Zusätzlich kommt es zu einer geringeren Ausbreitung der Deckwalze. Bei allen untersuchten Zuständen konnte ein rückgestauter Wechselsprung im Tosbecken beobachtet werden.

Neben einer ausreichenden Energieumwandlung ist ein weiteres Ziel des Tosbeckens, unterstrom ein möglichst gleichmäßiges Geschwindigkeitsprofil zu gewährleisten. Die Endschwelle des Tosbeckens bewirkte in den Untersuchungen jedoch ein unerwünschtes Absenken des Wasserstands, das je nach Abflussbedingung im Unterwasser (schießend oder strömend) einen weiteren Fließwechsel zur Folge hatte (Bild 7).

Untersuchungen mit Tosbeckenlängen von  $L_T = 0,80$  m,  $L_T = 0,90$  m und  $L_T = 1,30$  m zeigten, dass unabhängig von der Länge  $L_T$  ein zweiter Fließwechsel nach dem Tosbecken auftrat. Durch die Strömungsablösung an der senkrechten Endschwelle geht die Abflusskontrolle auf die Schwelle über und erzwingt einen Fließwechsel zum schießenden Abfluss unterhalb des Tosbeckens mit starker Wellenbildung. Zur Sichtbarmachung der Ablösung wurden Wollfäden als Tracer verwendet (Bild 8, links).

Hack (2009) empfiehlt, für diesen Fall eine schräge Endschwelle mit einer Neigung von 1:3 vorzusehen, wodurch ein allmählicher Übergang von der Tosbecken- zur Unterwassersohle erreicht wird. Im Modell konnten damit die Strömungsablösung reduziert und ein zweiter Fließwechsel unterstrom vermieden werden (Bild 8, rechts). Dennoch war bei größeren Abflüssen sowohl im Tosbecken als auch im Unterwasser eine relativ unruhige Wasseroberfläche zu beobachten. Die Ursache hierfür liegt in der Wurfweite des Überfallstrahls. Bei hohen Abflüssen trifft der Überfallstrahl auf die schräge Endschwelle anstatt auf die horizontale Tosbeckensohle, weshalb die Energie nicht vollständig umgewandelt wird. Mit einem längeren Tosbecken ( $L_T = 0,90$  m) konnte eine höhere Energiedissipation erzielt werden. Daher kann auf Grundlage der maßgeblichen Variantenuntersuchungen eine Abschätzung für diese Tosbeckenlänge durch Anpassung des Vorfaktors aus Gleichung 2 wie folgt abgeschätzt werden:

$$L_T = 7 \cdot (y_2 - y_1) \quad (4)$$

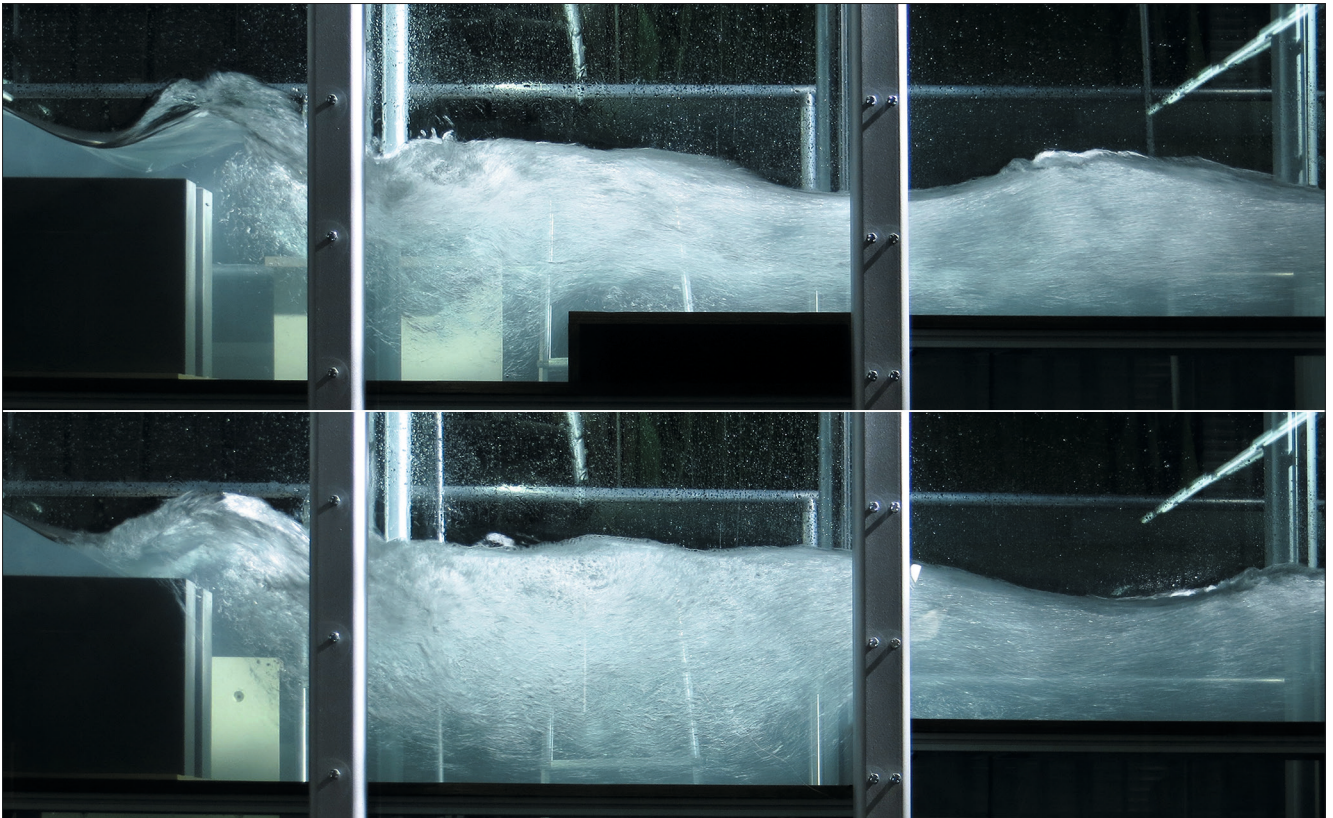


Bild 7: Zweiter Fließwechsel mit ausgeprägter Deckwalze bei einer Tosbeckenlänge von  $L_T = 0,75$  m (oben) und  $L_T = 1,30$  m (unten) und einem spezifischen Abfluss von  $q = 0,30$  m<sup>2</sup>/s

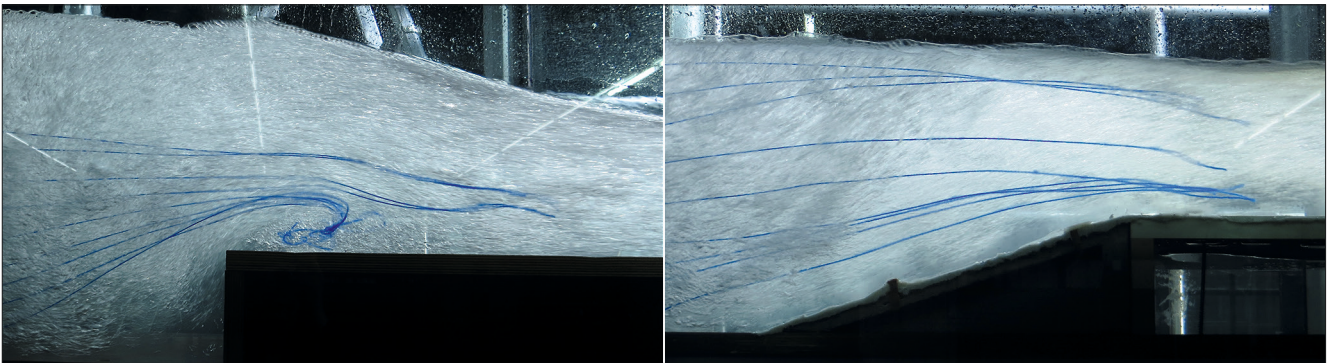


Bild 8: Tracerversuch zur Abbildung der Ablösungen bei vertikaler (links) und geneigter (rechts) Schwelle

## 7 Numerische Untersuchungen

Parallel zu den gegenständlichen Modelluntersuchungen wurden numerische Untersuchungen durchgeführt mit dem Ziel, die komplexe Strömung hinter dem Labyrinthwehr besser zu verstehen und mit den im gegenständlichen Modell gemessenen Wassertiefen zu vergleichen. Hierzu wurde die frei verfügbare Software OpenFOAM® verwendet.

Insgesamt zeigte sich eine gute Übereinstimmung zwischen den numerischen und den gegenständlichen Untersuchungsergebnissen. Insbesondere die Energieumwandlung beim Überströmen des Wehres sowie der zweite Fließwechsel nach der vertikalen Endschwelle wurde ähnlich prognostiziert. Die numerische Simulation zeigte ebenfalls, dass durch eine rampenartige Tosbeckenendschwelle der Steigung 1:3 der zweite Fließwechsel vermieden werden kann. Des Weiteren wurde bestätigt, dass eine Tosbeckenlänge von  $L_T = 0,90$  m

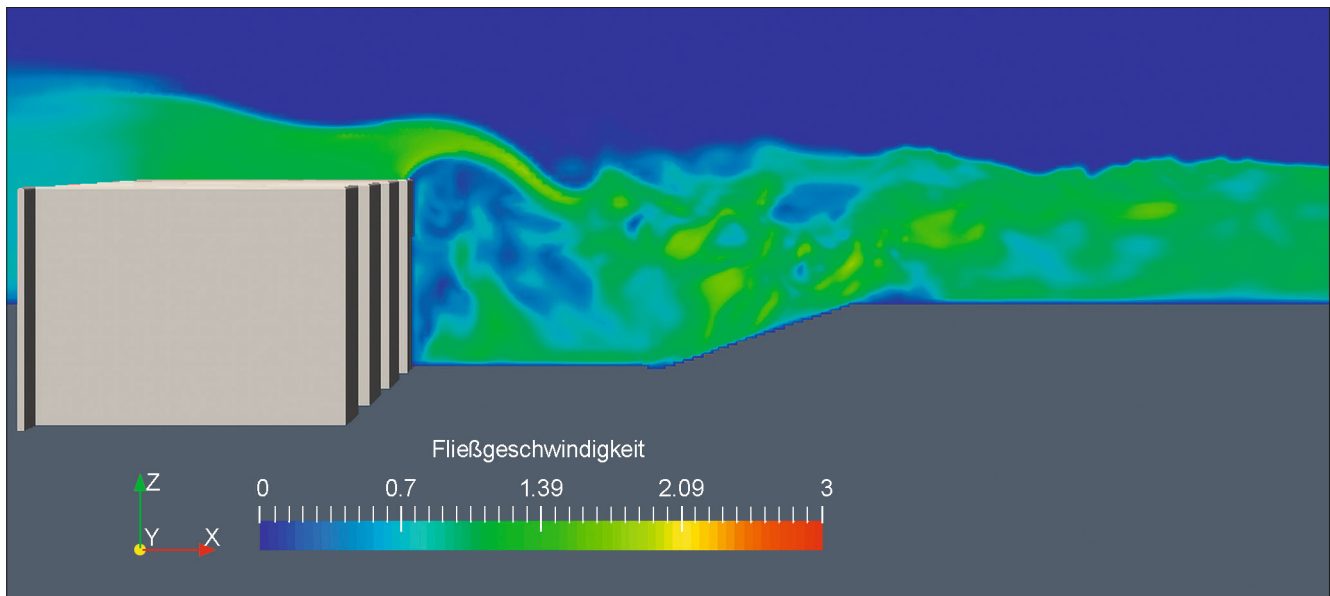


Bild 9: Fließgeschwindigkeit in einem Tosbecken mit  $L_T = 0,90$  m und  $\delta = 0,13$  m mit Rampe für  $q = 0,30$  m<sup>2</sup>/s

zur Vergleichmäßigung der Strömung beiträgt (Bild 9). Lediglich bei der Ausbildung des Wechselsprungs zeigten sich Unterschiede, welche sich im gegenständlichen Modell auf die Ungenauigkeiten bei den Spitzentastermessungen zurückführen lassen.

## 8 Zusammenfassung

Die hydraulischen Untersuchungen an einem gegenständlichen Modell haben gezeigt, dass sich die Energiedissipation am Labyrinth-Wehr aufgrund seiner Geometrie von anderen festen Wehrtypen unterscheidet. Bereits beim Wehrüberfall kommt es infolge der gegenseitigen Beeinflussung der Überfallstrahlen zur Energieumwandlung. Es wurde gezeigt, dass die Energiedissipation durch den modifizierten Ansatz von White beschrieben werden kann.

Im Hinblick auf die untersuchten Zustände wäre ein eingetieftes Tosbecken nicht zwingend erforderlich. Dennoch wird eine Eintiefung empfohlen, um die Erosionsgefährdung auszuschließen. Aus den gegenständlichen und numerischen Modelluntersuchungen ergibt sich für die untersuchten Varianten ein Bemessungsvorschlag mit einer Tosbeckenlänge von  $L_T = 0,90$  m sowie einer Tosbeckentiefe von  $\delta = 0,13$  m. Zur Vergleichmäßigung

des Geschwindigkeitsprofils und zur Vermeidung von Ablösepunkten wird eine Rampe mit einer Steigung von 1:3 am Ende des Tosbeckens empfohlen. Verallgemeinernd lässt sich festhalten, dass bei einem Verhältnis von Tosbeckentiefe zu Wehrhöhe von  $\delta/P \geq 0,5$  sowie bei einem Verhältnis von Tosbeckenlänge zu Wehrhöhe von  $L_T/P \geq 3,5$  eine ausreichende Energiedissipation mit Hilfe eines Tosbeckens erzielt werden kann.

## 9 Literatur

Chow, V. T. (1959): Open-Channel Hydraulics: McGraw-Hill Book Company.

Hack, H.-P. (Hg.) (2009): Flussbau. Hydraulische Berechnung, Wehre und Sohlenbauwerke, Ausleitungsbauwerke, Energieumwandlungsanlagen, Wasserkraftanlagen, Binnenverkehrswasserbau. Weiterbildender Studiengang Wasser und Umwelt; Deutsche Vereinigung für Wasserwirtschaft, Abwasser und Abfall. Weimar, Hennef: Univ.-Verl.; DWA.

Lopes, R.; Matos, J.; Melo, J. F. (2011): Flow properties and residual energy downstream of labyrinth weirs. In: Sébastien Erpicum, Frédéric Laugier, Jean-Louis Boillat, Michel Piroton, Bernard Reverchon und Anton Schleiss



(Hg.): Labyrinth and Piano Key Weirs. Boca Raton: CRC Press/Balkema, S. 97–104.

Naudascher, E. (1987): Hydraulik der Gerinne und Gerinnebauwerke. 2. Aufl. Wien: Springer-Verlag.

Pfister, M.; Jüstrich, S.; Schleiss, A. J. (2017): Toe-scour formation at Piano KeyWeirs. In: Sébastien Erpicum, Frédéric Laugier, Michel Ho Ta Khanh und Michael Pfister (Hg.): Labyrinth and Piano Key Weirs III. PKW 2017. Boca Raton: CRC Press, S. 147–156.

Silvestri, A.; Archambeau, P.; Pirotton, M.; Dewals, B.; Erpicum, S. (2013): Comparative analysis of the energy dissipation on a stepped spillway downstream of a Piano Key Weir. In: Sébastien Erpicum, Frédéric Laugier, Michael Pfister, Michel Pirotton, Guy-Michel Cicero und Anton J. Schleiss (Hg.): Labyrinth and Piano Key Weirs II: CRC Press/Balkema, S. 111–120.

Strobl, T.; Zunic, F. (2006): Wasserbau. Aktuelle Grundlagen – neue Entwicklungen. 1. Aufl. Berlin: Springer.

