

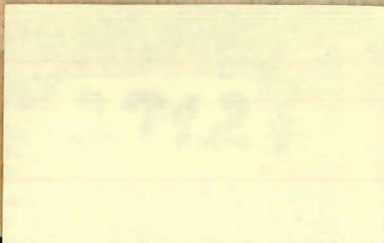
Mitteilungsblatt

der

BUNDESANSTALT FÜR WASSERBAU

KARLSRUHE · NOVEMBER 1966

24



Mitteilungsblatt

der

BUNDESANSTALT FÜR WASSERBAU

KARLSRUHE · NOVEMBER 1966

24

I n h a l t

Seite

V ö l p e l - S a m u

Reliefänderungen in der Tidestromrinne
des Wangerooger Fahrwassers im Verlaufe
einer Sturmperiode und in der darauf fol-
genden Periode mit ruhigeren Wetterlagen 1

S c h n o o r

Über neue Verfahren zur Berechnung des
Reflexionsdruckes von Wasserwellen auf
senkrechte Wände
(Systematischer Aufbau und Erweiterung
der Theorie ; Herleitung allgemeiner Wel-
lendruckgleichungen zur Berechnung der
Druckwerte für beliebige Wellenphasen) 21

Z w e c k

Baugrunduntersuchungen mit Sonden gemäß
DIN 4094 mit Auswertungsmöglichkeiten 83

D a v i d e n k o f f - F r a n k e

Räumliche Sickerströmung in eine um-
spundete Baugrube im Grundwasser 107

- Wiedergabe der Aufsätze mit Quellenangabe gestattet -
Das Mitteilungsblatt erscheint in unregelmäßiger Folge
im Eigenverlag der Bundesanstalt für Wasserbau, Karlsruhe

Dr.rer.nat. Alfred Völpel

und

Gyula Samu

Reliefänderungen in der Tidestromrinne des
Wangerooger Fahrwassers im Verlaufe einer
Sturmperiode und in der darauf folgenden
Periode mit ruhigeren Wetterlagen

Die vorliegende Arbeit wurde mit Unterstützung der Deutschen
Forschungsgemeinschaft in Zusammenarbeit mit dem Geographi-
schen Institut der Universität Hamburg durchgeführt.

G l i e d e r u n g

1. Die Reliefänderungen des Meeresbodens
2. Die marine Dynamik
3. Geomorphologische Schlußfolgerungen
4. Die Sandwanderung
5. Schrifttum

1. Die Reliefänderungen des Meeresbodens

Das Vermessungsschiff "Jade" des Wasser- und Schiffsamtes Wilhelmshaven hat im Jahre 1962 am 18. Januar, vom 20. bis 26. März und am 19. September in zwei Bereichen des Wangerooger Fahrwassers (vergl. Übersichtskarte Abb. 1) Peilungen des Meeresbodens durchgeführt. Um die charakteristischen Bodenformen und die typischen Veränderungen des Bodenreliefs genauer ermitteln zu können - was für Baggerungen zur Vertiefung der Fahrrinne wünschenswert ist - wurden die Abstände der Peillinien außergewöhnlich eng, d.h. mit durchschnittlich 50 m, gewählt. Die Peilunterlagen wurden der Bundesanstalt für Wasserbau - Außenstelle Küste - vom Wasser- und Schiffsamt Wilhelmshaven zur Verfügung gestellt.

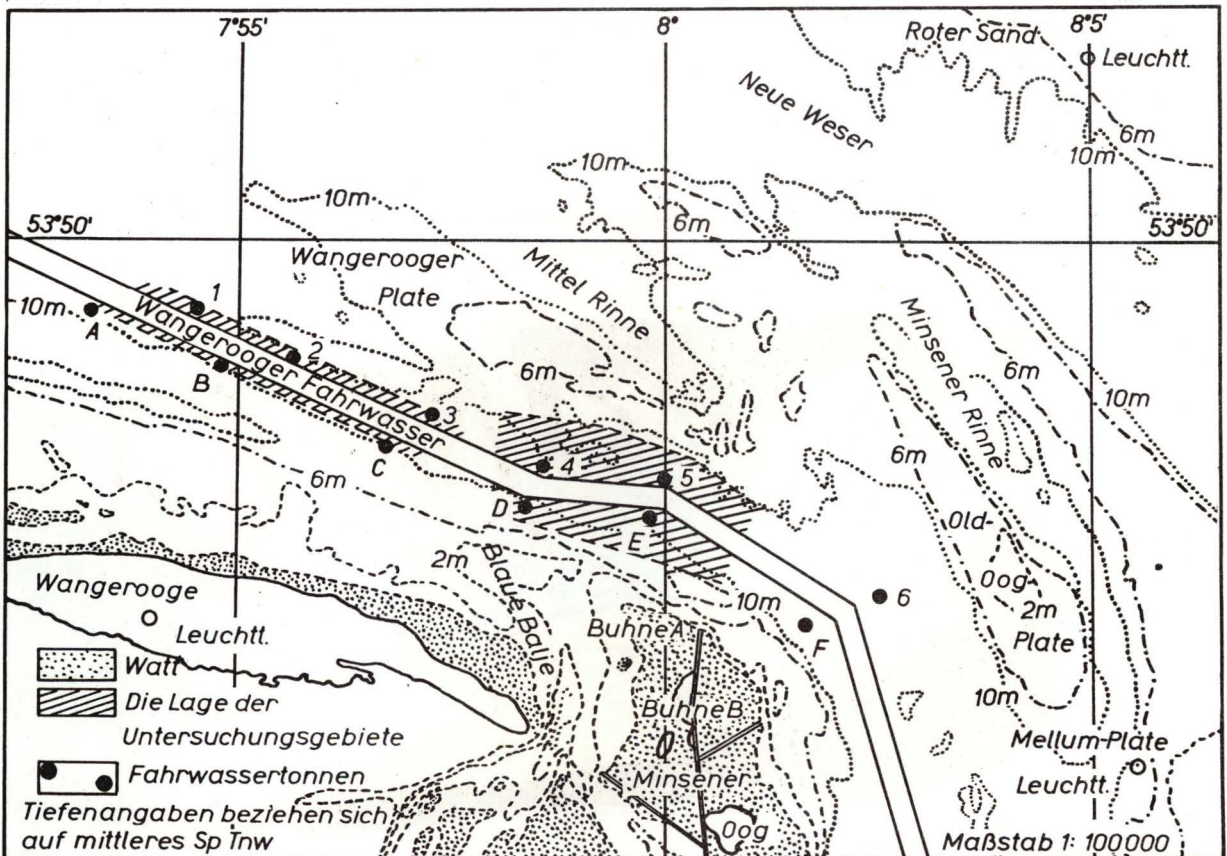


Abb. 1 Übersichtskarte des Untersuchungsgebietes

Die beiden Untersuchungsgebiete sind aus Abb. 1 (schraffiert) ersichtlich. Aus den Echogrammen des östlichen Untersuchungsgebietes, die bei den ersten beiden Peilungen im Januar und März mit annähernd parallelen Ostwest-Kursen aufgenommen wurden, wurden Tiefenkarten entworfen (Abb. 2).

Die in 4 Tiefenstufen:

braun	:	weniger als	11 m
gelb	:	11 - 13 m	
hellblau	:	13 - 15 m	
und dunkelblau	:	mehr als	15 m

dargestellten Reliefkarten geben einen anschaulichen Überblick über die Bodenmorphologie. Die Tiefenangaben der Gezeitenstromrinne sind auf mittleres Springtidenniedrigwasser (MSpTnw) bezogen.

Die mit geraden Linien ausgezogenen Fahrwasserbegrenzungen zeigen östlich der Verbindungslinie Tonne 5 - Tonne E annähernd WNW-Verlauf, westlich der Verbindungslinie annähernd WE-Verlauf bis zur Verbindungslinie Tonne D - Tonne 4. Von dort ab ist der weitere Verlauf nach See zu wieder WNW gerichtet.

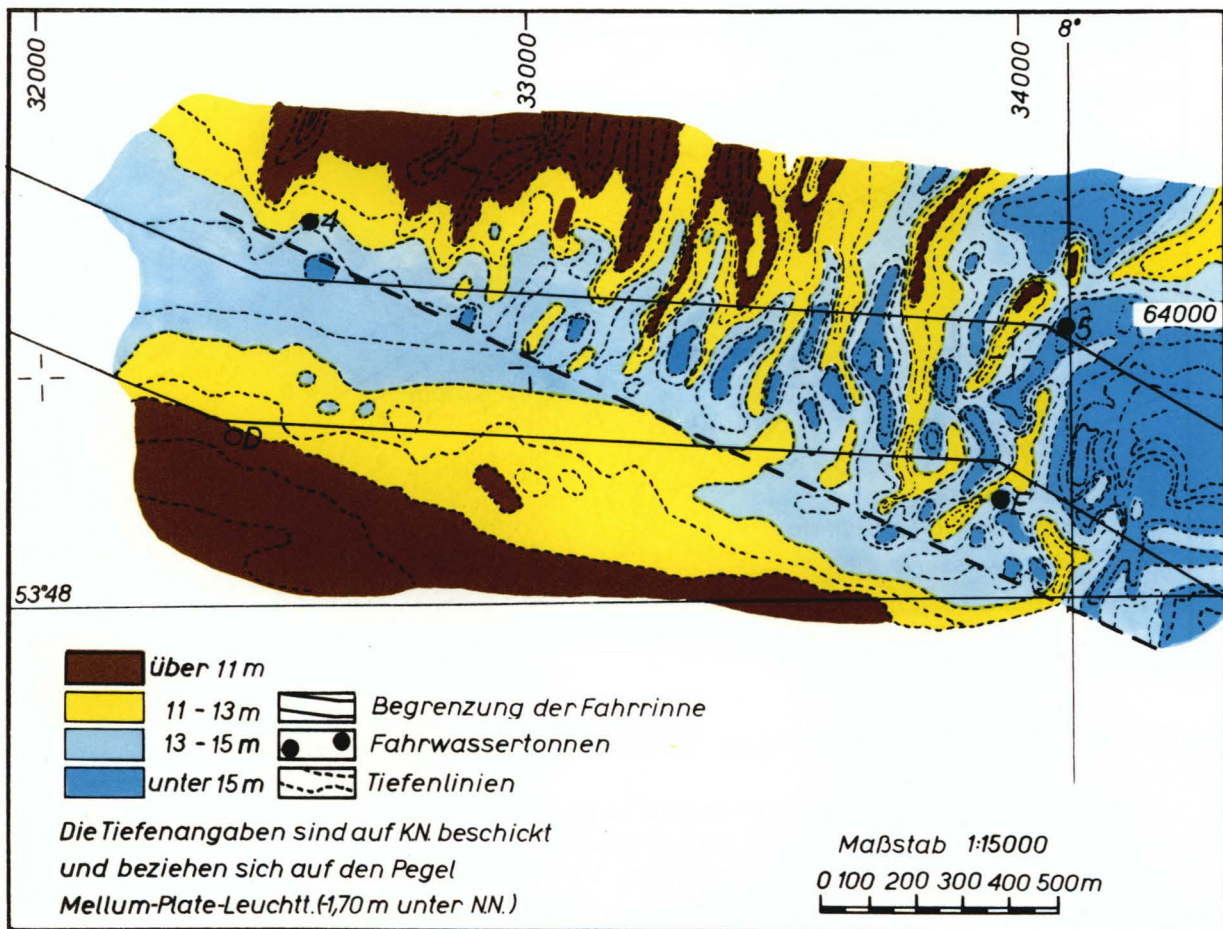


Abb. 2 Tiefenkarte am 18.1.1962

Die Abb. 2 zeigt das Bodenrelief am 18.1.1962, vor Beginn der schweren Sturmperiode im Februar 1962, zu der auch der Katastrophensturm gehört, der in den Mündungstrichtern der deutschen Tidenströme so schwere Zerstörungen und Schäden verursachte.

Es läßt sich nun in der Reliefkarte Abb. 2 eine Linie annähernd parallel zur WNW-Begrenzung des Fahrwassers von oben links nach unten rechts ziehen (dick gestrichelt), die das gesamte obere, nordöstlich davon liegende Gebiet, das auffallend stark morphologisch gegliedert ist, vom unteren südwestlich der Trennungslinie liegenden Teil, der morphologisch sehr gleichmäßig aufgebaut ist, trennt. Die Trennlinie scheidet die beiden charakteristisch verschiedenen Gebiete bemerkenswert scharf. Im Nordostgebiet zeigt das Alternieren brauner und gelber mit blauen Farben die Wechsellagerung langgestreckter Rücken mit Mulden an, wie diese - allerdings weniger stark ausgeprägt - auch aus den Tidenströmen der Elbe, Weser und Ems bekannt sind. Die Rücken werden dort als "Strombänke" bezeichnet.

Diesen Strombänken wird von wasserbaulicher Seite - nicht zuletzt wegen der damit verbundenen Sandwanderung und der Baggerarbeiten zur Erzielung der benötigten Fahrwassertiefen - nachdrückliches Interesse entgegengebracht. In die-

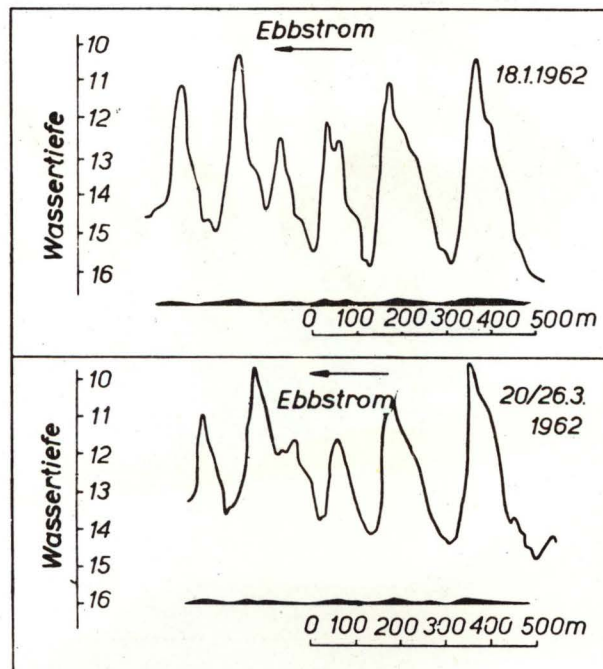


Abb. 3

Echolotdiagramme von Tonne 5 nach Westen längs der Nordbegrenzung des Fahrwassers darunter maßstabsgerechte Darstellung der Strombänke

sem Zusammenhang sind Modelluntersuchungen von Dillo [1] im Franzius-Institut der TH Hannover sowie eine unveröffentlichte Studie von Göhren zu erwähnen. Eine eingehende geologische Bearbeitung ist neuerdings von Reineck [3] erfolgt, der die Bezeichnung "Riesenrippeln" prägte.

Im folgenden soll jedoch die gebräuchlichere Bezeichnung: "Tidestrombänke" benutzt werden.

In Abb. 2 lassen Farben und Tiefenlinien erkennen, daß die Streichrichtungen der Tidestrombänke von N/S bis NNE/SSW verlaufen. Dabei ist ein ganzes Feld von Tidestrombänken erkennbar.

Anhand der Farbabstufungen und der Tiefenlinien ist die allgemeine Asymmetrie der Strombänke erkennbar: Flacher Anstieg von Osten und steiler Abfall nach Westen. Besonders ausgeprägt findet sich diese Asymmetrie von Tonne 5 nach Westen - der Nordbegrenzung des Fahrwassers folgend. Das Echolotdiagramm längs dieser Nordbegrenzung (Abb.3) zeigt dies anschaulich.

Mit dem Übergang zu den weiter westlich gelegenen schwächeren Strombankbildungen tritt die Asymmetrie kaum noch in Erscheinung.

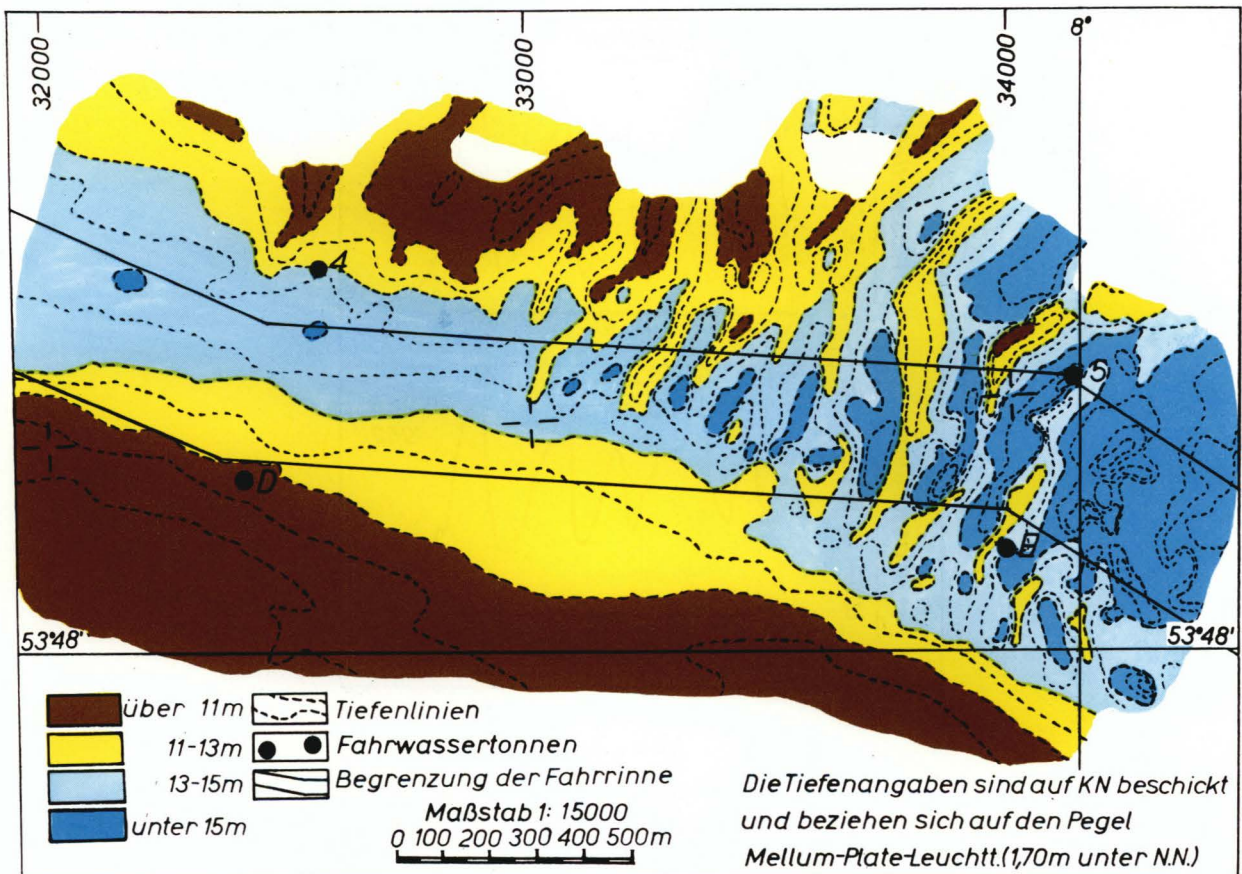


Abb. 4 Tiefenkarte am 20./26.3.1962

Abb. 4 zeigt nun das Bodenrelief am 20./26.3.1962, also nach der schweren Sturmperiode im Februar 1962.

Aus dem Vergleich des Bodenreliefs *v o r* und *n a c h* der Sturmperiode anhand der Abb.2 und 4 wurde die Verlagerung der Tiefenlinien ermittelt.

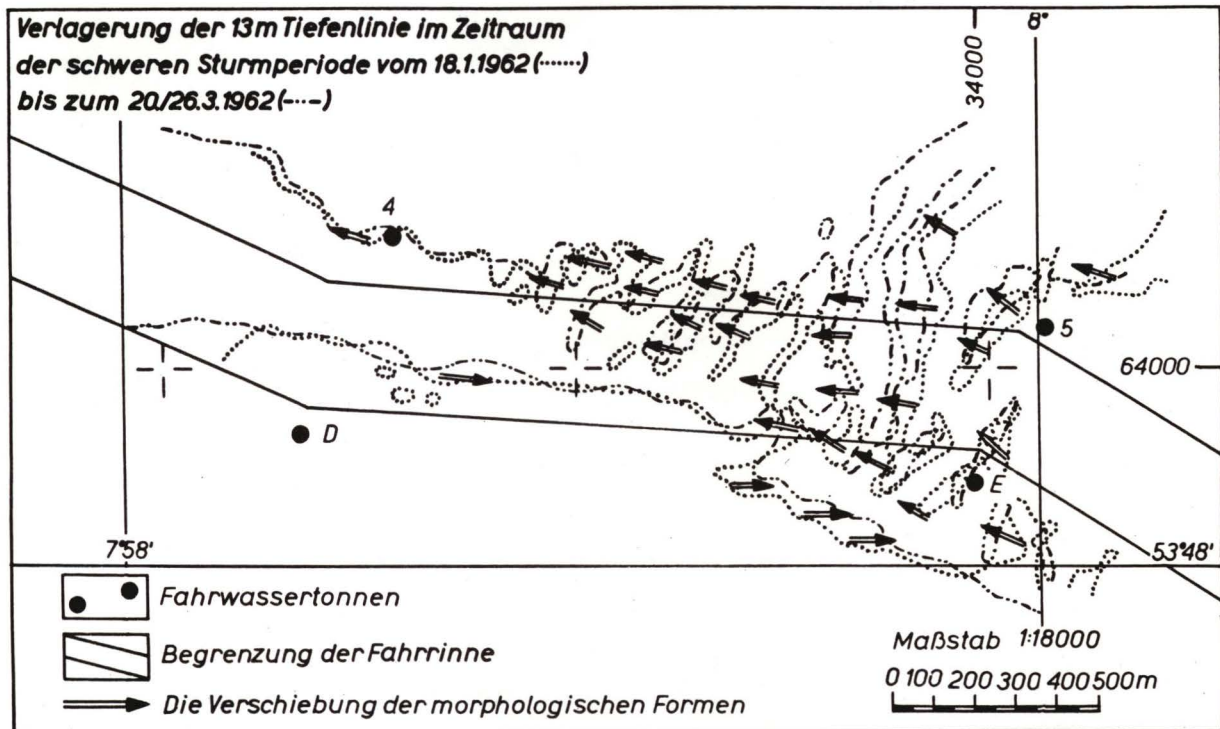


Abb. 5 Verlagerung der 13 m-Tiefenlinie vom 18.1. bis 20./26.3.1962

Abb. 5 zeigt die Verlagerung der 13 m-Tiefenlinie nach Ablauf der Sturmperiode. Die Verschiebung dieser Tiefenlinie umreißt die WNW-Verlagerung der Strombänke. Der mittlere Verlagerungsbetrag ist etwa 40 m. Die Pfeile bezeichnen die Verlagerungsrichtungen der Strombänke, die im Strombankfeld ausschließlich in Ebbstromrichtung weisen, während an der Südböschung der Rinne die morphologischen Formen eine gewisse Tendenz zur Verlagerung in Flutstromrichtung aufweisen. Die bereits in Abb. 2 dargestellte morphologische Grenzlinie trennt auch die beiden Bereiche entgegengesetzter Verlagerung.

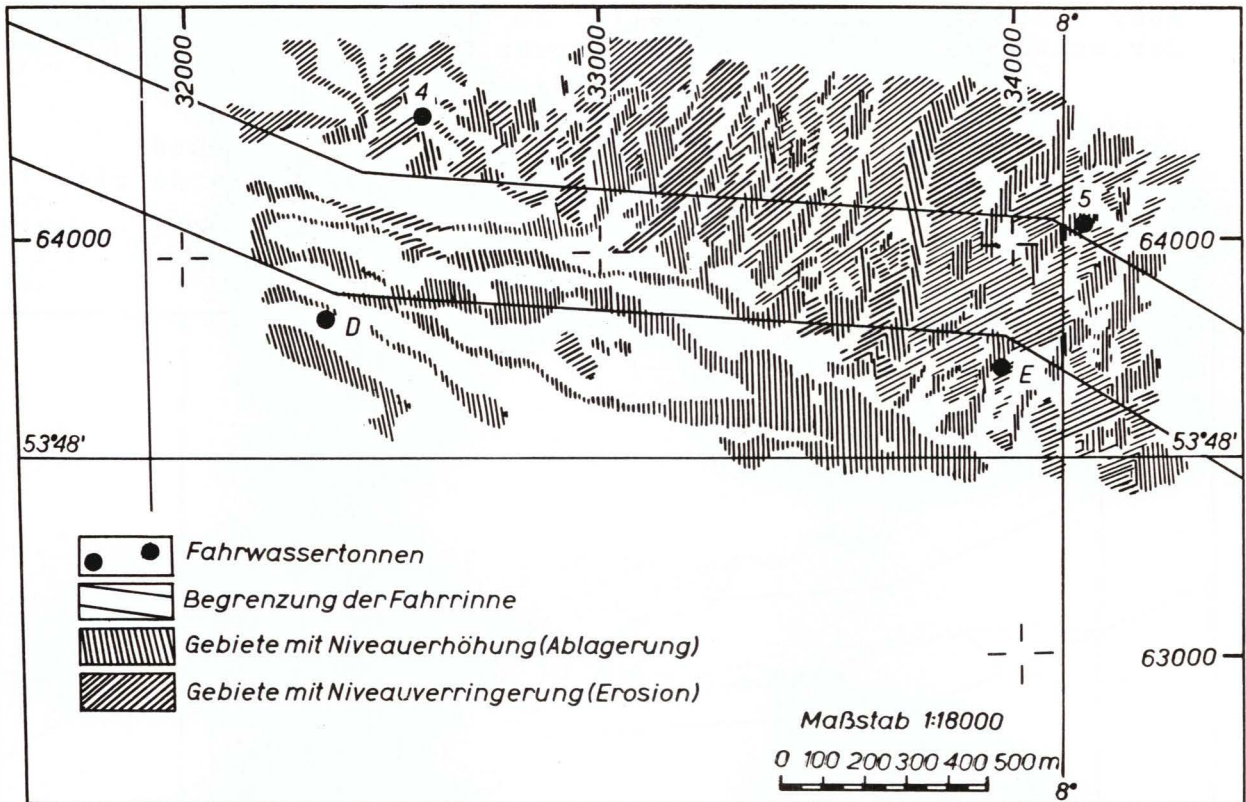


Abb. 6 Tiefenänderungen vom 18.1. bis 20./26.3.1962

Die Abb. 6 zeigt die Tiefenänderungen nach Ablauf der Sturmperiode, und zwar:

- eng schraffiert : Gebiete mit Niveauerhöhung
(Ablagerung)
- weit schraffiert : Gebiete mit Niveauverringernung
(Erosion)

Entsprechend dem Vorrücken der Strombänke alternieren streifenförmige Bereiche mit Ablagerung und Erosion,

Dabei überwiegt nördlich der genannten Grenzlinie die Niveauverringernung, während südlich davon Niveauerhöhung vorherrscht, dies bedeutet, daß während der Sturmperiode im Feld der Strombänke Erosion überwog. Demgegenüber dominierte an der Südböschung der Rinne Ablagerung. Weiterhin ergibt sich beim Vergleich der Abb. 2 mit Abb. 4, daß die braunen (11 m) und z.T. auch die gelben (11 - 13 m) Farbflächen der Strombankrücken nach Norden zurückweichen. Dies bezeichnet eine Erniedrigung der Strombänke während der Sturmperiode. Die Abb. 3 veranschaulicht dies: Das obere Diagramm zeigt das

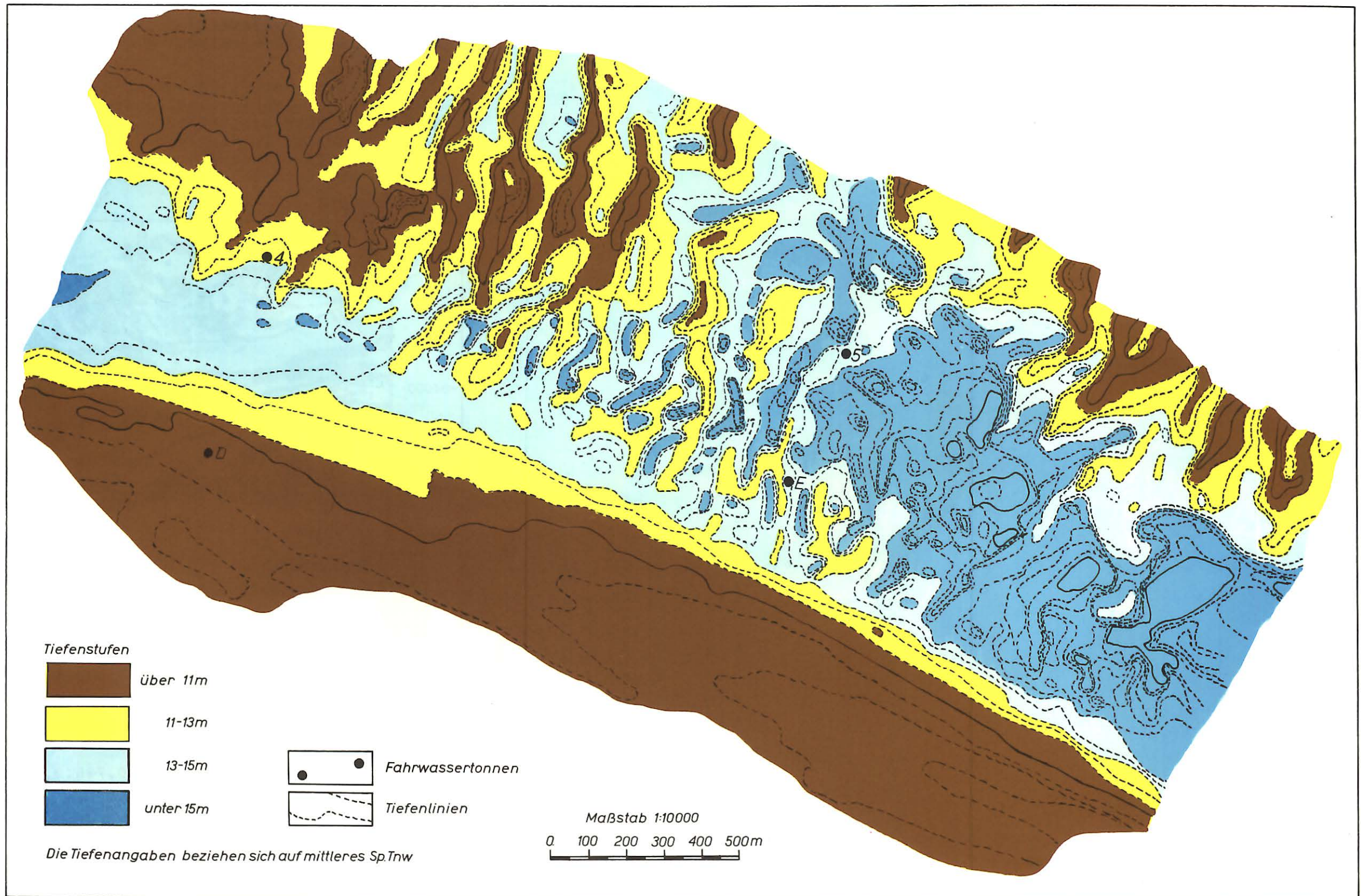


Abb. 7 Tiefenkarte am 19.9.1962

Echolotprofil der Strombänke westlich von Tonne 5 vor der Sturmperiode. Das untere Diagramm zeigt das entsprechende Echolotprofil nach der Sturmperiode. Beim Vergleich beider Diagramme ist ersichtlich, daß sich die Strombankhöhen im Verlaufe der Sturmperiode um etwa 1 m verminderten.

Aus Echolotdiagrammen, die am 19.9.1962, also 1/2 Jahr nach der Sturmperiode aufgenommen wurden, ist das in der Abb. 7 dargestellte Bodenrelief gezeichnet worden. Die Reliefkarte ist im Vergleich zu Abb. 2 und Abb. 4 weiträumiger und zeigt auch die an die beiden anderen Reliefkarten südlich und östlich angrenzenden Gebiete.

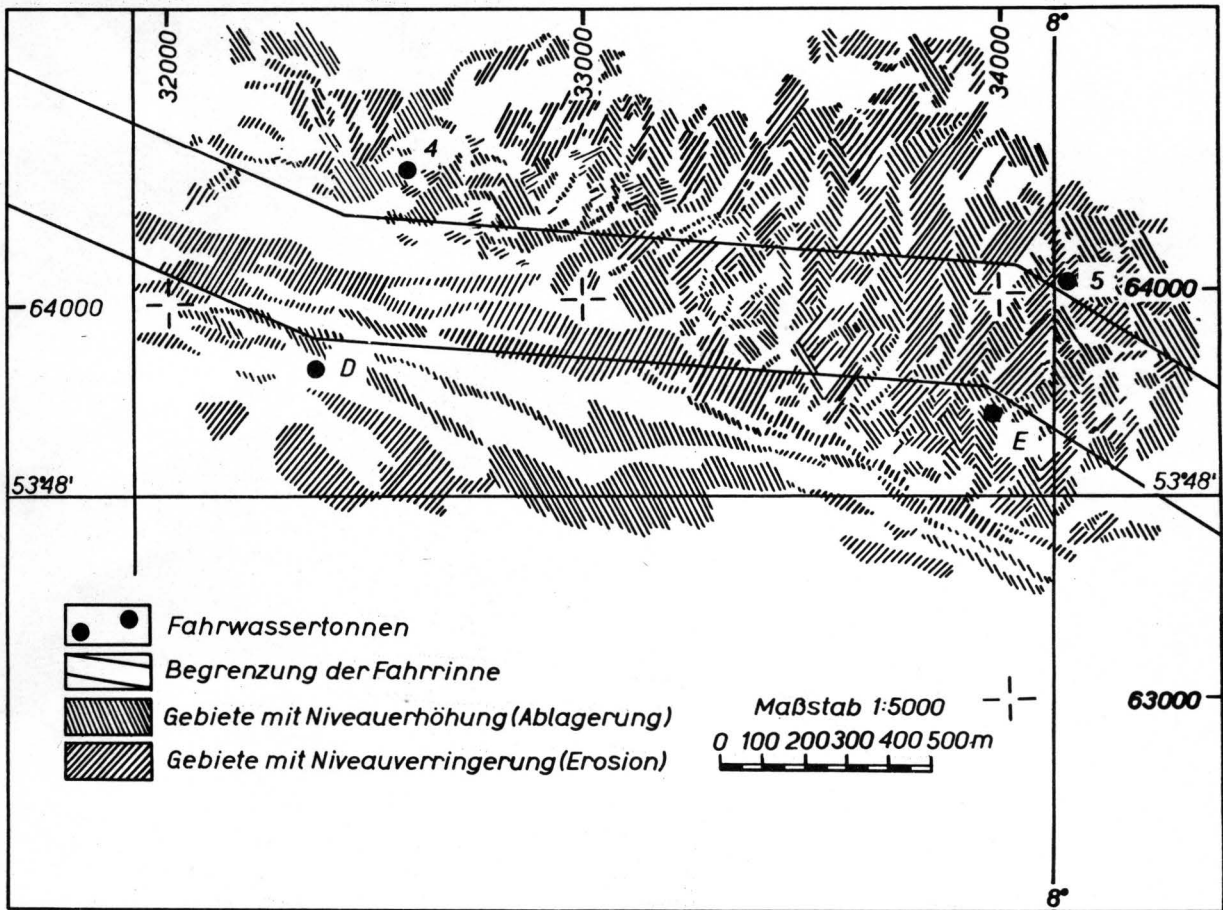


Abb. 8 Tiefenänderungen vom 20./26.3. bis 19.9.1962

Im Verlaufe des halben Jahres vom 20.3. bis 19.9.1962 herrschte im Vergleich zur Sturmperiode relativ ruhiges Wetter. Die Tiefenänderungen während dieses wettermäßig ruhigen, an die Sturmperiode anschließenden Halbjahres sind in Abb. 8 dargestellt. Streifenförmige Bereiche von Erosion und Ablagerung alternieren wieder und bezeugen, daß die Tidestrombänke sich weiter nach WNW verlagert haben.

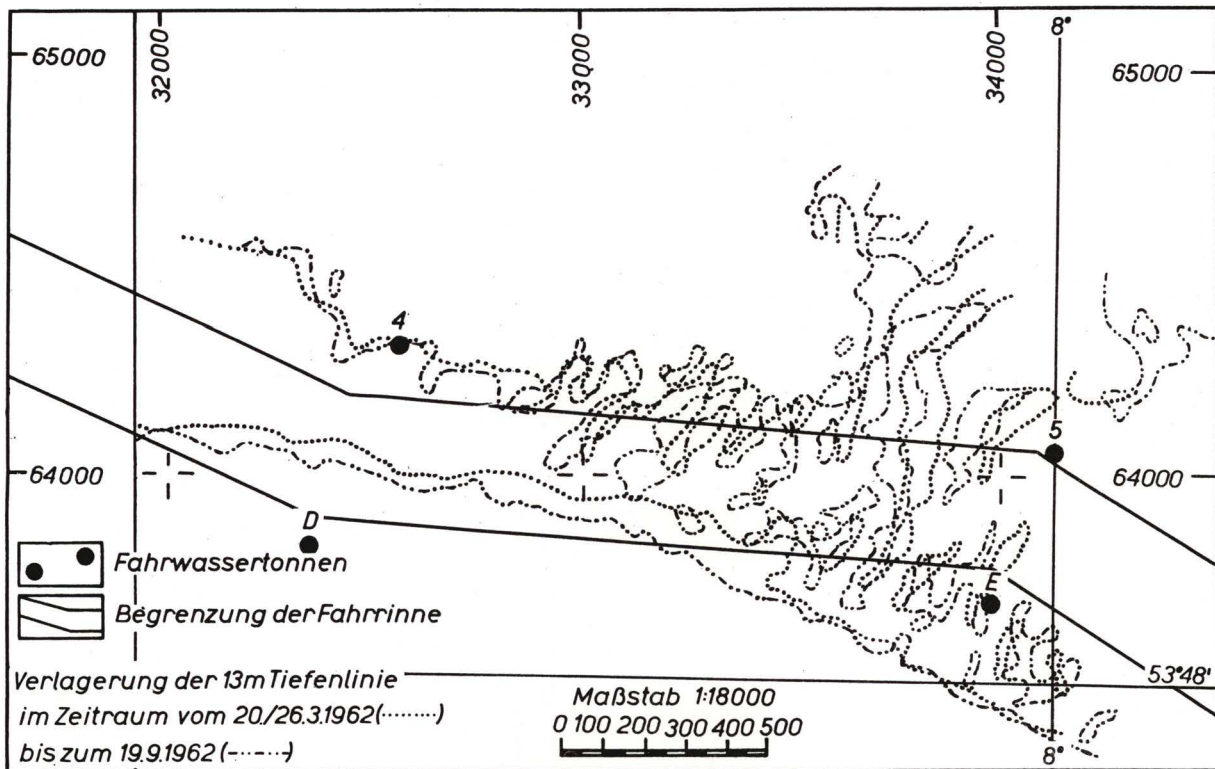


Abb. 9 Verlagerung der 13 m-Tiefenlinie vom 20./26.3. bis 19.9.1962

Die Abb. 9 veranschaulicht die Verlagerung der 13 m-Tiefenlinie während der halbjährigen Periode. Die punktierte Linie gibt die Lage der 13 m-Tiefenlinie am Ende der Sturmperiode an, während die strichpunktierte Linie die Lage der 13 m-Tiefenlinie am Ende der darauf folgenden halbjährigen Ruheperiode angibt.

Der Vergleich beider Linien weist die bereits in Abb. 8 angedeutete WNW-Verlagerung der Strombänke nach. Im westlichen und südlichen Teil des Strombankfeldes sind die Verlagerungsbeträge durchweg relativ klein, im Osten werden größere Beträge erreicht. Deutlich tritt dieses bei der größten durchgehenden Strombank hervor; Im Süden sind relativ kleine Verlagerungen, im Norden größere Verlagerungen festzustellen. Die durchschnittliche Verlagerung ist in der halbjährigen Ruheperiode nicht größer als in der Sturmperiode. Da die Ruheperiode dreimal länger dauerte als die Sturmperiode, war die auf gleiche Zeiten bezogene durchschnittliche Verlagerung während der Sturmperiode wesentlich größer als in der Ruheperiode.

Bemerkenswert ist weiter, daß die 13 m-Tiefenlinien der Strombänke sich während der Ruheperiode nach Süden gegen den Südrand der Rinne hin ausdehnen. Dies entspricht einem

Weiterbau der Strombänke nach Süden hin. Dabei werden auch in der Umgebung von Tonne 4 Ansätze zu Strombänken neu gebildet. An der Südböschung der Rinne weicht die 13 m-Tiefenlinie im genannten Zeitraum nach Süden zurück.

Dieser Südwärtsverlagerung der 13 m-Tiefenlinien während der Ruheperiode steht die Nordwärtsverlagerung der 13 m-Tiefenlinien während der Sturmperiode gegenüber.

Während die Strombänke in der Sturmperiode abgeflacht und abgebaut werden, sind in der Ruheperiode Strombankneubildungen und eine Regeneration der Strombankhöhen erkennbar.

Im Verlauf der Sturmperiode herrscht an der Südböschung der Rinne Ablagerung vor, wogegen während der Ruheperiode Erosionsvorgänge überwiegen.

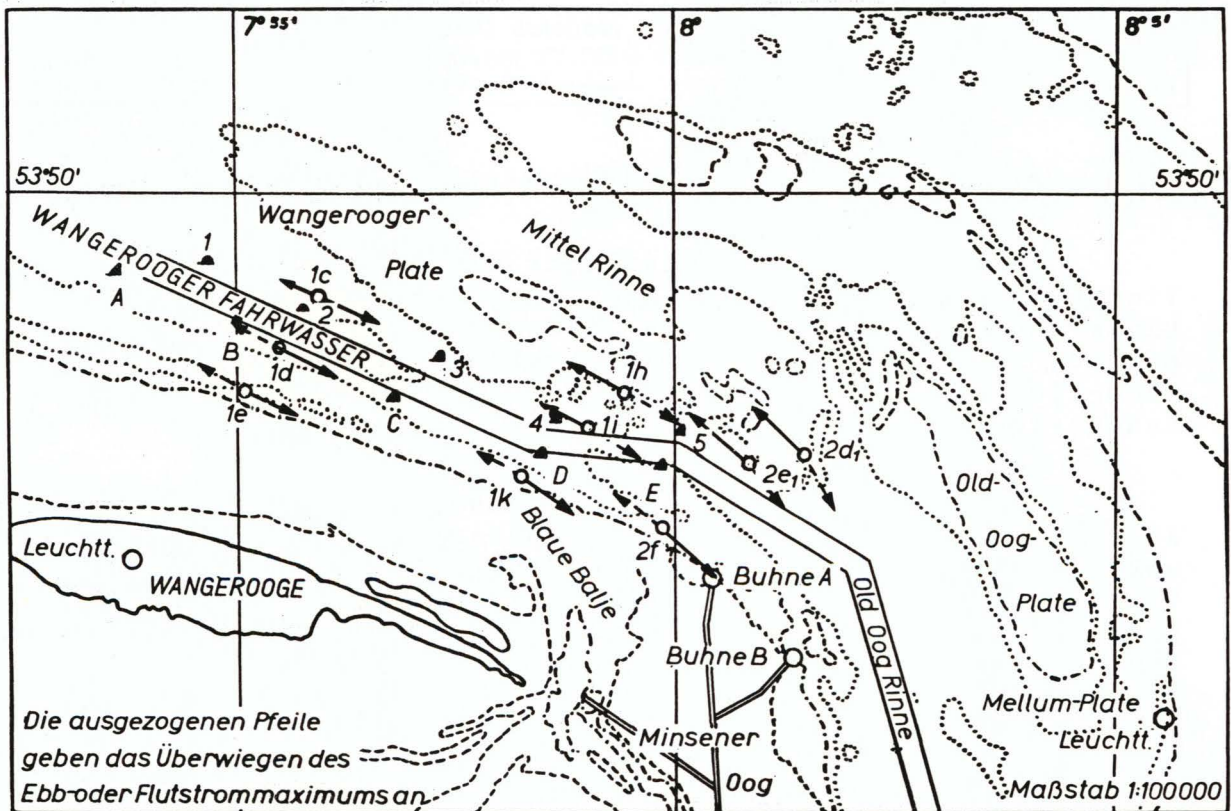


Abb. 10 Übersichtskarte für die Strömungsmessungen

2. Die marine Dynamik

Im folgenden sollen zunächst die Strömungsverhältnisse im Untersuchungsgebiet umrissen werden. Die Abb. 10 zeigt Strömungsmessungen mit dem Schaufelrad-Strommesser aus dem Bereich des Wangerooger Fahrwassers von 1957, die für die 1962 herrschenden Verhältnisse noch repräsentativ sein dürften. Dabei sind die maximalen Strömungswerte nach Geschwindigkeitsbeträgen und -richtungen als Vektoren aufgetragen. Die Pfeile sind in Richtung des überwiegenden Flut- oder Ebbstrommaximums ausgezogen. Im Bereich des eingehend beschriebenen Strombankfeldes, das sich in Richtung des Ebbstromes verlagert, überwiegen die Ebbstrommaxima.

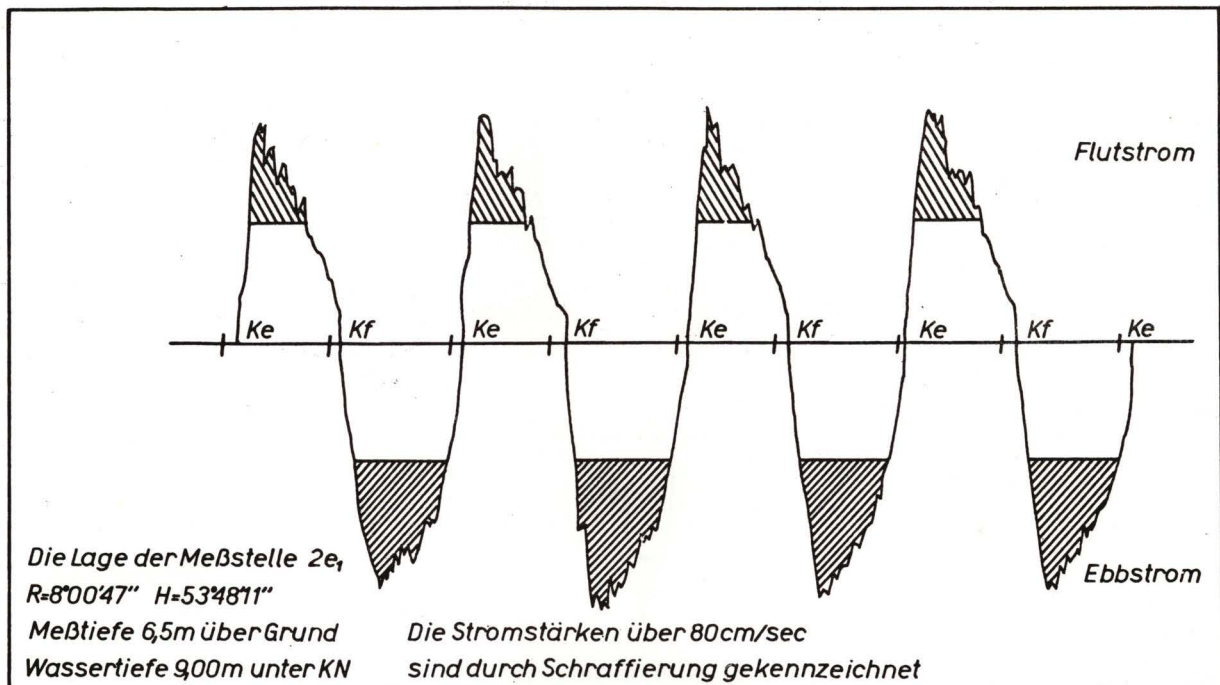


Abb. 11 Strömungsmessung bei Meßstelle 2 e₁

Abb. 11 zeigt die Strömungsmessung 2e₁ östlich des Strombankfeldes. Die Ebbstromgeschwindigkeiten über 80 cm/s (eng schraffiert) überwiegen erheblich die Flutstromgeschwindigkeiten über 80 cm/s (weit schraffiert). Die Geschwindigkeitsgrenze 80 cm/s hat nach den Untersuchungen von Dillo [1] in der Modellrinne des Franzius-Instituts erhebliche Bedeutung als Untergrenze der Bildung von Bänken. Aus diesen Bänken^{x)} bauen sich nach Reineck [3] die Tidestrombänke^{x)} auf.

x) Reineck bezeichnet diese Bänke als "Großrippeln" und die Tidestrombänke als "Riesenrippeln".

Aus Abb. 10 ist ersichtlich, daß im nördlichen Bereich des Untersuchungsgebietes der Ebbstrom die größten Geschwindigkeitswerte aufweist (1i, 1h, 2e₁, 2d₁), wogegen im südlichen Teil die Flutstromgeschwindigkeiten (1k, 2f) überwiegen (vergl. Abb. 12).

Die Grenzlinie, welche diese Gebiete maximaler Stromgeschwindigkeiten trennt, dürfte sehr wahrscheinlich mit der morphologischen Trennlinie der Abb. 2 identisch sein.

Im westlichen Teil des Wangerooger Fahrwassers lassen die Strommessungen (1e, 1d, 1c) ein Überwiegen des Flutstrommaximums erkennen.

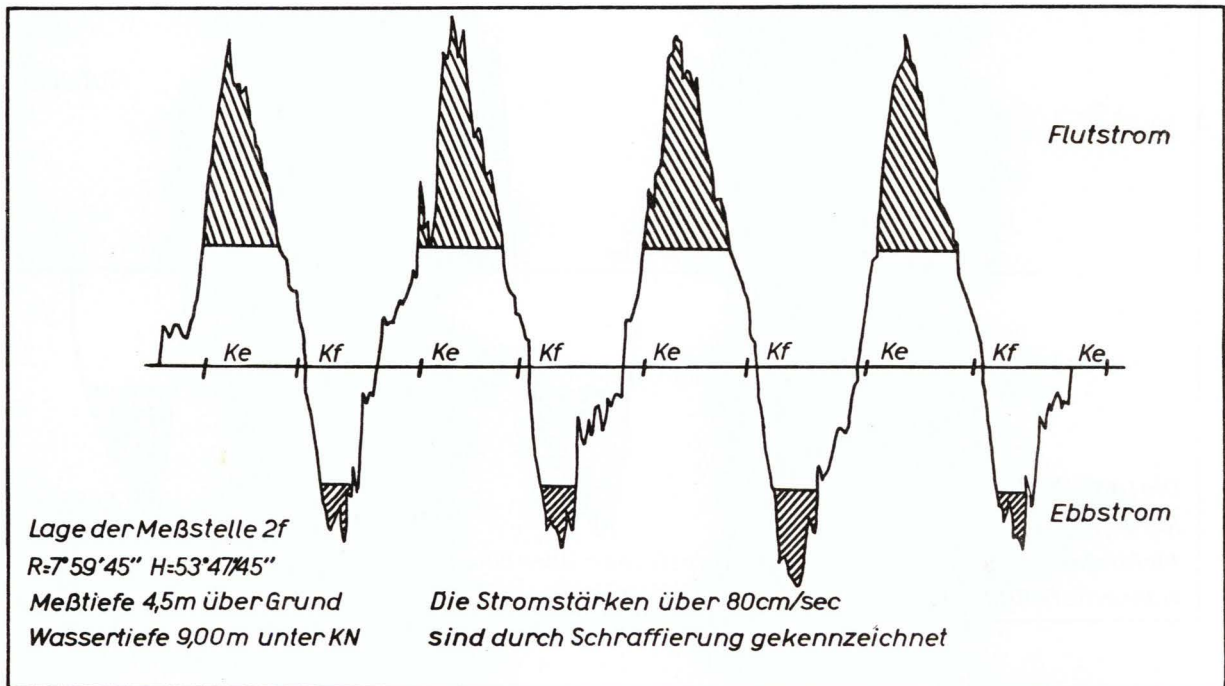


Abb. 12 Strömungsmessung bei Meßstelle 2 f

Die Abb. 13 gibt die Verlagerung der 12 m-Tiefenlinie im Westteil des Wangerooger Fahrwassers während der Sturmperiode an. Daraus ist ersichtlich, daß sich im flachsten Bereich der Rinne, südlich Tonne 2, der relativ tiefste Rinnenteil unter gleichzeitiger Niveauerhöhung (Ablagerung) nach Norden verlagert. Wie die Auswertung ergab, verlagern sich

die Strombänke östlich des flachen Bereiches in Flutstromrichtung (vergl. Abb. 10 - die überwiegenden Stromrichtungen). Die Flutstrombänke erfahren dabei eine Erniedrigung, so daß nach der Sturmperiode keine Strombankhöhen über 12 m Wassertiefe mehr vorhanden sind (Abb. 4).

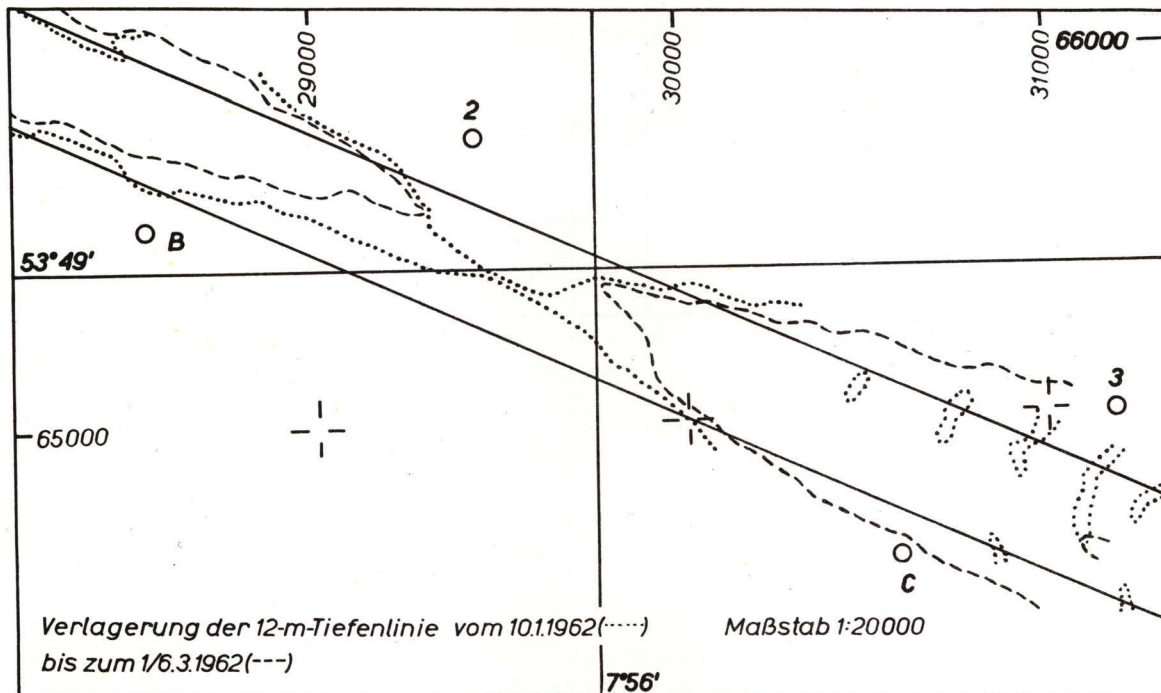


Abb. 13 Verlagerung der 12 m-Tiefenlinie vom 20.1. bis 1./6.3.1962

Im folgenden soll der Einfluß der Windwellen auf das Bodenrelief der Tidestromrinne behandelt werden; Abb. 14 zeigt das Energiespektrum des Seeganges, der am 16.12.1962 bei WNW-Sturm mit Beaufort 8 von der freien Nordsee durch das Untersuchungsgebiet bis zum Mellum-Leuchtturm gelangte und dort gemessen wurde. Das Energiespektrum wurde durch Spektralanalyse auf Autokorrelationsbasis nach W.J. Pierson jr. und W. Marks [2] elektronisch errechnet. Das Maximum der Energie (Intensitätsdichte) liegt bei einer Periode von 6,7 s. Nach der Näherungsformel für die Wellenlänge L

$$L = 1,56 T^2$$

ist dem Maximum der Wellenenergie eine Wellenlänge von 70 m zuzuordnen. Da nun schon von einer Wassertiefe von $\frac{L}{2} = 35$ m ab merklich Wellenenergie an den Meeresboden abgegeben wird, muß bei Sturm mit einer erheblichen Energieabgabe des Seeganges an den 10 - 20 m tiefen Meeresboden im gesamten untersuchten Bereich der Tidestromrinne gerechnet werden.

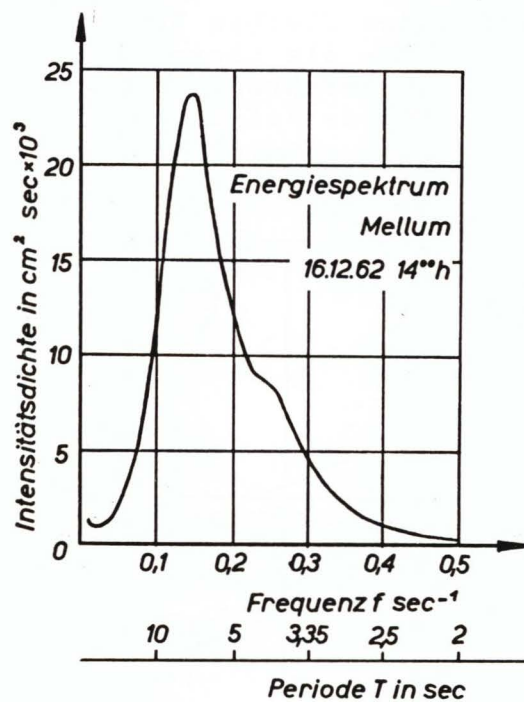


Abb. 14 Energiespektrum des Seeganges am 16.12.1962

Die maximale horizontale Teilchengeschwindigkeit der Wellen in der Tiefe z wird angenähert durch die Formel wiedergegeben

$$U_{z \max} = \frac{\pi \cdot H}{T} \cdot \frac{\cosh 2\pi \cdot \left(\frac{h-z}{L}\right)}{\sinh 2\pi \cdot \left(\frac{h}{L}\right)}$$

wovon H = Wellenhöhe h = Wassertiefe
 T = Periode z = Teilchentiefe
 L = Wellenlänge

Dieser wellenbedingten horizontalen Teilchengeschwindigkeit überlagert sich der jeweilige Tidestrom. Die jeweiligen resultierenden Geschwindigkeiten haben entscheidende Bedeutung für die Ausbildung der Bodenturbulenz und des turbulenten Austausches, die für den Sandtransport maßgebend sind.

Da das Bodenniveau nur dann gleichbleibt, wenn der Sandverlust der Sohle durch Aufwirbelung im Gleichgewicht mit der Sandzunahme durch Absinken der Sandkörner steht, kann gefolgert werden, daß neben der starken Erhöhung der Bodenturbulenz und des turbulenten Austausches bei Sturm auch die Konzentration des Wassers an Sand maßgebend dafür ist, in

welcher Richtung das Gleichgewicht verschoben wird. Da der Flutstrom bei Sturm über die flachen Außensände in die Tidestromrinne überströmt und der Sandgehalt des Wassers über den flachen Sänden bei Sturm Extremwerte erreicht, dürfte der Flutstrom an der Rinnenböschung eine wesentlich höhere Sandkonzentration besitzen als die Tideströme im tieferen Wasser, insbesondere der aus der Jade kommende Ebbstrom.

Demzufolge findet bei Sturm an den Rinnenböschungen mit überwiegendem Flutstrom Ablagerung statt, während die tieferen Rinnenbereiche erodiert werden.

3. Geomorphologische Schlußfolgerungen

Die Abflachung der Flut- und Ebbstrombänke während der Sturmperiode kann in Analogie zur Einebnung der Strandriffe [3] bei Sturm gebracht werden. Während jedoch die Strandriffe durch die Orbitalgeschwindigkeiten und die Turbulenz der Sturmwellen weitgehend eingeebnet werden, werden die in wesentlich tieferem Wasser liegenden Tidestrombänke lediglich in charakteristischer Form "abgeschliffen", wie aus Abb. 3 erkennbar ist.

Sowohl die Abflachung der Strombänke als auch die Verlagerung der Tidestromrinne sind reversibel. In der auf die Sturmperiode folgenden Ruheperiode erfolgt sowohl ein erneuter Aufbau der Strombänke als auch eine Rückverlagerung der Stromrinnenböschung nach Süden zum ursprünglichen Verlauf hin.

Dies kann am ehesten so verstanden werden, daß sich die gesamte Morphologie der Tidestromrinne unter normalen Wetterbedingungen im Gleichgewicht befindet mit den hydrodynamischen Verhältnissen. Die besonderen Verhältnisse während einer schweren Sturmperiode bewirken eine Verschiebung dieses Gleichgewichtes, die allerdings ausgeprägt reversibel ist.

Das "Zurückschwingen" der Tidestromrinne in ihre alte Lage verleiht ihr gewissermaßen eine dynamische Lagestabilität, welche für diese unmittelbar nördlich Minsener Oog und Wangerooge gelegene Tidestromrinne (Abb. 15) charakteristisch sein dürfte.

Die nördlich dieser Rinne gelegenen Rinnen der Außenjade (vergl. Abb. 15) dürften diese dynamische Lagestabilität nicht oder nicht in diesem Maße besitzen. Für sie ist eine fortlaufende Verlagerung der Rinnenmorphologie nach NE charakteristisch [3], wobei die Verlagerungszeit einer Rinne bis zum Erreichen der nächsten Position 60 - 100 Jahre beträgt.

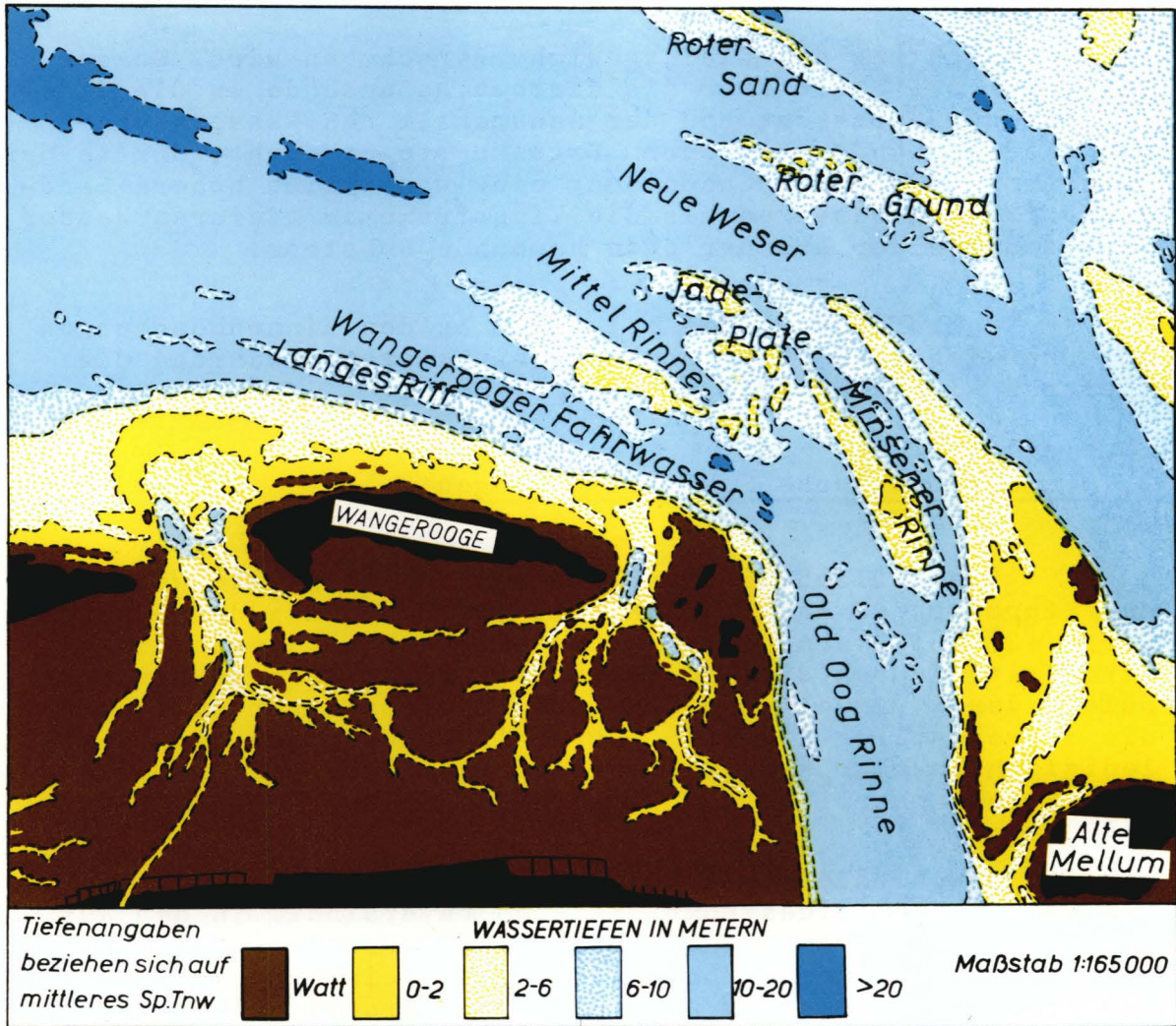


Abb. 15 Übersichtskarte des Gesamtgebietes der Außenjade

Die dynamische Lagestabilität der Tidestromrinne des Wangerooger Fahrwassers dürfte entscheidend darauf zurückzuführen sein, daß der Flutstrom am Südrand der Rinne unter ruhigen Wetterverhältnissen bei hohen Geschwindigkeiten und entsprechend großer Turbulenz eine relativ geringe Sandkonzentration besitzt. Er wirkt daher erodierend und räumend. Die dadurch verursachte Verlagerung der Südrandböschung nach Süden erlaubt es auch dem Ebbstrom, wieder einen südlicheren Verlauf einzunehmen.

Die genannten hohen Flutstromgeschwindigkeiten am Südrand der Rinne dürften wesentlich unter dem Einfluß der Corioliskraft ausgebildet werden. Ihre Aufrechterhaltung wird durch wasserbauliche Maßnahmen wirksam unterstützt. Dazu gehören Bühnenbauten bei Minsener Oog (Abb. 1) und Baggerungen mit Großraumbaggern, vor allem im Westteil des Fahrwassers.

Die untersuchte Tidestromrinne bietet ein Beispiel dafür, wie natürliche großräumige morphologisch-hydrodynamische Verhältnisse durch technische Eingriffe beeinflußt und stabilisiert werden können.

Im folgenden möge noch die *U r s a c h e* der geomorphologischen Veränderungen, die Sandwanderung, im *G e - s a m t g e b i e t* der Außenjade umrissen werden.

4. Die Sandwanderung

An der Verlagerung der Bodenformen der Tidestromrinnen und der Rinnenböschungen nimmt nur ein kleiner, und zwar der größte Teil des im Rinnenquerschnitt wandernden Sandes teil. Der überwiegende Teil des Sandes wandert einschl. der Schwebstoffe in Suspension und gelangt allgemein in Gebieten niedrigerer Strömungsgeschwindigkeiten zur Ablagerung.

Die Abb. 15 gibt einen Überblick über das von Rinnen und Platen geformte Gesamtgebiet der Außenjade. Die Platen heben sich hellgelb bis lichtblau zwischen den blauen Rinnen hervor. Dabei wird anschaulich, daß der von der freien Nordsee in die Jade einströmende Flutstrom, zunächst ESE gerichtet, trichterförmige Rinnen benutzt. Demgegenüber verläuft der aus der Jade zur freien Nordsee fließende Ebbstrom zunächst in WNW-Richtung. Beide Richtungen werden durch die geomorphologischen Formen eindrucksvoll hervorgehoben.

Die Old-Oog-Plate und der WNW-Sporn der Mellumplate (hellgelb) verlaufen parallel zum WNW-gerichteten Ebbstrom, wogegen die Wangerooger-Plate, Strander-Plate und die Jade-Plate den gleichen Verlauf haben wie der anfänglich ESE-gerichtete Flutstrom. Zwischen beiden Richtungen ist eine deutliche Winkeldiskordanz vorhanden. Die Auswirkungen dieser Winkeldiskordanz können schematisch wie folgt beschrieben werden. Der vom Flutstrom aus WNW-Richtung herantransportierte Sand wird vom Ebbstrom aufgenommen und in WNW-Richtung zurücktransportiert. Wie Abb. 16 schematisch zeigt, ergibt sich dabei ein resultierender Sandweg nach NE. Entsprechende Vorgänge dürften sich im Rinnen- und Platengebiet der Außenjade generell und ständig abspielen. Die Corioliskraft modifiziert diese Abläufe insofern, als sie die Ausbildung höherer Flutstromgeschwindigkeiten an den südwestlichen Seiten der Rinnen und erhöhte Ebbstromgeschwindigkeiten an den gegenüberliegenden NE-Seiten der Rinnen bewirkt.

Im größeren Zusammenhang gesehen, wird der mit der tidebedingten West-Ost-Drift vor der Ostfriesischen Inselkette [4] nach E wandernde Sand im Gebiet der Außenjade nach NE transportiert und gelangt von hier aus in den inneren Winkel der Deutschen Bucht [4] zwischen Weser, Elbe- und Eidermündung.

In diesem Gebiet baut der Sand das gesamte submarine Küstenrelief auf.

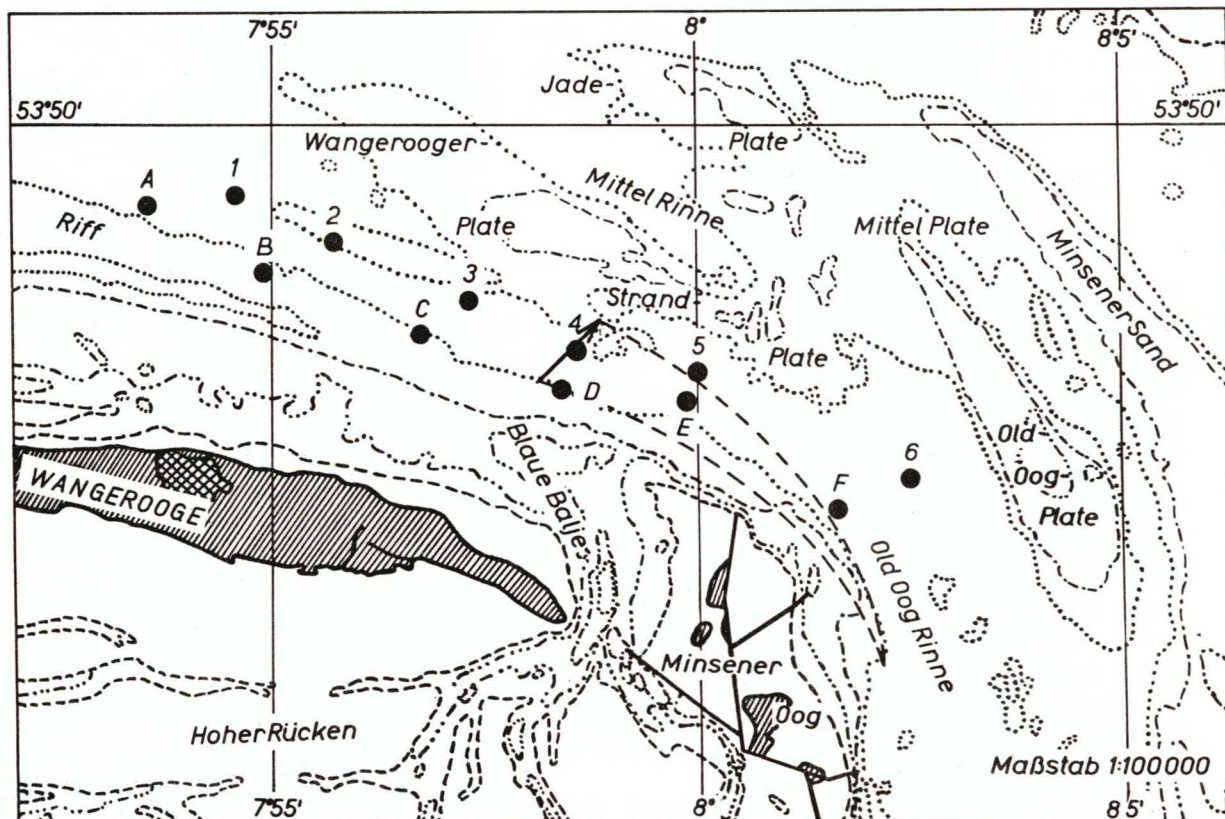


Abb. 16 Resultierender Weg des Sandes

5. Schrifttum

- | | | | |
|-----|-------------------------------|---|--|
| [1] | Dillo, H.G. | : | Sandwanderung in Tideflüssen, Mitteilungen der Hannoverschen Versuchsanst. für Grundbau und Wasserbau, Franzius-Institut der T H Hannover, Heft 17, 1960 |
| [2] | Pierson jr. W.J. u. Marks, W. | : | Power Spectrum Analysis of Ocean Wave Records, Tr. Am. Geoph. U. N., 33, 6, 1952 |
| [3] | Reineck, H.E. | : | Sedimentgefüge im Bereich der südlichen Nordsee, Abh. d. Senkenb. naturf. Ges. 505, S. 1-138, 1963 |
| [4] | Völpel, F. | : | Studie über das Verhalten weitwandernder Flachseesande in der südlichen Nordsee, Deutsche Hydrographische Zeitschrift Bd. 12, Heft 2, S. 64-76, 1959 |

Ernst Schnoor

Über neue Verfahren zur Berechnung des
Reflexionsdruckes von Wasserwellen auf
senkrechte Wände

(Systematischer Aufbau und Erweiterung
der Theorie; Herleitung allgemeiner Wellen-
druckgleichungen zur Berechnung der
Druckwerte für beliebige Wellenphasen)

G l i e d e r u n g

1. Einleitung

2. Aufgabenstellung

3. Durchführung

- 3.1 Berechnung des v -Potentials für Tiefwasser
- 3.2 Berechnung des v -Potentials für Flachwasser
- 3.3 Berechnung einer Formel für den Wellendruck im Tiefwasser
- 3.4 Diskussion der Wellendruckformel für Tiefwasser
- 3.5 Wellendruckformel für Flachwasser
- 3.6 Wellendrucke am unteren Rand der reflektierenden Wand
 - 3.6.1 Wellendrucke an der Sohle im Tiefwasser
 - 3.6.2 Wellendrucke an der Sohle im Flachwasser
- 3.7 Resultierende Schubkraft in Abhängigkeit von der Wellenphase (Erweiterung der Theorie NAGAI's)
- 3.8 Diskussion der für Flachwasser hergeleiteten Wellendruckformeln
- 3.9 Wellendruckformeln auf der Grundlage der elliptisch-trochoidalen Wellentheorie
 - 3.9.1 Einleitung
 - 3.9.2 Mathematische Formulierung des Bewegungsfeldes...
 - 3.9.3 Die Bewegungsgleichung 1. Art von LAGRANGE
 - 3.9.4 Auswertung der Bewegungsgleichungen von LAGRANGE
 - 3.9.5 Berechnung des Wellendruckes für die Scheitellage der stehenden Welle
 - 3.9.6 Wellendruck am Fuße der Wand bei Scheitellage der Welle (Verbesserung der Formel von SAINFLOU)
- 3.10 Verallgemeinerungen und Ergänzungen zur Theorie NAGAI's: Berechnung der Wellendruckwerte für beliebige Wellenphasen auf der Grundlage der elliptisch-trochoidalen Wellentheorie (allgemeine Wellendruckformeln)
- 3.11 Anwendung der hergeleiteten Berechnungsformeln auf das neue Eidersperrwerk als Berechnungsbeispiel
 - 3.11.1 Druckwerte am unteren Rande des Eidersperrwerks
 - 3.11.2 Maximale Druckwerte
 - 3.11.3 Berechnung des gesamten horizontalen Schubes
 - 3.11.4 Kontrolle der Ergebnisse vermittelt der elliptisch-trochoidalen Theorie

4. Schrifttum

Abkürzungsverzeichnis

Zeichen	B e d e u t u n g	Dimension
d	Wassertiefe unter Ruhewasserspiegel	m
H	Wellenhöhe	m
a	Amplitude ($a = \frac{1}{2} H$)	m
L	Wellenlänge	m
$\frac{d}{L}$	relative Tiefe	1
$\frac{2d}{L}$	"Schwingungsraum" der Welle	1
$\frac{H}{L}$	Wellensteilheit	1
x	Koordinate auf der horizontalen Achse (im Ruhewasserspiegel)	m
z	Koordinate auf der vertikalen Achse (in Abschnitt 3.1 bis 3.8 pos.z-Achse aufwärts und in Abschn. 3.9 und 3.10 pos. z-Achse abwärts gerichtet)	m
v	Strömungsgeschwindigkeit	m · s ⁻¹
v _x	x-Komponente von v	m · s ⁻¹
v _z	z-Komponente von v	m · s ⁻¹
φ	"Geschwindigkeitspotential"	m ² · s ⁻¹
$\frac{\partial \phi}{\partial x}$	partieller Differentialquotient	m · s ⁻¹
dφ	$= \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz$ (totales Differential von φ)	m ² · s ⁻¹
$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$	partieller Differentialquotient 2.O.	s ⁻¹
Δφ	$= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$	s ⁻¹
φ ₁ , φ ₂ φ ₃ , φ ₄	Potentialfunktionen = Lösungen der Differentialgleichung Δφ = 0	m ² · s ⁻¹
t	Zeit	s
g	Erdbeschleunigung	m · s ⁻²
ρ	Dichte des Wassers	Mp · m ⁻⁴ · s ²
γ	spez. Gewicht = ρ · g (Wichte)	Mp · m ⁻³
T	Wellenperiode	s
Mp	Megapond (Krafteinheit)	10 ⁶ · p

Zeichen	B e d e u t u n g	Dimension
π	natürliche Zahl (=3,14...)	1
η	Entfernung eines Wasserteilchens der Wasseroberfläche vom Ruhewasserspiegel (vertikal gemessen)	m
m	$= \frac{2\pi}{L}$	m^{-1}
n	$= \frac{2\pi}{T}$	s^{-1}
(nt)	$= (\frac{2\pi}{T} \cdot t)$ Phasenwinkel	1
c	Fortpflanzungsgeschwindigkeit	$m \cdot s^{-1}$
r, r'	horizontale und vertikale Halbachse einer Bahnellipse	m
x_0, z_0	Koordinaten der Mittelpunkte der Bahnellipsen und der "Anfangslagen" der Wasserteilchen	m
e	natürliche Zahl = 2,718...	1
$\sinh(x)$	hyperbolischer Sinus von x $= \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	1
$\cosh(x)$	hyperbolischer Cosinus von x $= \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	1
$\tanh(x)$	hyperbolischer Tangens von x $= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	1
$\coth(x)$	hyperbolischer Cotangens von x $= \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$	1
ξ	$= (x - x_0)$	
ζ	$= (z - z_0)$	
α	$= m (d - z_0) = \frac{2\pi}{L} (d - z_0)$	1
X	x-Komponente der äußeren Kraft	
Z	z-Komponente der äußeren Kraft	

1. Einleitung

Alle bisher gebräuchlichen Verfahren zur Berechnung des bei der Reflexion von Wasserwellen erzeugten Druckes gehen von der als selbstverständlich angenommenen Tatsache aus, daß an der reflektierenden Wand in allen Tiefen das Maximum des Druckes im Augenblick der Scheitellage der stehenden Welle auftritt.

NAGAI [1] hat dagegen bei Modellversuchen und Naturmessungen festgestellt, daß im unteren Bereiche der reflektierenden Wand meistens zwei Druckmaxima während einer Periode der stehenden Welle auftreten und daß die zugehörigen Wellenphasen symmetrisch zur Phase des Scheitels der stehenden Welle liegen.

NAGAI hat zwei Berechnungsverfahren entwickelt, eines auf der Grundlage der v-Potential-Theorie und das andere auf der Grundlage der elliptisch-trochoidalen Wellentheorie, die es (nach gewissen Ergänzungen und Verallgemeinerungen) gestattet, die Größe der Druckmaxima und die zugehörigen Wellenphasen zu berechnen. Trotz ihrer sehr unterschiedlichen theoretischen Grundlagen liefern die beiden Berechnungsverfahren Ergebnisse von überraschend guter Übereinstimmung, wie an dem Berechnungsbeispiel des neuen Eidersperrwerkes am Schluß dieses Berichtes gezeigt wird.

Die bei dem Verfahren von SAINFLOU gemachten (unzulässigen) Vereinfachungen und Vernachlässigungen, die fast alle auch bei dem Verfahren von IRIBARREN gemacht werden, können vermittels der neuen Verfahren nachgewiesen und quantitativ angegeben werden.

Aus den beiden unterschiedlichen Theorien folgt übereinstimmend, daß in der Nähe der reflektierenden Wand die schwingende Druckwelle im wesentlichen durch Überlagerung zweier Druckwellenkomponenten entsteht, von denen die eine mit der Periode T der stehenden Welle und die andere mit der Periode $\frac{T}{2}$ schwingt. Meistens überwiegt in den unteren Bereichen der reflektierenden Wand die Druckwellenkomponente mit der Periode $\frac{T}{2}$ so stark, daß die durch Überlagerung der beiden Wellenkomponenten entstehende resultierende Druckwelle dort zwei Maxima während einer Periode T der stehenden Welle aufweist.

In Abb. 1 wird eine von NAGAI berechnete Graphik wiedergegeben. Aus dieser geht hervor, daß der Sonderfall, bei dem auch im unteren Bereiche der reflektierenden Wand während der Periode T der stehenden Welle nur ein Druckmaximum in der Phase des Wellenscheitels auftritt, nur dann vorliegt, wenn der Punkt mit den Koordinaten d/L und H/L in

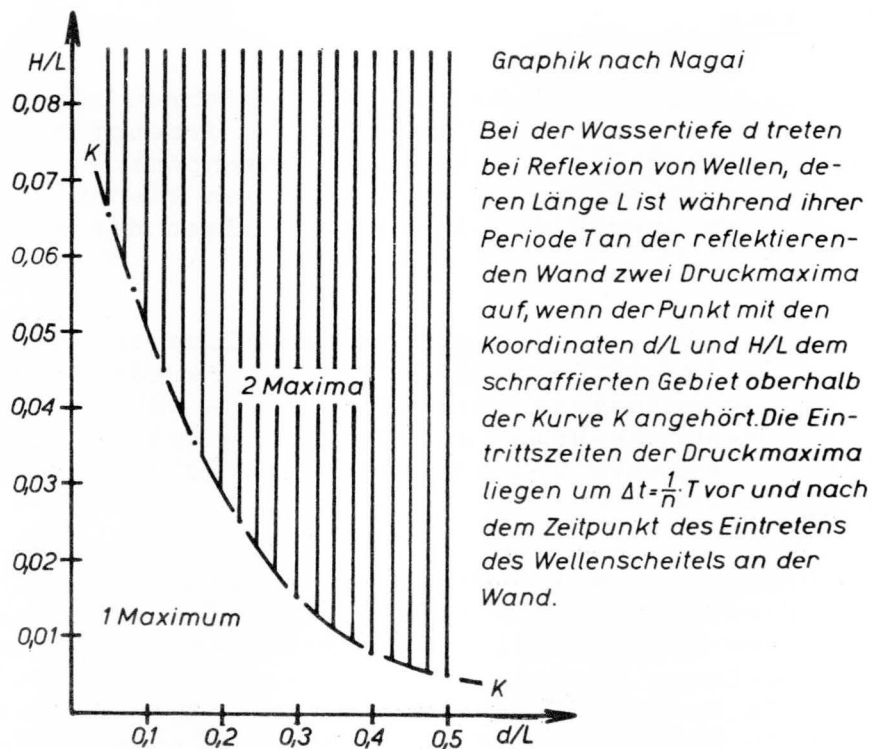


Abb. 1 Druckmaxima bei der Wellenreflexion

dem relativ kleinen nicht schraffierten Gebiet unterhalb der Kurve K in Abb. 1 liegt.

2. Aufgabenstellung

In seinem Beitrag zum XXI. Internationalen Schiffahrtkongreß hat NAGAI [1] über die beiden neuen Berechnungsverfahren berichtet. Da er in seinem kurzen Bericht im wesentlichen nur die von ihm hergeleiteten neuen Formeln *) zitiert, sollen hier die theoretischen Grundlagen erläutert und auch die Ableitungen der Formeln durchgeführt werden.

Ferner soll die Theorie weitergeführt und NAGAI's Formeln so durch zusätzliche allgemeinere Gleichungen ergänzt werden, daß die Maximalwerte des Reflexionsdruckes und die zugehörigen Wellenphasen und die Druckwerte für alle anderen Wellenphasen nach beiden Berechnungsverfahren ermittelt werden können.

Als Anwendungsbeispiel für die neuen Berechnungsverfahren sollen zum Schluß die Druckmaxima und die zugehörigen Wellenphasen für die am geplanten Eidersperrwerk reflektierte Welle von der Höhe $H = 2,70$ m nach beiden Berechnungsverfahren ermittelt werden.

*) Die in NAGAI's Bericht mitgeteilten Gleichungen enthalten eine Anzahl von groben Druckfehlern und sind erst nach Korrektur dieser Fehler verwendbar.

Ein Vergleich der entsprechenden Ergebnisse, die vermittels der beiden auf sehr unterschiedlichen theoretischen Grundlagen basierenden Verfahren gewonnen sind, dürfte sehr aufschlußreich sein für die Beurteilung der Zuverlässigkeit dieser neuen Berechnungsverfahren, die auf jeden Fall einen wesentlichen Fortschritt bedeuten.

3. Durchführung

3.1 Berechnung des Geschwindigkeitspotentials für Tiefwasser

Es wird ein Koordinatensystem mit seiner x-Achse normal zur reflektierenden Wand gelegt, dessen positive z-Achse vertikal nach oben zeigt. Die x-Achse liegt außerdem im Ruhewasserspiegel. Da sich an der reflektierenden Wand ein Schwingungsbauch ausbildet, ist dort nach Gleichung (1) (s.u.) $x = \frac{L}{4}$ anzunehmen, wodurch auch der Nullpunkt des Koordinatensystems festgelegt ist.

Die von NAGAI benutzten Grundlagen der theoretischen Physik kommen hier in der von ihm gemachten Annahme zum Ausdruck, daß die mit der stehenden Welle

$$(1) \quad \eta = 2a \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{L} x\right)^{x)}$$

verbundene Strömung der Wasserteilchen ein "Geschwindigkeitspotential" besitzt, also eine wirbelfreie "Potentialströmung" ist. In der theoretischen Physik wird gezeigt, daß diese Annahme für Wasserwellen zulässig ist, solange die Amplitude a der Schwingung der Wasseroberfläche, also die Wellenhöhe $H = 2a$ "hinreichend klein" bleibt. Auf sehr hohe Wellen ist diese Theorie deshalb nicht anwendbar.

Die "zweidimensionale" Potentialtheorie befaßt sich mit der "Potentialgleichung" d.h. mit der partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0,$$

*) Ableitung von Gleichung (1): $m = \frac{2\pi}{L}$; $n = \frac{2\pi}{T}$

Anlaufende Welle : $\eta_1 = a \cdot \sin(mx + nt)$

reflektierte Welle : $\eta_2 = a \cdot \sin(mx - nt)$

ausgerechnet : $\eta_1 = a[\cos(nt) \cdot \sin(mx) + \sin(nt) \cos(mx)]$

$\eta_2 = a[\cos(nt) \cdot \sin(mx) - \sin(nt) \cdot \cos(mx)]$

Stehende Welle: $\eta = \eta_1 + \eta_2 = 2a \cdot \cos(nt) \cdot \sin(mx)$

die üblicherweise in der Kurzform

$$(3) \quad \Delta\phi = 0$$

geschrieben wird, und mit den Lösungen dieser Differentialgleichung, den sogenannten "Potentialfunktionen". (Es läßt sich leicht zeigen, daß Realteil und Imaginärteil einer jeden komplexen analytischen Funktion Potentialfunktionen sind).

Ist nun $v(x, z, t)$ die Geschwindigkeit am Ort (x, z) z. Zt. t , so läßt sich die von NAGAI gemachte Voraussetzung der Existenz eines "Geschwindigkeitspotentials" mathematisch folgendermaßen formulieren: Es wird vorausgesetzt, daß eine Lösung $\phi(x, z, t)$ der Differentialgleichung (3) existiert, die den Bedingungen:

$$(4) \quad \frac{\partial\phi}{\partial x} = v_x; \quad \frac{\partial\phi}{\partial z} = v_z$$

genügt, wobei v_x die x-Komponente und v_z die z-Komponente von v bedeutet.^x Es soll nun zunächst v_z das von der stehenden Welle (1) erzeugte "Geschwindigkeitsfeld" mathematisch formuliert werden: Die Komponente v_x muß an der reflektierenden Wand, also für $x = \frac{L}{4}$ (s.o.), der Bedingung genügen: $v_x = 0$. Die Amplitude von v_z muß dort als Funktion von x ein Maximum haben. Ferner müssen v_x und v_z senkrecht zur Wand, d.h. in x-Richtung die Periode L haben. Sie können ferner bei nicht zu großer Amplitude als sinusförmig angenommen werden. Allen vorstehend angegebenen Bedingungen kann dadurch Genüge getan werden, daß v_x den Faktor $\cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right)$ und v_z den Faktor $\sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right)$ erhält, da an der Wand $x = \frac{L}{4}$ ist (s.o.).

An jeder Stelle (x, z) haben v_x und v_z die zeitliche Periode T , was auf den Faktor $\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ schließen läßt. (Wählt man den Faktor $\cos(nt)$, so bedeutet das nur eine Verschiebung des Nullpunktes der Zeit).

Die theoretische Physik lehrt, daß $v(x, z, t)$ im "Tiefwasser" d.h. für $d > \frac{L}{2}$ mit zunehmendem Abstand vom Ruhewasserspiegel (zum Boden hin) nach einem Exponentialgesetz abnehmen muß. Das ist in neuerer Zeit auch durch Messungen von H.A. EINSTEIN bestätigt worden. Dieser Tatsache kann durch Einführung des Faktors e^{mz} in v_x und v_z entsprochen werden, da z unterhalb des Ruhewasserspiegels negative Werte annimmt (s.o.), deren Beträge zum Boden hin anwachsen. v nimmt zum Boden hin um so langsamer ab, je größer L ist. Dem Amplitudenfaktor wird dementsprechend

die Form $e^{\frac{2\pi}{L} z}$ gegeben.

Für die durch Gleichung (1) dargestellte stehende Welle dürfte sich demnach das Geschwindigkeitsfeld in der Form:

$$(5) v_x = C \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \cdot e^{\frac{2\pi}{L} z} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{L} x\right)$$

$$(6) v_z = C \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \cdot e^{\frac{2\pi}{L} z} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{L} x\right)$$

darstellen lassen.

Zu dem durch (5) und (6) dargestellten Geschwindigkeitsfeld soll nun das zugehörige "Geschwindigkeitspotential" berechnet werden oder durch "heuristische" Überlegungen konstruiert werden; Es muß die Lösung der partiellen Differentialgleichung (3) aufgesucht werden, die den Bedingungen (4), (5) und (6) genügt.

Aus der Tatsache, daß die Beziehungen

$$\frac{\partial^2(\sin x)}{\partial x^2} = -\sin x \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2(e^z)}{\partial z^2} = +e^z$$

bestehen, folgt, daß die Funktion $\phi_1(x,z) = \sin x \cdot e^z$ eine Lösung der Potentialgleichung $\Delta\phi=0$ d.h. eine Potentialfunktion ist. Für $\phi_1(x,z)$ gilt nämlich:

$$\frac{\partial^2\phi_1}{\partial x^2} = -\sin x \cdot e^z \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2\phi_1}{\partial z^2} = +\sin x \cdot e^z,$$

mithin ist

$$\Delta\phi_1 = -\sin x \cdot e^z + \sin x \cdot e^z = 0.$$

Ferner ist auch $\phi_2(x,z) = \sin(mx) \cdot e^{mz}$ für beliebige Werte m eine Lösung von $\Delta\phi = 0$, denn es ist:

$$\Delta\phi_2 = -m^2 \cdot \sin(mx) \cdot e^{mz} + \sin(mx) \cdot m^2 \cdot e^{mz} = 0.$$

Da beim Differenzieren nach x und z der Ausdruck $\sin(nt)$ wie ein konstanter Faktor zu behandeln ist, ist auch $\phi_3(x,z,t)$

mit $\phi_3(x, z, t) = C' \cdot \sin(nt) \cdot e^{mz} \cdot \sin(mx)$ für beliebige Werte der Konstanten C' , m und n eine Lösung von $\Delta\phi = 0$.

Setzt man nun für m und n die Werte $\frac{2\pi}{L}$ bzw. $\frac{2\pi}{T}$ in die Lösung $\phi_3(x, z, t)$ ein, bekommt man eine speziellere Lösung von $\Delta\phi = 0$ in der Form:

$$(7) \phi_4(x, z, t) = C' \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \cdot e^{\frac{2\pi}{L} z} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{L} x\right).$$

Es ist leicht zu erkennen, daß die Potentialfunktion $\phi_4(x, z, t)$ den Bedingungen (4), (5) und (6) genügt, falls:

$$(8) C' \cdot \frac{2\pi}{L} = C \quad \text{ist.}$$

Nun müssen noch die Konstanten C und C' bestimmt werden. Das kann in folgender Weise geschehen: Da die Punkte der Wasseroberfläche einer stehenden Welle nach Gleichung (1) nur vertikale Bewegungen ausführen, gilt an der Wasseroberfläche nach Gleichung (1):

$$(9) v_z = \frac{\partial \eta}{\partial t} = -2a \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{L} x\right)$$

Zur Abkürzung soll im nachfolgenden Teil der Herleitung für $\frac{2\pi}{L}$ wieder m und für $\frac{2\pi}{T}$ wieder n geschrieben werden. Dann nimmt Gleichung (9) die einfachere Form an:

$$(10) v_z = \frac{\partial \eta}{\partial t} = -2an \sin(nt) \cdot \sin(mx).$$

Ferner gilt, wie oben gezeigt wurde, für $C' \cdot m = C$, da dann $\phi_4(x, z, t)$ den Bedingungen (4), (5) und (6) genügt, :

$$(11) v_z = \frac{\partial \phi_4}{\partial z} = C' \cdot m \cdot e^{mz} \cdot \sin(nt) \cdot \sin(mx)$$

Da sich die Ruhelage der Punkte der Wasseroberfläche im Ruhewasserspiegel befindet, gilt für sie: $z = 0$ und daher $e^{mz} = 1$. Für diese Wasserteilchen nimmt daher Gleichung (11) die einfachere Form an:

$$(12) v_z = C' \cdot m \cdot \sin(nt) \cdot \sin(mx).$$

Aus Gleichung (12) und der ebenfalls an der Wasseroberfläche geltenden Gleichung (10) folgt:

$$(13) \quad C' \cdot m = C = -2an ; \quad C' = \frac{-2an}{m}$$

Nach den Gleichungen (7) und (13) nimmt das berechnete "Geschwindigkeitspotential" d.h. die Potentialfunktion, die den Bedingungen

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = v_x \quad \text{und} \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = v_z$$

genügt, die Form an :

$$(14) \quad \phi(x, z, t) = - \frac{2an}{m} e^{mz} \cdot \sin(nt) \cdot \sin(mx) .$$

Von diesem Geschwindigkeitspotential der mit einer stehenden Welle im Tiefwasser verbundenen Strömung geht NAGAI [1] aus (vergl. dort die Gleichung (4)).

3.2 Berechnung des Geschwindigkeitspotentials für Flachwasser

Für Flachwasser verlaufen die Ableitungen ganz ähnlich wie die in Abschn. 3.1 durchgeführten, wenn man entsprechend der Theorie von Gerstner für $d < \frac{L}{2}$ in den Gleichungen (5) und (6) die Funktion e^{mz} durch die Funktion $\frac{\cosh(m(d+z))}{\sinh(md)}$ bzw. durch die Funktion $\frac{\sinh(m(d+z))}{\sinh(md)}$ ersetzt. Statt der Funktion $\phi_4(x, z, t)$ nach Gleichung (7) erfüllt dann die Funktion

$$(15) \quad \phi_5(x, z, t) = C' \cdot \sin(nt) \cdot \frac{\cosh(m(d+z))}{\sinh(md)} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{L} x\right)$$

die Bedingungen (4), (5') und (6')**, falls wieder Gleichung (8) erfüllt ist,

Daß $\phi_5(x, z, t)$ eine Potentialfunktion ist, kann leicht bewiesen werden, da bekanntlich

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\cosh(m(d+z))}{\sinh(md)} \right) = m^2 \frac{\cosh(m(d+z))}{\sinh(md)} \text{ ist.}$$

*) vgl. Abschn. 3.5

Für C' findet man wieder: $C' = -\frac{2an}{m}$ und statt (14) erhält man nun:

$$(16) \phi(x, z, t) = -\frac{2an}{m} \cdot \frac{\cosh(m(d+z))}{\sinh(md)} \cdot \sin(nt) \cdot \sin(mx)$$

Gleichung (16) ist identisch mit der von NAGAI mitgeteilten Gleichung (8) seines Berichtes [1].

3.3 Berechnung einer Formel für den Wellendruck im Tiefwasser

Für die Druckverteilung in einer stationären Strömung gilt die bekannte Gleichung von BERNOULLI :

$$(17) p(x, z) = (-\rho gz) - \frac{1}{2} \rho v^2(x, z)$$

Der Druck ist hier gleich der Differenz aus dem hydrostatischen Druck*) und dem Staudruck.

Die von der stehenden Welle erzeugte Strömung mit der Geschwindigkeit $v(x, z, t)$ ist nicht stationär, da alle Schwingungen mit Beschleunigungen verbunden sind. Deshalb tritt hier auch in der Gleichung für die Druckverteilung noch ein Beschleunigungsglied auf, das mit $p_b(x, z, t)$ bezeichnet werden soll.

Für eine allgemeine nichtstationäre Strömung tritt also an die Stelle der Gleichung (17) die allgemeine Gleichung

$$(17') p(x, z, t) = -\rho gz - \frac{1}{2} \rho v^2 + p_b(x, z, t)$$

Zur Berechnung von $p_b(x, z, t)$ wird das erste Axiom von NEWTON:

$$K = m \cdot \frac{dv}{dt}$$

auf den "Einheitswürfel" d.h. auf einen Wasserwürfel mit Kanten, die zu den Koordinatenachsen parallel sind und die Länge 1 haben, angewendet, und zwar hinsichtlich der x- und z-Komponente der Beschleunigung. Die Masse m des Einheitswürfels ist gleich $\rho \cdot 1$.

*) Auf der rechten Seite von (17) steht in der Klammer das Minuszeichen, weil die positive z-Achse aufwärts gerichtet ist.

Die x-Komponente K_x der treibenden Kraft K ist gleich der Differenz der beschleunigenden Druckkräfte, die auf die beiden zur x-Achse senkrechten Seitenflächen des Würfels wirken. Diese beiden Kräfte betragen: p_b und $(p_b + \frac{\partial p_b}{\partial x} \cdot 1)$. Daher ist : $K_x = \frac{\partial p_b}{\partial x}$.

Entsprechend ergibt sich: $K_z = \frac{\partial p_b}{\partial z}$

Somit ergeben sich die Beziehungen :

$$(18) K_x = \frac{\partial p_b}{\partial x} = - \rho \cdot \frac{\partial v_x}{\partial t} \quad *)$$

$$(19) K_z = \frac{\partial p_b}{\partial z} = - \rho \cdot \frac{\partial v_z}{\partial t} \quad *)$$

Das negative Vorzeichen ist in den Gleichungen (18) und (19) zu setzen, da die Beschleunigung in Richtung abnehmenden Druckes erfolgt.

Führt man nun in die Gleichungen (18) und (19) das bereits berechnete Geschwindigkeitspotential ϕ ein, das durch Gleichung (14) bzw. durch Gleichung (16) gegeben ist, folgt :

$$(20) \frac{\partial p_b}{\partial x} = - \rho \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)$$

$$(21) \frac{\partial p_b}{\partial z} = - \rho \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)$$

Wegen der Vertauschbarkeit der Reihenfolge der Differentiationen kann man (20) und (21) in der folgenden Form schreiben:

$$(22) \frac{\partial p_b}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial (-\rho \phi)}{\partial t} \right)$$

$$(23) \frac{\partial p_b}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial (-\rho \phi)}{\partial t} \right)$$

*) Auf den rechten Seiten von (18) und (19) sind Glieder vernachlässigt, die im allgemeinen von geringerer Größenordnung sind.

Z.B. $\frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt}$. Die Beschleunigung ist ja gleich der totalen Ableitung von v nach t.

Bildet man nun das vollständige Differential von p_b hinsichtlich der Argumente x und z , erhält man:

$$(24) dp_b = \frac{\partial p_b}{\partial x} dx + \frac{\partial p_b}{\partial z} dz = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial(-\rho\phi)}{\partial t} \right) dx + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial(-\rho\phi)}{\partial t} \right) dz$$

Gleichung (24) besagt, daß die beiden Funktionen $p_b(x, z, t)$ und $\frac{\partial}{\partial t}(-\rho\phi)$ sich nur durch einen von x und z unabhängigen Ausdruck unterscheiden können. Dieser kann aber noch von t abhängen. Er werde dementsprechend mit $\rho f(t)$ bezeichnet.

Für $p_b(x, z, t)$ ergibt sich damit :

$$(25) p_b = -\rho \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho \cdot f(t)$$

Damit ist das in Gleichung (17) fehlende Beschleunigungsglied berechnet. Für die Druckverteilung einer beliebigen - und daher auch für die Druckverteilung der zur stehenden Welle gehörenden - nicht-stationären Strömung, die ein v-Potential besitzt, gilt :

$$(26) p(x, z, t) = -\rho gz - \frac{1}{2} \rho v^2 - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho \cdot f(t)$$

Durch Division mit ρ erhält man aus (26) die Gleichung :

$$(27) \frac{p}{\rho} = -gz - \frac{1}{2} v^2 - \frac{\partial \phi}{\partial t} + f(t) \quad *)$$

Gleichung (27) gilt für Tief- und Flachwasser, wenn ϕ nach Gleichung (14) bzw. nach Gleichung (16) eingesetzt wird.

Es ist: (28) $v^2 = v_x^2 + v_z^2$

Durch Einsetzen von v_x und v_z nach Gleichung (4) in Gleichung (28) erhält man:

$$(29) v^2 = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 ,$$

*) In der entsprechenden Gleichung (3) des Berichtes von NAGAI [1] ist der dort stehende Ausdruck $\frac{\partial \phi}{\partial at}$ ein Druckfehler.

worin wieder ϕ nach Gleichung (14) bzw. nach Gleichung (16) einzusetzen ist. Zur Berechnung von v^2 kann man für Tiefwasser auch v_x und v_z nach den Gleichungen (5) und (6) und dann c nach Gleichung (13) einsetzen.

Um vermittels der Gleichung (27) $\frac{p}{\rho}$ als Funktion von x , z und t zu erhalten, muß man zunächst die Funktion $f(t)$ berechnen. Der Gang dieser Berechnung ist von NAGAI mitgeteilt worden. Da die mitgeteilten Gleichungen mehrere Druckfehler enthalten, soll die Berechnung von $f(t)$ hier wiederholt werden und zusätzlich ein etwas einfacherer Weg zur Berechnung von $f(t)$ aufgezeigt werden.

Da an der Wasseroberfläche für alle Werte von t gilt: $p = 0$; $z = \eta$ und $v = [v]_{z=\eta}$ nimmt dort die Gleichung (27) die Form an:

$$(30) \quad 0 = -g\eta - \frac{1}{2} [v^2]_{z=\eta} - \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \right]_{z=\eta} + f(t)$$

Auflösung der Gleichung (30) nach $f(t)$ gibt:

$$(31) \quad f(t) = g\eta + \frac{1}{2} [v^2]_{z=\eta} + \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \right]_{z=\eta}$$

Da die Funktion $f(t)$ in die Gleichung (27) eingesetzt wird und vermittels (27) der Druck an der reflektierenden Wand berechnet werden soll, wo $x = \frac{L}{4}$ (s.o.) und daher $\sin(mx) = 1$ ist, soll bei den weiteren Ableitungen hier für $\sin(mx)$ überall 1 gesetzt werden.

Nach Gleichung (1) gilt mit $2a = H$

$$(32) \quad g\eta = gH \cdot \cos(nt) \cdot 1$$

Für den zweiten Summanden auf der rechten Seite von Gleichung (31) hat man, da $\sin^2(mx) + \cos^2(mx) = 1$ und nach Gleichung (13) $c = m \cdot c' = -2an = -Hn$ ist, durch Einsetzen von v_x und v_z nach Gleichungen (5) und (6) in Gleichung (28):

$$\frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{2} [v_x^2 + v_z^2] = \frac{1}{2} [H^2 \cdot n^2 \cdot \sin^2(nt) \cdot e^{2mz}]$$

Daher ist:

$$(33) \quad \frac{1}{2} [v^2]_{z=\eta} = \frac{1}{2} H^2 \cdot n^2 \cdot \sin^2(nt) \cdot e^{2m\eta}$$

Für den letzten Summanden in Gleichung (31) findet man wegen $2a = H$ und $\frac{\partial}{\partial t} (\sin (nt)) = n \cdot \cos (nt)$ nach Gleichung (14) :

$$(34) \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \right]_{z=\eta} = - \frac{Hn^2}{m} \cdot e^{m\eta} \cdot \cos (nt) ,$$

Wenn wieder an der Wand $\sin (mx) = 1$ eingesetzt wird.

Die in den Gleichungen (33) und (34) auftretenden Exponentialfunktionen werden nach dem Satz von TAYLOR in Reihen entwickelt. Nach diesem bekannten Satz lautet die Reihenentwicklung einer differenzierbaren Funktion $f (x)$ in der Umgebung der Stelle $x = 0$:

$$(35) f (x) = f (0) + x \cdot f'(0) + \frac{x^2}{2!} f'' (0) + \dots$$

Für $f (x) = e^x$ nimmt die Entwicklung (35) wegen $\frac{d^n e^x}{dx^n} = e^x$ die einfache Form an :

$$(36) e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

Setzt man nun in (36) für x das Argument $m\eta$ bzw. $2m\eta$ erhält man die Reihen :

$$(37) e^{m\eta} = 1 + m\eta + \frac{1}{2!} (m\eta)^2 + \dots \text{ und}$$

$$(38) e^{2m\eta} = 1 + 2 m\eta + \frac{1}{2!} (2m\eta)^2 + \dots$$

Unter der eingangs gemachten Voraussetzung nicht zu großer Amplituden a kann wegen $(\eta) \leq a = \frac{H}{2}$ unter Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung der Reihen (37) und (38) gesetzt werden:

$$(39) e^{m\eta} = 1 + m\eta$$

$$(40) e^{2m\eta} = 1 + 2 m\eta$$

Einsetzen der Gleichungen (32), (33), (34), (39) und (40) in Gleichung (31) führt zunächst zu :

$$(41) \quad f(t) = gH \cdot \cos(nt) + \frac{1}{2} (1+2m\eta) \cdot H^2 n^2 \sin^2(nt) \\ - (1 + m\eta) \cdot H \cdot \frac{n^2}{m} \cdot \cos(nt)$$

Es ist wegen $c = \frac{L}{T}$:

$$\frac{n^2}{m} = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{L}{2\pi} = \frac{2\pi}{L} \cdot \frac{L^2}{T^2} = \frac{2\pi}{L} \cdot c^2$$

Daraus folgt wegen $c = \sqrt{\frac{gL}{2\pi} \tanh \frac{2\pi d}{L}}$, da im Tiefwasser $\tanh \frac{2\pi d}{L} = 1$ *) gesetzt werden kann,

$$(42) \quad \frac{n^2}{m} = \frac{2\pi}{L} \cdot \frac{gL}{2\pi} = g \quad \text{und} \quad n^2 = gm$$

Durch Einsetzen von n^2 und $\frac{n^2}{m}$ nach (42) in (41) und Umordnung der Glieder ergibt sich :

$$(43) \quad f(t) = gH \cos(nt) - gH \cos(nt) - gmH^2 \cos^2(nt) + \\ + \frac{1}{2} gmH^2 (1 + 2mH \cos(nt)) \cdot \sin^2(nt)$$

Setzt man für $\cos^2(nt) : \frac{1}{2} [\cos(2nt) + 1]$, nimmt die Gleichung (43) die Form an :

$$(44) \quad f(t) = - \frac{1}{2} gmH^2 \cdot \cos(2nt) \\ + \frac{1}{2} gmH^2 (1 + 2mH \cos(nt)) \cdot \sin^2(nt) - \\ - \frac{1}{2} gmH^2$$

Zur Berechnung des Druckes an der Wand im Tiefwasser ($d > \frac{L}{2}$) müssen nun noch der zweite und dritte Summand auf der rechten Seite der Gleichung (27) ausgerechnet werden :

*) $\tanh \frac{2\pi d}{L} = \frac{e^{2\pi d/L} - e^{-2\pi d/L}}{e^{2\pi d/L} + e^{-2\pi d/L}}$ Daher kann man schreiben :

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \tanh \frac{2\pi d}{L} = \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-4\pi d/L}}{1 + e^{-4\pi d/L}} = 1$$

Für Tiefwasser können zur Berechnung von $v^2 = v_x^2 + v_z^2$ die Gleichungen (5), (6) und (13) benützt werden, oder die Gleichungen (29), (14) und (13). Wegen $\sin^2(mx) + \cos^2(mx) = 1$ kommt man auf beiden Wegen zu :

$$(45) \quad \frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{2} H^2 \cdot n^2 \cdot \sin^2(nt) \cdot e^{2mz}$$

Ferner ist im Tiefwasser an der Wand (s.o.) nach Gleichung (14) :

$$(46) \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} = H \frac{n^2}{m} \cdot e^{mz} \cdot \cos(nt) \cdot 1$$

Werden nun die Ausdrücke (44), (45) und (46) in Gleichung (27) eingesetzt, erhält man:

$$(47) \quad \frac{P}{\rho} = -gz - \frac{1}{2} gmH^2 e^{2mz} \cdot \sin^2(nt) + \\ + gH \cdot \cos(nt) \cdot e^{mz} - \frac{1}{2} gmH^2 \cdot \cos(2nt) \\ + \frac{1}{2} gmH^2 (1 + 2mH \cos(nt)) \cdot \sin^2(nt) \\ - \frac{1}{2} gmH^2 + g \cdot R$$

In Gleichung (47) bedeutet der letzte Summand $g \cdot R$ den Einfluß der in den Reihenentwicklungen (37) und (38) vernachlässigten Glieder höherer Ordnung.

Dividiert man Gleichung (47) durch g und setzt $\rho g = w_0$, erhält man :

$$(48) \quad \frac{P}{w_0} = -z - \frac{1}{2} m H^2 e^{2mz} \cdot \sin^2(nt) + \\ + H \cdot e^{mz} \cdot \cos(nt) - \frac{1}{2} mH^2 \cos(2nt) + \\ + \frac{1}{2} mH^2 (1 + 2mH \cdot \cos(nt)) \cdot \sin^2(nt) - \\ - \frac{1}{2} mH^2 + R$$

Vernachlässigt man in Gleichung (48) die beiden letzten Summanden auf der rechten Seite, erhält man die Gleichung (6) des Berichtes von NAGAI [1] .

Die in dem von NAGAI vernachlässigten Restglied R zusammengefaßten Einflüsse der Summanden höherer Ordnung der Reihenentwicklungen (37) und (38) können unter der Voraussetzung weggelassen werden, daß die Wellensteilheiten der reflektierten Wellen nicht zu große Werte annehmen. Diese Voraussetzung wird im allgemeinen schon deshalb erfüllt sein, weil die Wellen sonst brechen werden. Für das quadratische Glied der Reihenentwicklung (37) gilt z.B. für $H = 2$ m und $L = 30$ m :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m^2 \cdot \eta^2 &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \cdot H^2 \cdot \cos^2(nt) \leq 2\pi^2 \cdot \left(\frac{H}{L}\right)^2 \\ &= 0,086 . \end{aligned}$$

Die anderen Glieder in der Entwicklung (37) sind von noch kleinerer Größenordnung.

3.4 Diskussion der Wellendruckformel für Tiefwasser

In der Wellendruckformel (48) hat der zweite Summand auf der rechten Seite den Faktor $\sin^2(nt)$, der sich in folgender Weise umformen läßt :

$$\begin{aligned} (49) \quad \sin^2(nt) &= \frac{1}{2} \left[\sin^2(nt) + (1 - \cos^2(nt)) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[1 - (\cos^2(nt) - \sin^2(nt)) \right] = \frac{1}{2} \left[1 - \cos(2nt) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \right] = \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi}{T/2} \cdot t\right) \right] \end{aligned}$$

Dieser Summand hat also die halbe Periode der stehenden Welle. Der dritte Summand hat die Periode T der stehenden Welle, der vierte Summand die Periode $\frac{T}{2}$ und der fünfte enthält neben der Periode T auch die Periode $\frac{T}{2}$. Im oberen Teil der Wand, wo nahezu $z = 0$ gilt ($e^{mz} \sim 1$), überwiegt an Größe der einzige von dem kleinen Faktor $m = \frac{2\pi}{L}$ freie Summand $H \cdot e^{mz} \cdot \cos(nt)$: Dort wird die Druckwelle fast immer ebenfalls mit der Periode T der stehenden Welle schwingen.

Im unteren Bereiche der Wand können die Faktoren e^{mz} und e^{2mz} praktisch gleich Null gesetzt werden. Ist z.B. $L = 10$ m, so gilt bereits für $|z| > 4$ m : $e^{mz} < e^{-2,515} = 0,076$ und $e^{2mz} < 0,0058$. Unterhalb dieser Grenze und zum Boden hin. in zunehmendem Maße überwiegen daher an Größe die Summanden, die die Faktoren $\cos(2nt)$ und $\sin^2(nt)$ enthalten. Im unteren Bereiche der reflektierenden Wand wird die durch Gleichung (48)

dargestellte resultierende Druckwelle daher im allgemeinen nicht mit der Periode T der stehenden Welle schwingen.

3.5 Wellendruckformel für Flachwasser

Das Geschwindigkeitsfeld im Flachwasser wird, wie bereits in Abschn. 3.2 erwähnt wurde, durch die Gleichungen:

$$(5') \quad v_x = C \cdot \sin(nt) \cdot \frac{\cosh(m(d+z))}{\sinh(md)} \cdot \cos(mx)$$

$$(6') \quad v_z = C \cdot \sin(nt) \cdot \frac{\sinh(m(d+z))}{\sinh(md)} \cdot \sin(mx)$$

dargestellt, worin wieder c nach Gleichung (13) einzusetzen ist.

Es gilt auch hier wieder die allgemeine Gleichung (27) für nicht-stationäre Strömungen. Darin ist nun aber ϕ nach Gleichung (16) einzusetzen. Es gelten auch unverändert die Gleichungen (30) und (31). Gleichung (31) kann auch in der Form :

$$(50) \quad f(t) = g \cdot \eta + \frac{1}{2} \left[v_x^2 + v_z^2 \right]_{z=\eta} + \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \right]_{z=\eta}$$

geschrieben werden. Nach (5') und (6') ist im Flachwasser :

$$(51) \quad \frac{1}{2} \left[v_x^2 + v_z^2 \right]_{z=\eta} = A \cdot B$$

In Gleichung (51) bedeuten bei Beachtung von Gleichung (13) :

$$(52) \quad A = \frac{1}{2} \cdot 4 a^2 \cdot \frac{n^2}{\sinh^2(md)} \cdot \sin^2(nt)$$

$$(53) \quad B = \cosh^2(m(d+\eta)) \cdot \cos^2(mx) + \\ + \sinh^2(m(d+\eta)) \cdot \sin^2(mx)$$

Die rechte Seite der Gleichung (53) läßt sich folgendermaßen umformen :

$$B = \cosh^2(m(d+\eta)) (1 - \sin^2(mx)) + \sinh^2(m(d+\eta)) \cdot \sin^2(mx)$$

oder nach einfacher Umformung :

$$(54) B = \cosh^2 (m(d+\eta)) - \sin^2(mx) \cdot \left[\cosh^2 (m(d+\eta)) - \sinh^2 (m(d+\eta)) \right]$$

Nun gilt für beliebige Werte z :

$$(55) \cosh^2(z) - \sinh^2(z) = \frac{e^{2z} + 2 + e^{-2z} - [e^{2z} - 2 + e^{-2z}]}{4} = +1$$

Aus (54) und (55) folgt :

$$(56) B = \cosh^2 (m(d+\eta)) - \sin^2 (mx)$$

In Gleichung (52) kann der Faktor $\frac{n^2}{\sinh^2(md)}$ für Flachwasser in folgender Weise umgeformt werden :

$$n^2 \cdot \frac{1}{\sinh^2(md)} = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{m^2 \cdot L^2}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{\sinh^2(md)} = m^2 \cdot c^2 \cdot \frac{1}{\sinh^2(md)}$$

Da im Flachwasser $c = \sqrt{\frac{gL}{2\pi} \cdot \tanh \frac{2\pi d}{L}}$ gilt, wird :

$$n^2 \cdot \frac{1}{\sinh^2(md)} = m \cdot \frac{2\pi}{L} \cdot \frac{gL}{2\pi} \cdot \frac{\tanh(md)}{\sinh^2(md)}$$

oder :

$$(57) \frac{n^2}{\sinh^2(md)} = g \cdot m \cdot \frac{1}{\sinh(md) \cdot \cosh(md)}$$

Ferner ist für beliebige Werte :

$$(58) \cosh(\alpha) \cdot \sinh(\alpha) = \frac{(e^\alpha + e^{-\alpha})(e^\alpha - e^{-\alpha})}{4} = \frac{e^{2\alpha} + 1 - 1 - e^{-2\alpha}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sinh(2\alpha)$$

Aus (57) und (58) folgt :

$$(59) \frac{n^2}{\sinh^2(md)} = 2 g m \cdot \frac{1}{\sinh(2md)}$$

Einsetzen von (59) in (52) führt zu :

$$(60) A' = g m \cdot 4 a^2 \cdot \frac{\sin^2(nt)}{\sinh(2md)}$$

Aus den Gleichungen (51), (56) und (60) bekommt man :

$$(61) \frac{1}{2} \left[v^2 \right]_{z=\eta} = g m \cdot 4 a^2 \frac{\sin^2(nt)}{\sinh(2md)} \left[\cosh^2(m(d+\eta)) - \sin^2(mx) \right]$$

Zur Berechnung des letzten Summanden auf der rechten Seite von Gleichung (50) muß zunächst Gleichung (16) partiell nach t differenziert werden. Da $\frac{\partial}{\partial t} \sin(nt) = n \cdot \cos(nt)$ ist, bekommt man :

$$(62) \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \right]_{z=\eta} = - \frac{2an^2}{m} \cos(nt) \cdot \sin(mx) \left[\frac{\cosh(m(d+z))}{\sinh(md)} \right]_{z=\eta}$$

Bei Berücksichtigung von Gleichung (1) vereinfacht sich (62) zu :

$$(63) \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \right]_{z=\eta} = - \frac{n^2}{m} \cdot \eta \cdot \left[\frac{\cosh(m(d+z))}{\sinh(md)} \right]_{z=\eta}$$

Im Flachwasser ist : $C^2 = \frac{gL}{2\pi} \tanh(md)$

Ferner ist :

$$\frac{n^2}{m} = \frac{(2\pi)^2}{T^2} \cdot \frac{L}{2\pi} = \frac{2\pi}{T} \cdot C = \frac{2\pi}{L} \cdot C^2 = g \cdot \tanh(md)$$

Einsetzen dieses Ausdruckes für $\frac{n^2}{m}$ in (63) führt zu :

$$(64) \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \right]_{z=\eta} = - g \eta \cdot \frac{\cosh(m(d+\eta))}{\cosh(md)}$$

Ganz entsprechend findet man :

$$(65) \frac{\partial \phi}{\partial t} = - g \cdot \eta \cdot \frac{\cosh(m(d+z))}{\cosh(md)}$$

Aus den Gleichungen (50), (61) und (64) ergibt sich für die Funktion f(t) für Flachwasser :

$$(66) f(t) = g \cdot \eta + gm \cdot 4a^2 \frac{\sin^2(nt)}{\sinh(2md)} \cdot \left[\cosh^2(m(d+\eta)) - \sin^2(mx) \right] - g \cdot \eta \cdot \frac{\cosh(m(d+\eta))}{\cosh(md)}$$

Die Gleichung für die Druckwelle ergibt sich nun wieder aus der Gleichung (27) :

$$(27) \quad \frac{p}{\rho} = -g \cdot z - \frac{1}{2}v^2 - \frac{\partial \phi}{\partial t} + f(t)$$

Entsprechend Gleichung (61) ergibt sich wegen $2a = H$:

$$(67) \quad \frac{1}{2} v^2 = gm \frac{H^2 \cdot \sin^2(nt)}{\sinh(2md)} \left[\cosh^2(m(d+z)) - \sin^2(mx) \right]$$

Einsetzen der Ausdrücke nach den Gleichungen (67), (65) und (66) in die Gleichung (27) führt zunächst zu :

$$(68) \quad \frac{p}{\rho} = -gz - \frac{gmH^2 \sin^2(nt)}{\sinh(2md)} \left[\cosh^2(m(d+z)) - \sin^2(mx) \right] +$$

$$+ gn \frac{\cosh(m(d+z))}{\cosh(md)} + g \eta +$$

$$+ \frac{gmH^2 \cdot \sin^2(nt)}{\sinh(2md)} \left[\cosh^2(m(d+\eta)) - \sin^2(mx) \right]$$

$$- gn \cdot \frac{\cosh(m(d+\eta))}{\cosh(md)}$$

Auf der rechten Seite der Gleichung (68) haben die beiden Ausdrücke mit dem Faktor $\sin^2(mx)$ entgegengesetzte Vorzeichen und fallen fort. Teilt man Gleichung (68) durch die Erdbeschleunigung g und setzt wieder $\rho g = w_0$, so folgt nach passender Umordnung der Summanden :

$$(69) \quad \frac{p}{w_0} = -z + \frac{m \cdot H^2 \cdot \sin^2(nt)}{\sinh(2md)} \left[\cosh^2(m(d+\eta)) - \cosh^2(m(d+z)) \right]$$

$$+ \eta \left[1 + \frac{\cosh(m(d+z))}{\cosh(md)} - \frac{\cosh(m(d+\eta))}{\cosh(md)} \right] \quad *)$$

*) In dem Bericht von NAGAI [1] lautet in der entsprechenden Gleichung (10) die erste Klammer der rechten Seite:

$$\left[\cosh^2(m(d+\eta)) - \cosh^2(d+z) \right]$$

Das kann nicht richtig sein, denn in $\cosh^2(d+z)$ hat das Argument eine falsche Dimension. Ferner muß an der Wasseroberfläche d.h. für $z = \eta$ gelten : $p \equiv 0$. Letztere Bedingung ist durch Gleichung (69) erfüllt, aber nicht durch Gleichung (10). von NAGAI. Es dürfte dort ein Druckfehler vorliegen.

3.6 Wellendrücke am unteren Rande der reflektierenden Wand

3.6.1 Wellendrücke an der Sohle im Tiefwasser

Gleichung (48) liefert die Wellendrücke für Tiefwasser für beliebige Abstände $|z| \leq d$ vom Ruhewasserspiegel. Das Verhalten der in (48) auftretenden Faktoren e^{mz} und e^{2mz} wurde schon in Abschn. 3.4 besprochen. Im Tiefwasser ist $d > \frac{L}{2}$ und daher an der Sohle : $e^{mz} < e^{-\frac{mL}{2}} = e^{-\pi} = 0,039$ und $e^{2mz} < 0,0015$.

An der Sohle wird deshalb wegen $z = -d$ bei Nullsetzen der sehr kleinen Faktoren e^{mz} und e^{2mz} im Tiefwasser :

$$(70) \frac{P}{w_0} = d - \frac{1}{2} mH^2 \left[1 + \cos(2nt) - (1+2mH \cos(nt)) \sin^2(nt) \right]$$

3.6.2 Wellendrücke an der Sohle im Flachwasser

Im Flachwasser folgt für den Druck am Boden nach Gleichung (69) wegen $z = -d$:

$$(71) \frac{P}{w_0} = d + \frac{m \cdot H^2 \cdot \sin^2(nt)}{\sinh(2md)} \left[\cosh^2(m(d+n)) - 1 \right] + n \left[1 + \frac{1}{\cosh(md)} - \frac{\cosh(m(d+n))}{\cosh(md)} \right]$$

In der Phase des Wellenscheitels ist nach Gleichung (1) : $\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) = 1$ d.h. $t = 0$ zu setzen. In der Scheitellage der stehenden Welle wird daher die Verteilung des Druckes auf die reflektierende Wand im Flachwasser durch :

$$(72) \frac{P}{w_0} = -z + H \left[1 + \frac{\cosh(m(d+z))}{\cosh(md)} - \frac{\cosh(m(d+H))}{\cosh(md)} \right]$$

dargestellt (vgl. Gleichung (69)).

Für die Scheitellage der stehenden Welle folgt aus Gleichung (72) für den Druck am unteren Rande der reflektierenden Wand :

$$(73) \frac{P}{w_0} = d + H \left[1 + \frac{1}{\cosh(md)} - \frac{\cosh(m(d+H))}{\cosh(md)} \right],$$

da aus $z = -d$ folgt : $\cosh(m(d+z)) = \cosh(0) = 1$. Gleichung (73) ist identisch mit Gleichung (12) in NAGAI'S Bericht [1].

3.7 Resultierende Schubkraft in Abhängigkeit von der Wellenphase (Weiterführung der Theorie NAGAI'S)

Im Flachwasser kann für die Phase des Wellenscheitels die gesamte pro lfd.m Wand ausgeübte Wellendruckkraft durch Integration von p nach Gleichung (72) berechnet werden. Diese resultierende Schubkraft ergibt sich also in Mp/m nach der Gleichung :

$$(74) \quad P = \int_{-d}^H p \, dz$$

Wenn man beachtet, daß

$$\int \cosh(m(d+z)) \, dz = \frac{1}{m} \cdot \sinh(m(d+z)) \quad \text{ist,}$$

bekommt man durch Ausführung der Integration nach Gleichung (72) zunächst :

$$(75) \quad P = w_0 \left[-\frac{z^2}{2} + H \cdot \left(z + \frac{\sinh(m(d+z))}{m \cosh(md)} - z \cdot \frac{\cosh(m(d+H))}{\cosh(md)} \right) \right]_{-d}^H$$

Auswertung des unbestimmten Integrals an den Grenzen des Integrationsintervalls und Differenzbildung führt zu :

$$(76) \quad P = \frac{w_0}{2} (d^2 - H^2) + w_0 \cdot H \cdot \left[(H+d) + \frac{\sinh(m(d+H))}{m \cosh(md)} - (H+d) \cdot \frac{\cosh(m(d+H))}{\cosh(md)} \right]$$

Gleichung (76) ist identisch mit der in NAGAI'S Bericht [1] mitgeteilten Gleichung (13) .

Da in großen Bereichen der reflektierenden Wand die maximalen Wellendrucke für andere Phasen der stehenden Welle auftreten, ist zu erwarten, daß auch die resultierende Kraft P ihren maximalen Wert nicht bei der Scheitellage der stehenden Welle erreicht. Um das zu entscheiden und den Maximalwert zu berechnen, ist Gleichung (76) (NAGAI'S Gleichung (13)) nicht ausreichend. Diese muß daher ergänzt werden durch eine allgemeine Formel, die es gestattet, die resultierende Kraft für beliebige Wellenphasen zu ermitteln. Hierzu muß die allgemeine Gleichung (69) zwischen den Grenzen $z = -d$ und $z = \eta = H \cdot \cos(nt) \cdot 1$ integriert werden.

Es ist :

$$(77) \int \cosh(m(d+z)) dz = \frac{1}{m} \cdot \sinh(m(d+z))$$

Ferner ist :

$$\cosh^2(m(d+z)) = \frac{1}{4} \left[e^{2m(d+z)} + e^{-2m(d+z)} + 2 \right]$$

Mithin ist :

$$\int \cosh^2(m(d+z)) dz = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2m} e^{2m(d+z)} - \frac{1}{2m} e^{-2m(d+z)} + 2z \right]$$

oder nach einfacher Umformung :

$$(78) \int \cosh^2(m(d+z)) dz = \frac{1}{4m} \cdot \sinh(2m(d+z)) + \frac{z}{2}$$

Bei Beachtung der Beziehungen (77) und (78) erhält man durch Integration der allgemeinen Gleichung (69) zwischen den Grenzen $z = -d$ und $z = \eta = H \cdot \cos(nt) \cdot 1$:

$$(79) \int_{-d}^{\eta} p dz = \left[-\frac{1}{2} w_0 z^2 + \frac{mH^2 \cdot \sin^2(nt)}{\sinh(2md)} \left\{ z \cdot \cosh^2(m(d+\eta)) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{4m} \sinh(2m(d+z)) - z/2 \right\} \cdot w_0 + \right. \\ \left. + \eta \left\{ z + \frac{\sinh(m(d+z))}{m \cdot \cosh(md)} - z \cdot \frac{\cosh(m(d+\eta))}{\cosh(md)} \right\} \cdot w_0 \right]_{-d}^{\eta}$$

Auswertung der Gleichung (79) nach den Integrationsgrenzen führt zu :

$$(80) P = \frac{1}{2} w_0 (d^2 - \eta^2) + \\ + w_0 \cdot \frac{mH^2 \cdot \sin^2(nt)}{\sinh(2md)} \left\{ (d + \eta) \cdot \cosh^2(m(d+\eta)) - \right. \\ \left. - \frac{\sinh(2m(d+\eta))}{4m} - \frac{1}{2} (d + \eta) \right\} + \\ + w_0 \cdot \eta \cdot \left\{ (d+\eta) + \frac{\sinh(m(d+\eta))}{m \cosh(md)} - (d+\eta) \cdot \frac{\cosh(m(d+\eta))}{\cosh(md)} \right\}$$

In Gleichung (80) ist an der reflektierenden Wand zu setzen : $\eta = H \cdot \cos(nt) \cdot 1$, Bei Auftreten des Wellenscheitels an der Wand ist : $\eta = H$ und $\sin^2(nt) = 0$. Dann geht die rechte

Seite der für alle Wellenphasen geltenden allgemeinen Gleichung (80) in die rechte Seite von NAGAI'S spezieller Gleichung (13) (vgl. Gleichung (76)) über, die nur für die Scheitellage der stehenden Welle an der reflektierenden Wand gilt.

3.8 Diskussion der für Flachwasser hergeleiteten Wellendruckformeln

Da der auf der rechten Seite der Gleichung (71) auftretende Faktor $[\cosh^2(m(d+\eta)) - 1]$ im allgemeinen in der Umgebung des Wellenscheitels positive Werte von erheblichem Betrage annimmt, ist der Ausdruck

$$\frac{mH^2 \cdot \sin^2(nt)}{\sinh(2md)} \left[\cosh^2(m(d+\eta)) - 1 \right]$$

eine Funktion von t , die an der Stelle $t = 0$ d.h. bei Scheitellage der stehenden Welle verschwindet, aber vorher und nachher positive Werte von großem Betrage annimmt. Die durch Gleichung (71) dargestellte Funktion wird daher im allgemeinen vor und nach der Scheitellage der stehenden Welle an der reflektierenden Wand ihren maximalen Wert erreichen.

Wendet man die gleichen Überlegungen auf Gleichung (80) an, erkennt man, daß die in NAGAI'S Bericht mitgeteilte Gleichung (13) (nach dortiger Zählung der Gleichungen) nicht die maximale resultierende Druckkraft liefert. Diese muß vielmehr nach der hier hergeleiteten Gleichung (80) bestimmt werden.

3.9 Wellendruckformeln auf der Grundlage der elliptisch trochoidalen Wellentheorie

3.9.1 Einleitung

Nach Auffassung der elliptisch-trochoidalen Wellentheorie bewegen sich unterhalb einer fortschreitenden Wasserwelle die Wasserteilchen auf geschlossenen Bahnkurven mit den horizontalen Halbachsen r und den vertikalen Halbachsen r' . Im Tiefwasser ist $r = r'$; in diesem in der allgemeinen Theorie enthaltenen Sonderfall sind die Bahnkurven Kreise.

Diese Theorie betrachtet also die Bewegungen der Wasserteilchen als nicht-wirbelfrei. Deshalb existiert bei Anwendung dieser Wellentheorie kein Geschwindigkeitspotential. Nach bekannten Sätzen der theoretischen Physik müssen jedoch Bewegungen, die unter alleiniger Wirkung der Schwerkraft als äußerer Kraft ablaufen - also auch die Gravita-

tionswellen - eigentlich ein Geschwindigkeitspotential besitzen. Durch diesen Widerspruch wird die physikalische Bedeutung der mit der trochoidalen Wellentheorie hergeleiteten Berechnungsformeln ein wenig beeinträchtigt.

3.9.2 Mathematische Formulierung des Bewegungsfeldes unterhalb einer stehenden Welle nach der elliptisch-trochoidalen Wellentheorie

Vor der Anwendung dieser Theorie wird wegen der besseren Vergleichbarkeit der hergeleiteten Formeln mit den Formeln NAGAI'S das bisher benützte Koordinatensystem so um die x-Achse gedreht, daß die positive z-Achse zum Boden zeigt. Bei Anwendung der nach den beiden Theorien hergeleiteten Formeln auf dasselbe Berechnungsbeispiel ist dieser Unterschied der von NAGAI [1] benützten Bezugssysteme zu berücksichtigen.

In Bezug auf das neue Koordinatensystem kann die elliptische Bahn eines Wasserteilchens mit den Koordinaten x und z , das mit der Periode T um den Mittelpunkt (x_0, z_0) der Ellipse umläuft, bei Verwendung der Zeit t als Parameter durch folgende Gleichungen dargestellt werden :

$$(81) \quad x = x_0 + r \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right)$$

$$(82) \quad z = z_0 - r' \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right)$$

Ziel ist, die durch die stehende Welle erzeugten Bahnkurven aller Wasserteilchen durch ein Gleichungssystem darzustellen.

Die stehende Welle entsteht durch Überlagerung der anlaufenden mit der von der Wand reflektierten Welle (vgl. Abschnitt 3.1). Während der Periode T legen diese beiden Wellenkomponenten den gleichen Weg L in entgegengesetzten Richtungen zurück. Dabei verfrachten sie auch die beiden Bewegungskomponenten $r \cdot \cos (nt)$ und $r' \cdot \sin (nt)$ in ihren entgegengesetzten Fortschrittsrichtungen.

Die Wellenfortpflanzungen von $r \cdot \cos (nt)$ sind dargestellt durch :

$$(83) \quad \xi_1 = r \cdot \cos (m x_0 + nt)$$

$$(84) \quad \xi_2 = r \cdot \cos (m x_0 - nt) = r \cdot \cos (nt - mx_0)$$

mit $m = \frac{2\pi}{L}$ und $n = \frac{2\pi}{T}$.

Die Gleichungen (83) und (84) nehmen nach Anwendung des elementaren Additionssatzes der cos-Funktion die Form an :

$$(85) \xi_1 = r \cdot [\cos(mx_0) \cdot \cos(nt) - \sin(mx_0) \cdot \sin(nt)]$$

$$(86) \xi_2 = r \cdot [\cos(mx_0) \cdot \cos(nt) + \sin(mx_0) \cdot \sin(nt)]$$

Das Ergebnis der beiden Verfrachtungen erhält man durch Addition von (85) und (86) in der Form :

$$(87) (\xi_1 + \xi_2) = \xi = 2 r \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{L} \cdot x_0\right)$$

Gleichung (87) stellt die eine Bewegungskomponente der stehenden Welle dar, die in Gleichung (81) an die Stelle von $r \cdot \cos(nt)$ zu treten hat.

Die entgegengesetzt gerichteten Wellenfortpflanzungen der vertikalen Bewegungskomponente werden dargestellt durch :

$$(88) \zeta_1 = r' \cdot \sin(mx_0 + nt)$$

$$(89) \zeta_2 = r' \cdot \sin(mx_0 - nt)$$

Daraus durch Anwendung des Additionssatzes für die sin-Funktion :

$$(90) \zeta_1 = r' \cdot [\sin(mx_0) \cos(nt) + \cos(mx_0) \cdot \sin(nt)]$$

$$(91) \zeta_2 = r' \cdot [\sin(mx_0) \cos(nt) - \cos(mx_0) \cdot \sin(nt)]$$

Durch Addition ergibt sich daraus für die vertikale Bewegungskomponente unterhalb einer stehenden Welle :

$$(92) \zeta = \zeta_1 + \zeta_2 = 2 r' \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{L} \cdot x_0\right)$$

Durch Verschiebung des Nullpunktes der Zeitrechnung um $\frac{T}{4}$ *) gehen die Gleichungen (87) und (92) über in :

*) NAGAI [1] untersucht vermittels der trochoidalen Theorie eine stehende Welle, die ihre Scheitellage für $t = \frac{T}{4}$ einnimmt und nach der Potentialtheorie eine stehende Welle, die diese Phase für $t = 0$ erreicht (vgl. Gleichung (1)).

$$(93) \xi = 2 r \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{L} \cdot x_0 \right)$$

$$(94) \zeta = 2 r' \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{L} \cdot x_0 \right)$$

Setzt man die Bewegungskomponenten ξ und ζ der stehenden Welle in die Gleichungen (81) und (82) ein, erhält man ihr Bewegungsfeld in der Form :

$$(95) x = x_0 + 2 r \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot \cos \left(\frac{2\pi}{L} x_0 \right)$$

$$(96) z = z_0 - 2 r' \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{L} \cdot x_0 \right)$$

Nach bekannten physikalischen Gesetzen müssen die Halbachsen r und r' der Bahnellipsen mit zunehmendem Abstand vom Ruhewasserspiegel nach einem Exponentialgesetz abnehmen. Ferner muß am Boden d.h. für $z_0 = d$ die vertikale Halbachse r' gleich Null werden und im Ruhewasserspiegel muß $r' = \frac{H}{2}$ sein. Allen diesen Forderungen leistet die elliptisch-trochoidale Wellentheorie Genüge durch die Ansätze :

$$(97) r' = \frac{H}{2} \cdot \frac{\sinh(m(d-z_0))}{\sinh(md)}$$

$$(98) r = \frac{H}{2} \cdot \frac{\cosh(m(d-z_0))}{\sinh(md)}$$

Zur Darstellung des Bewegungsfeldes unterhalb einer stehenden Welle sind r und r' nach (97) und (98) in (95) und (96) einzusetzen.

Durch die Gleichungen (95) bis (98) wird das Bewegungsfeld in größerer Entfernung von der reflektierenden Wand dargestellt. In unmittelbarer Nähe der Wand werden die Zirkulationszentren (x_0, z_0) um den Betrag

$$\frac{4\pi}{L} \cdot r \cdot r' \cdot \sin^2 \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right)$$

im Rythmus der stehenden Welle angehoben. Um diesen Umstand zu berücksichtigen, wird Gleichung (96) verallgemeinert zu

$$(99) z = z_0 - \frac{4\pi}{L} r r' \sin^2 \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) - 2 r' \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t \right) \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{L} x_0 \right)$$

In unmittelbarer Nähe der reflektierenden Wand wird das Bewegungsfeld also durch die Gleichungen (95) und (99) in Verbindung mit (97) und (98) dargestellt.

3.9.3 Die Bewegungsgleichung von LAGRANGE

Zur Herleitung der Druckkräfte aus den durch die Gleichungen (95), (99), (97) und (98) dargestellten Bahnen der Wasserteilchen müssen die Koordinaten x und z der Wasserteilchen in die "Bewegungsgleichung 1. Art" von LAGRANGE eingesetzt werden. Dabei treten x_0 , z_0 und t als unabhängige Differentiations-Veränderliche auf.

Die hier anzusetzende Form dieser partiellen Differentialgleichung bekommt man am einfachsten durch folgende Überlegungen: X und Z seien die beiden Komponenten der auf die Masseneinheit wirkenden äußeren Kraft. Nach den Überlegungen in Abschnitt 3.3 sind die Komponenten der an der Volumeneinheit - also an der Masse ρ - angreifenden Druckkraft: $(-\frac{\partial p}{\partial x})$ und $(-\frac{\partial p}{\partial z})$. Die Komponenten der an der Masseneinheit angreifenden Druckkraft sind daher: $(-\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x})$ und $(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z})$. Nach dem 1. Axiom von NEWTON hat man demnach zu setzen:

$$(100) \quad (X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}) = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \cdot 1 \quad *)$$

$$(101) \quad (Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}) = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \cdot 1 \quad *)$$

Multipliziert man die Gleichung (100) mit $\frac{\partial x}{\partial x_0}$ und die Gleichung (101) mit $\frac{\partial z}{\partial x_0}$, bekommt man wegen

$$(102) \quad \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x_0} + \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x_0} = \frac{\partial p}{\partial x_0}$$

die nachfolgende Gleichung:

$$(103) \quad (\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - X) \cdot \frac{\partial x}{\partial x_0} + (\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - Z) \cdot \frac{\partial z}{\partial x_0} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_0} = 0$$

*) Hier soll durch die Schreibweise $\frac{\partial x}{\partial t}$ und $\frac{\partial z}{\partial t}$ angedeutet werden, daß x und z noch von den Parametern x_0 und z_0 abhängen.

Auf entsprechende Weise erhält man wegen

$$(104) \quad \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial z_0} + \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial z_0} = \frac{\partial p}{\partial z_0} \quad ;$$

$$(105) \quad \left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - X \right) \cdot \frac{\partial x}{\partial z_0} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - Z \right) \cdot \frac{\partial z}{\partial z_0} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z_0} = 0$$

Die partiellen Differentialgleichungen (103) und (105) sind die "Bewegungsgleichungen erster Art" von LAGRANGE.

3.9.4 Auswertung der Bewegungsgleichungen von LAGRANGE

Nach der Auswertung der Bewegungsgleichungen von LAGRANGE muß zur Berechnung des Druckes an der reflektierenden Wand das Linien-Integral

$$\int_0^{z_0} \left(\frac{\partial p}{\partial x_0} \cdot \frac{\partial x_0}{\partial s} + \frac{\partial p}{\partial z_0} \cdot \frac{\partial z_0}{\partial s} \right) ds$$

berechnet werden. Da auf einem Integrationswege parallel zur z-Achse und entlang der reflektierenden Wand $x_0 = \text{Konst.}$, d.h. $\frac{\partial x_0}{\partial s} = 0$ und $ds = dz_0$ ist, vereinfacht sich das Integral zu :

$$\int_0^{z_0} \left(\frac{\partial p}{\partial z_0} \cdot 1 \right) dz_0$$

Daher braucht nur Gleichung (105) weiterbehandelt zu werden. Da Z und X auf die Masseneinheit bezogen sind, ist bei Schwerewellen für Z die Erdbeschleunigung g und für X Null zu setzen. Damit wird aus Gleichung (105) nach einfacher Umordnung der Summanden :

$$(106) \quad g \cdot \frac{\partial z}{\partial z_0} - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial z_0} - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial z_0} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z_0}$$

Da $\frac{\partial}{\partial z_0} \cosh(m(d-z_0)) = \frac{\partial}{\partial z_0} \cosh((-m)(z_0-d)) = -m \cdot \sinh((-m)(z_0-d)) = -m \sinh(m(d-z_0))$ ist, ergibt sich aus den Gleichungen (97) und (98) :

$$(107) \quad \frac{\partial}{\partial z_0} (r) = -m \cdot r' = -\frac{2\pi}{L} \cdot r'$$

Auf entsprechende Weise findet man :

$$(108) \quad \frac{\partial}{\partial z_0} (r') = -m \cdot r = -\frac{2\pi}{L} \cdot r .$$

Nach den Gleichungen (95) und (99) findet man bei Berücksichtigung von (107) und (108) :

$$(109) \quad \frac{\partial z}{\partial z_0} = 1 + \frac{4\pi}{L} \cdot \frac{2\pi}{L} \cdot (r^2 + r'^2) \cdot \sin^2\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) + \\ + 2 \cdot \frac{2\pi}{L} \cdot r \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{L} \cdot x_0\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{4\pi}{L} \cdot 2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot r \cdot r' \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) - \\ - 2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot r' \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{L} \cdot x_0\right)$$

$$(110) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -2 \cdot \frac{4\pi}{L} \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot r \cdot r' \cdot \cos^2\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) + \\ + 2 \cdot \frac{4\pi}{L} \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot r \cdot r' \cdot \sin^2\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) + \\ + 2 \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot r' \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{L} \cdot x_0\right)$$

$$(111) \quad \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -2 r \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{L} \cdot x_0\right)$$

$$(112) \quad \frac{\partial x}{\partial z_0} = -\frac{4\pi}{L} \cdot r' \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{L} \cdot x_0\right)$$

Setzt man die Gleichungen (109) bis (112) in die Differentialgleichung (106) ein, erhält man die Bewegungsgleichung von LAGRANGE in der Form :

$$(113) \quad \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z_0} = \\ = g + g \frac{8\pi^2(r^2 + r'^2)}{L^2} \cdot \sin^2\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) + g \cdot r \cdot \frac{4\pi}{L} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{L} \cdot x_0\right) \\ + \frac{8\pi}{L} \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r \cdot r' \cdot \cos^2\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) - \frac{8\pi}{L} \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r \cdot r' \cdot \sin^2\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) - \\ - 2 \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r' \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{L} \cdot x_0\right) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{8\pi}{L} \cdot \frac{8\pi^2}{L^2} \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r \cdot r' \cdot (r^2 + r'^2) \cdot \sin^2\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \cos^2\left(\frac{2\pi}{T} t\right) - \\
 & - \frac{8\pi}{L} \cdot \frac{8\pi^2}{L^2} \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r \cdot r' \cdot (r^2 + r'^2) \cdot \sin^2\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \sin^2\left(\frac{2\pi}{T} t\right) - \\
 & - \frac{8\pi^2}{L^2} \cdot 2 \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r' \cdot (r^2 + r'^2) \cdot \sin^3\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{L} x_0\right) + \\
 & + \frac{8\pi}{L} \cdot \frac{4\pi}{L} \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r^2 \cdot r' \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \cos^2\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{L} \cdot x_0\right) - \\
 & - \frac{8\pi}{L} \cdot \frac{4\pi}{L} \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r^2 \cdot r' \cdot \sin^3\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{L} \cdot x_0\right) - \\
 & - \frac{8\pi}{L} \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r \cdot r' \cdot \sin^2\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \sin^2\left(\frac{2\pi}{L} \cdot x_0\right) - \\
 & - \frac{8\pi}{L} \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r \cdot r' \cdot \sin^2\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \cos^2\left(\frac{2\pi}{L} x_0\right)
 \end{aligned}$$

In Gleichung (113) sind r und r' nach den Gleichungen (97) und (98) auszudrücken. Auf der rechten Seite der Gleichung (113) werden nun alle Summanden umgeformt, die die Erdbeschleunigung g nicht explizite enthalten.

Umformung des vierten Summanden :

$$\begin{aligned}
 (114) \quad & \frac{8\pi}{L} \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r \cdot r' \cdot \cos^2\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) = \frac{8\pi}{L} \cdot \frac{4\pi^2}{L^2} \cdot c^2 \cdot r \cdot r' \cdot \cos^2\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) = \\
 & = \frac{8\pi}{L} \cdot \frac{4\pi^2}{L^2} \cdot \frac{gL}{2\pi} \cdot \tanh\left(\frac{2\pi}{L} \cdot d\right) \cdot r \cdot r' \cdot \cos^2\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) = \\
 & = g \cdot \frac{16\pi^2 \cdot r \cdot r'}{L^2} \cdot \tanh\left(\frac{2\pi}{L} \cdot d\right) \cdot \cos^2\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)
 \end{aligned}$$

Durch die gleichen Umformungen geht der 5. Summand über in :

$$(115) \quad - g \cdot \frac{16\pi^2 \cdot r \cdot r'}{L^2} \cdot \tanh\left(\frac{2\pi}{L} \cdot d\right) \cdot \sin^2\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

Die beiden letzten Summanden der rechten Seite der Gleichung (113) lassen sich wegen

$$\sin^2\left(\frac{2\pi}{L} x_0\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{L} x_0\right) = 1$$

ebenfalls zu dem Ausdruck (115) zusammenfassen.

Alle bisher betrachteten vier Summanden lassen sich daher wegen (114) und (115) zusammenfassen zu :

$$(116) + g \frac{16\pi^2 \cdot r \cdot r'}{L^2} \cdot \tanh\left(\frac{2\pi}{L} \cdot d\right) \left[\cos^2\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) - 2 \cdot \sin^2\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \right]$$

Umformung des 6. Summanden der rechten Seite der Gleichung (113) :

$$\begin{aligned} & - \frac{8\pi^2}{T^2} \cdot r' \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{L} x_0\right) = \\ & = - \frac{8\pi^2}{L^2} \cdot r' \cdot c^2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{L} x_0\right) = \\ & = - \frac{8\pi^2}{L^2} \cdot r' \cdot \frac{gL}{2\pi} \cdot \tanh\left(\frac{2\pi}{L} d\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{L} \cdot x_0\right) = \\ & = -g \cdot \frac{4\pi}{L} \cdot r' \cdot \tanh\left(\frac{2\pi}{L} \cdot d\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{L} \cdot x_0\right) \end{aligned}$$

In dieser Form läßt sich der 6. Summand mit dem 3. Summanden vereinigen zu :

$$(117) - g \cdot \frac{4\pi}{L} \cdot (r' \cdot \tanh\left(\frac{2\pi}{L} \cdot d\right) - r) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{L} \cdot x_0\right)$$

Der 9. Summand auf der rechten Seite der Gleichung (113) läßt sich folgendermaßen umformen :

$$\begin{aligned} & - \frac{16\pi^2}{L^2} \cdot \frac{4\pi^2}{L^2} \cdot c^2 \cdot r' \cdot (r^2 + r'^2) \cdot \sin^3\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{L} \cdot x_0\right) = \\ & = - \frac{16\pi^2}{L^2} \cdot \frac{4\pi^2}{L^2} \cdot \frac{8L}{2\pi} \cdot r' \cdot (r^2 + r'^2) \cdot \tanh\left(\frac{2\pi}{L} d\right) \cdot \sin^3\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{L} x_0\right) = \\ (118) & - g \cdot \frac{32\pi^3 r' (r^2 + r'^2)}{L^3} \cdot \tanh\left(\frac{2\pi}{L} \cdot d\right) \cdot \sin^3\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{L} x_0\right) \end{aligned}$$

Der 7. und der 8. Summand auf der rechten Seite der Gleichung (113) können wegen :

$$\cos^2\left(\frac{2\pi}{T} t\right) - \sin^2\left(\frac{2\pi}{T} t\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{T} t\right)$$

zunächst vereinigt werden zu :

$$\frac{8\pi}{L} \cdot \frac{8\pi^2}{L^2} \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r \cdot r' \cdot (r^2 + r'^2) \cdot \sin^2\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \cos\left(\frac{4\pi}{T} \cdot t\right)$$

Dieser Ausdruck läßt sich folgendermaßen umformen :

$$\frac{128\pi^4}{L^3} \cdot \frac{2\pi}{L^2} \cdot c^2 \cdot r \cdot r' \cdot (r^2 + r'^2) \cdot \sin^2\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \cos\left(\frac{4\pi}{T} \cdot t\right) =$$

$$(119) = g \frac{128\pi^4 r r' (r^2 + r'^2)}{L^4} \cdot \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right) \cdot \sin^2\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \cos\left(\frac{4\pi}{T} \cdot t\right)$$

Der 10. und 11. Summand der rechten Seite der Gleichung (113) lassen sich zunächst vereinigen zu :

$$r^2 \cdot r' \cdot \frac{64\pi^3}{L^2} \cdot \frac{2\pi}{L^2} \cdot \frac{gL}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{L} x_0\right) \left[\cos^2(nt) - \sin^2(nt) \right]$$

Wegen der Beziehung $\cos^2\left(\frac{2\pi}{T} t\right) - \sin^2\left(\frac{2\pi}{T} t\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{T} t\right)$

kann dieser Ausdruck umgewandelt werden in :

$$(120) \quad g \frac{64\pi^3 r^2 \cdot r'}{L^3} \cdot \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \cos\left(\frac{4\pi}{T} t\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{L} x_0\right)$$

Setzt man die Ausdrücke (114) bis (120) in die Gleichung (113) ein und dividiert sämtliche Glieder dieser Gleichung, die nunmehr alle die Erdbeschleunigung g als Faktor enthalten, durch diesen gemeinsamen Faktor g , so erhält man nach Vertauschung beider Seiten :

$$(121) \quad 1 - \frac{4\pi}{L} (r' \cdot \tanh\left(\frac{2\pi}{L} d\right) - r) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{L} x_0\right) +$$

$$+ \frac{16\pi^2 \cdot r \cdot r'}{L^2} \cdot \tanh\left(\frac{2\pi}{L} d\right) \cdot \left[\cos^2\left(\frac{2\pi}{T} t\right) - 2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \right] +$$

$$+ \frac{8\pi^2 (r^2 + r'^2)}{L^2} \cdot \sin^2\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) -$$

$$- \frac{32\pi^3 r' (r^2 + r'^2)}{L^3} \cdot \tanh\left(\frac{2\pi}{L} d\right) \cdot \sin^3\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{L} x_0\right) +$$

$$+ \frac{64\pi^3 \cdot r^2 \cdot r'}{L^3} \cdot \tanh\left(\frac{2\pi}{L} d\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \cdot \cos\left(\frac{4\pi}{T} t\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{L} x_0\right) +$$

$$+ \frac{128\pi^4 \cdot r \cdot r' (r^2 + r'^2)}{L^4} \cdot \tanh\left(\frac{2\pi}{L} d\right) \cdot \sin^2\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \cdot \cos\left(\frac{4\pi}{T} t\right) =$$

$$= \frac{1}{\rho g} \cdot \frac{\partial p}{\partial z_0} \quad *)$$

*) Siehe Seite 57

3.9.5 Berechnung des Wellendruckes für die Scheitellage der stehenden Welle

Gleichung (121) soll für den Augenblick integriert werden, in welchem die stehende Welle an der reflektierenden Wand ihre Scheitellage erreicht. In diesem Zeitpunkte ist $t = \frac{T}{4}$ (vgl. die Fußnote in Abschnitt 3.9.2), mithin $\sin(\frac{2\pi}{T} t) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ und $\cos(\frac{2\pi}{T} \cdot t) = 0$. Der in den beiden letzten Summanden auf der rechten Seite der Gleichung (121) auftretende Faktor

$$\cos\left(\frac{4\pi}{T} \cdot t\right)$$

hat in diesem Augenblick den Wert $\cos(\pi) = -1$. An der Wand hat die stehende Welle einen Schwingungsbauch, deshalb ist dort nach Gleichung (99) : $\sin\left(\frac{2\pi}{L} x_0\right) = 1$.

Bei dieser Integration nach z_0 müssen die Halbachsen r und r' der Bahnellipsen gemäß den Gleichungen (97) und (98) als Funktionen von z_0 betrachtet werden. Integriert wird vom Ruhewasserspiegel ($z_0 = 0$) bis zu einem beliebigen Werte z_0 , der der Bedingung $z_0 \leq d$ genügt.

Die Integration des 1. Summanden ergibt :

$$(122) \int_0^{z_0} 1 \, dz_0 = z_0 .$$

*) Gleichung (121) entspricht der Gleichung (17) in NAGAI's Bericht [1]. Ein Vergleich der Terme dieser beiden Gleichungen zeigt folgendes : Der vorletzte Summand auf der linken Seite von NAGAI's Gleichung enthält einen erheblichen Druckfehler. Dieser Summand enthält als vorletzten Faktor :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right).$$

Dieser Faktor muß lauten : $\cos\left(\frac{4\pi}{T} t\right)$.

Die rechte Seite von NAGAI's Gleichung (17) enthält ebenfalls Druckfehler.

Um Verwechslungen zu vermeiden, ist hier für die Wassertiefe statt der von NAGAI verwendeten Abkürzung "h" die Abkürzung "d" verwendet worden.

In dem betrachteten Augenblick ($t = \frac{T}{4}$) nimmt der 2. Summand der linken Seite von (121) an der Wand ($x_0 = \frac{L}{4}$, s.o.) die Form an :

$$- 2 m r' \cdot \tanh (md) + 2 m r$$

Nach Einsetzen von r und r' gemäß (97) und (98) kann man diesem Summanden bei Berücksichtigung der Beziehung: $\sinh (-\alpha) = -\sinh (\alpha)$ in der Form schreiben :

$$+ m H \cdot \left[\frac{\sinh(m(z_0-d))}{\cosh(md)} + \frac{\cosh(m(z_0-d))}{\sinh(md)} \right] \text{ oder}$$

$$+ m H \cdot \left[\frac{\sinh(m(z_0-d)) \cdot \sinh(md) + \cosh(m(z_0-d)) \cdot \cosh(md)}{\cosh(md) \cdot \sinh(md)} \right]$$

Wegen der Beziehung (58) kann man das Integral des zweiten Summanden auf der linken Seite von (121) in der Form schreiben :

$$\frac{2mH}{\sinh(2md)} \cdot \int_0^{z_0} \left[\sinh(m(z_0-d)) \cdot \sinh(md) + \cosh(m(z_0-d)) \cosh(md) \right] dz_0$$

Die Ausführung der Integration nach z_0 ergibt :

$$\frac{2H}{\sinh(2md)} \left[\cosh(m(z_0-d)) \sinh(md) + \sinh(m(z_0-d)) \cosh(md) \right] ,$$

da das unbestimmte Integral für $z_0=0$ verschwindet. Nun gilt ganz allgemein für beliebiges α und beliebiges β :

$$\sinh (\alpha) \cdot \cosh (\beta) + \cosh (\alpha) \cdot \sinh (\beta) = \sinh (\alpha+\beta) .$$

Setzt man also : $\alpha = m(z_0-d)$ und $\beta = md$, so nimmt der Inhalt der eckigen Klammer die Form an :

$$\left[\sinh((mz_0-md) + (md)) \right] = \sinh (mz_0)$$

Dem Integral des zweiten Summanden kann man daher die endgültige Form geben :

$$(123) \frac{2 H}{\sinh(2md)} \cdot \sinh (mz_0)$$

Bei Scheitellage der stehenden Welle an der Wand ($t = \frac{T}{4}$; $x_0 = \frac{L}{4}$),

nimmt wegen $\cos^2\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) = \cos^2\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ der 3. Summand auf der linken Seite der Gleichung (121) die Form an :

$$\begin{aligned}
 & - \frac{32 \pi^2}{L^2} \cdot \tanh(md) \cdot r \cdot r' = \\
 = & - \frac{2 H^2 \cdot m^2}{\sinh^2(md)} \cdot \frac{\sinh(md)}{\cosh(md)} \cdot \cosh(m(d-z_0)) \cdot \sinh(m(d-z_0))
 \end{aligned}$$

Wegen der Beziehung (58) und wegen $\sinh(-\alpha) = -\sinh(\alpha)$ kann man diesen Summanden weiter umformen zu :

$$+ \frac{4 m^2 \cdot H^2}{\sinh(2md)} \cdot \cosh(m(z_0 - d)) \cdot \sinh(m(z_0 - d)) .$$

Zur Erleichterung der Integration kann man dem zu berechnenden Integral nun die Form geben :

$$\frac{2 m^2 \cdot H^2}{\sinh(2md)} \cdot \int_0^{z_0} 2 \cdot \sinh(m(z_0 - d)) \cdot \cosh(m(z_0 - d)) dz_0$$

Ausrechnung des Integrals führt zu :

$$\frac{2 m^2 \cdot H^2}{\sinh(2md)} \cdot \frac{1}{m} \cdot \left[\sinh^2(m(z_0 - d)) - \sinh^2(-md) \right]$$

Dafür kann man schreiben :

$$\frac{m H^2}{\sinh(2md)} \cdot \left[2 \cdot \sinh^2(m(d - z_0)) - 2 \cdot \sinh^2(md) \right]$$

Diesen Ausdruck kann man umformen in :

$$\frac{m \cdot H^2}{\sinh(2md)} \cdot \left[1 + 2\sinh^2(m(d - z_0)) - (1 + 2\sinh^2(md)) \right]$$

Nach Gleichung (55) kann man setzen :

$$\cosh^2(m(d - z_0)) - \sinh^2(m(d - z_0)) = 1 \quad \text{und außerdem :}$$

$$\cosh^2(md) - \sinh^2(md) = 1 .$$

Damit nimmt das Integral die Form an :

$$\frac{m H^2}{\sinh(2md)} \cdot \left[\cosh^2(m(d-z_0)) + \sinh^2(m(d-z_0)) - \right. \\ \left. - (\cosh^2(md) + \sinh^2(md)) \right]$$

Nun ist :

$$\cosh^2(\alpha) + \sinh^2(\alpha) = \\ = \frac{1}{4} \left[(e^{2\alpha} + 2 + e^{-2\alpha}) + (e^{2\alpha} - 2 + e^{-2\alpha}) \right] = \\ (124) \quad = \frac{e^{2\alpha} + e^{-2\alpha}}{2} = \cosh(2\alpha)$$

Damit erhält man für das Integral des 3. Summanden auf der linken Seite der Gleichung (121) :

$$(125) \quad \frac{m \cdot H^2}{\sinh(2md)} \cdot \left[\cosh(2m(d-z_0)) - \cosh(2md) \right] .$$

Der vierte Summand auf der linken Seite der Gleichung (121) kann gemäß den Gleichungen (97) und (98) umgeformt werden zu :

$$\frac{m^2 \cdot H^2}{2 \sinh^2(md)} \cdot \left[\cosh^2(m(z_0-d)) + \sinh^2(m(z_0-d)) \right]$$

Bei Berücksichtigung von (124) nimmt hier das zu berechnende Integral die Form an :

$$\frac{m^2 \cdot H^2}{2 \sinh^2(md)} \cdot \int_0^{z_0} \cosh(2m(z_0-d)) dz_0 = \\ = \frac{m^2 \cdot H^2}{2 \sinh^2(md)} \cdot \frac{1}{2m} \left[\sinh(2m(z_0-d)) - \sinh(2m(-d)) \right] = \\ (126) \quad - \frac{m \cdot H^2}{4 \sinh^2(md)} \cdot \left[\sinh(2m(d-z_0)) - \sinh(2md) \right]$$

Der 5. Summand auf der linken Seite von Gleichung (121) läßt sich wegen :

$$\left[\cosh^2(m(d-z_0)) + \sinh^2(m(d-z_0)) \right] = \cosh(2m(d-z_0))$$

in der Form schreiben :

$$- \frac{m^3 \cdot H^3}{2} \cdot \frac{\tanh(md)}{\sinh^3(md)} \cdot \sinh(m(d-z_0)) \cdot \cosh(2m(d-z_0)),$$

wenn wieder r und r' nach (97) und (98) eingesetzt werden.

Wegen $\cos\left(\frac{4\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}\right) = -1$ kann man dem 6. Summanden die Form geben :

$$- \frac{m^3 \cdot H^3}{2} \cdot \frac{\tanh(md)}{\sinh^3(md)} \cdot 2 \cdot \sinh(m(d-z_0)) \cdot \cosh^2(m(d-z_0))$$

Da $\sinh(-\alpha) = -\sinh(\alpha)$ ist, lassen der 5. und der 6. Summand sich nunmehr vereinigen zu (127) :

$$\frac{m^3 \cdot H^3 \cdot \sinh(m(z_0-d))}{2 \cdot \sinh^2(md) \cosh(md)} \cdot \left[\cosh(2m(z_0-d)) + 2 \cosh^2(m(z_0-d)) \right]$$

Nun gilt für beliebige Werte von α :

$$\begin{aligned} (128) \quad \sinh(3\alpha) &= \sinh(\alpha + (2\alpha)) = \\ &= \sinh(\alpha) \cdot \cosh(2\alpha) + \cosh(\alpha) \cdot \sinh(2\alpha) = \\ &= \sinh(\alpha) \cdot \cosh(2\alpha) + \cosh(\alpha) \left[2 \cdot \sinh(\alpha) \cdot \cosh(\alpha) \right] = \\ &= \sinh(\alpha) \cdot \left[\cosh(2\alpha) + 2 \cosh^2(\alpha) \right] \end{aligned}$$

Setzt man in (128) für α das Argument $(m(z_0-d))$, geht der Ausdruck (127) für die Summe des 5. und 6. Summanden der linken Seite von (121) über in :

$$\frac{m^3 \cdot H^3}{2 \cdot \sinh^2(md) \cdot \cosh(md)} \cdot \sinh(3m(z_0-d))$$

Die Integration über das Intervall $(0 \dots z_0)$ liefert daher den Ausdruck :

$$\begin{aligned} &\frac{m^3 \cdot H^3}{2 \sinh^2(md) \cdot \cosh(md)} \left[\frac{1}{3m} (\cosh(3m(d-z_0)) - \cosh(3md)) \right] = \\ (129) \quad &\frac{m^2 \cdot H^3}{6 \sinh^2(md) \cdot \cosh(md)} \left[\cosh(3m(d-z_0)) - \cosh(3md) \right] \end{aligned}$$

Setzt man zur Abkürzung : $m(d-z_0) = \alpha$ und berücksichtigt wieder : $\cos\left(\frac{4\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}\right) = -1$ und $\cosh^2(\alpha) + \sinh^2(\alpha) = \cosh(2\alpha)$,

so nimmt der letzte Summand auf der linken Seite von Gleichung (121) nach Einsetzen von r und r' gemäß den Gleichungen (97) und (98) zunächst die Form an :

$$- \frac{8 m^4 \cdot H^4 \cdot \sinh(md)}{16 \sinh^4(md) \cosh(md)} \cdot \cosh(\alpha) \cdot \sinh(\alpha) \cdot \cosh(2\alpha)$$

Nach Gleichung (58) ist :

$$\left[\cosh(\alpha) \cdot \sinh(\alpha) \right] \cdot \cosh(2\alpha) = \cosh(2\alpha) \cdot \left[\frac{1}{2} \sinh(2\alpha) \right]$$

Nochmalige Anwendung dieser Beziehung liefert :

$$\frac{1}{2} \sinh(2\alpha) \cdot \cosh(2\alpha) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sinh(4\alpha) .$$

Setzt man nun wieder statt α : $m(d-z_0)$ und beachtet, daß $\sinh(-4\alpha) = -\sinh(4\alpha)$ ist, kann man dem letzten Summanden die Form geben :

$$+ \frac{m^4 \cdot H^4}{8 \sinh^3(md) \cdot \cosh(md)} \cdot \sinh(4m(z_0-d))$$

In dieser Form läßt sich der Ausdruck leicht integrieren. Wegen

$$\int \sinh(4m(z_0-d)) dz = \frac{\cosh(4m(z_0-d))}{4m} = \frac{\cosh(4m(d-z_0))}{4m} \text{ er-}$$

hält man für das Integrationsintervall (0..... z_0) :

$$\frac{m^4 \cdot H^4}{8 \cdot \cosh(md) \cdot \sinh^3(md)} \cdot \frac{1}{4m} \cdot \left[\cosh(4m(z_0-d)) - \cosh(4m(-d)) \right] =$$

$$(130) \frac{m^3 \cdot H^4}{32 \sinh^3(md) \cdot \cosh(md)} \cdot \left[\cosh(4m(d-z_0)) - \cosh(4md) \right]$$

Bei der Integration der rechten Seite von Gleichung (121) ist zu bedenken, daß gemäß Gleichung (104) die Funktion $p(x,z)$ den Druck längs der Bahnkurven der Wasserteilchen angibt. Längs des Integrationsweges entlang der Wand ist

$x_0 = \frac{L}{4}$ und daher nach Gleichung (95) : $x = \frac{L}{4}$. z ergibt sich wegen $t = \frac{T}{4}$ und $x_0 = \frac{L}{4}$ nach Gleichung (99) zu :

$z = z_0 - \frac{4\pi}{L} \cdot r \cdot r' - 2r'$. Die Integration der rechten Seite der Gleichung (121) liefert demnach für das Integrationsintervall (0..... z_0) :

$$\frac{1}{\rho g} \cdot \left[p \left(\frac{L}{4}, \left(z_0 - \frac{4\pi}{L} r r' - 2 r' \right) \right) - p \left(\frac{L}{4}, \left(0 - \frac{4\pi}{L} r_0 \cdot r'_0 - 2 r'_0 \right) \right) \right]$$

Jeder Punkt mit $z_0 = 0$ hat seine Bahn im Ruhewasserspiegel begonnen und bewegt sich nach der elliptisch-trochoidalen Theorie in der Wasseroberfläche, wo der Wasserdruck gleich Null ist.

Damit vereinfacht sich dieses Integral zu :

$$(131) \quad \frac{1}{\rho g} \cdot p \left(\frac{L}{4}, \left(z_0 - \frac{4\pi}{L} \cdot r r' - 2 r' \right) \right)$$

In dem Ausdruck (131) gibt der Inhalt der Klammer hinter dem Buchstaben p den Ort mit den Koordinaten

$$x = \frac{L}{4}, \quad z = z_0 - \frac{4\pi}{L} \cdot r r' - 2 r',$$

in welchem der Druck p erreicht wird.

Setzt man nun für die Integrale der einzelnen Summanden der linken Seite der Gleichung (121) die Ausdrücke (122), (123), (125), (129) und (130) und für das Integral der rechten Seite den Ausdruck (131) ein, erhält man die folgende auf die Scheitellage der stehenden Welle bezogene Wellendruckformel :

$$\begin{aligned} (132) \quad & \frac{1}{\rho g} \cdot p \left(\frac{L}{4}, \left(z_0 - \frac{4\pi}{L} \cdot r r' - 2 r' \right) \right) = \\ & = z_0 + \frac{2 H}{\sinh(2md)} \cdot \sinh(mz_0) + \\ & + \frac{m \cdot H^2}{\sinh(2md)} \cdot \left[\cosh(2m(d-z_0)) - \cosh(2md) \right] - \\ & - \frac{m \cdot H^2}{4 \cdot \sin^2(md)} \cdot \left[\sinh(2m(d-z_0)) - \sinh(2md) \right] + \\ & + \frac{m^2 \cdot H^3}{6 \sinh^2(md) \cdot \cosh(md)} \cdot \left[\cosh(3m(d-z_0)) - \cosh(3md) \right] + \\ & + \frac{m^3 \cdot H^4}{32 \sinh^3(md) \cosh(md)} \cdot \left[\cosh(4m(d-z_0)) - \cosh(4md) \right] \end{aligned}$$

Die rechte Seite der Gleichung (132) stimmt überein mit der rechten Seite der Gleichung (18) des Berichtes von NAGAI. zum XXI. Internationalen Schifffahrtskongress [1] .

Bei Anwendung dieser Formel ist zu beachten, daß der für einen Wert $z_0 \leq d$ von der rechten Seite der Gleichung

chung (132) gelieferte Summenwert nach seiner Multiplikation mit ρg den Druck an der Wand am Ort $z = z_0 - \frac{4\pi}{L} r r' - 2 r'$ darstellt (und nicht etwa am Ort z_0).

Aus diesem Grunde läßt sich die Gleichung (132) nicht nach z_0 integrieren.

3.9.6 Wellendruck am unteren Rande der Wand bei Scheitellage der stehenden Welle (Verbesserung der Formel von SAINFLOU)

Da am Boden $z_0 = d$ ist und folgende einfache Beziehungen gelten:

$$\sinh(2md) = 2 \cdot \sinh(md) \cdot \cosh(md),$$

$$\cosh(0) = 1 \text{ und } \sinh(0) = 0,$$

nimmt für den Druck p_d am Boden die Formel (132) die einfache Form an:

$$(133) \quad \frac{1}{\rho g} \cdot p_d = d + \frac{H}{\cosh(md)} + \\ + \frac{m \cdot H^2}{\sinh(2md)} \cdot (1 - \cosh(2md)) + \\ + \frac{m \cdot H^2}{2} \cdot \coth(md) + \\ + \frac{m^2 \cdot H^3}{6 \sinh^2(md) \cosh(md)} (1 - \cosh(3md)) + \\ + \frac{m^3 \cdot H^4}{32 \sinh^3(md) \cosh(md)} (1 - \cosh(4md))$$

Für $z_0 = d$ ist $r' = 0$, und die linke Seite der Gleichung (132) nimmt die Form an:

$$\frac{1}{\rho g} \cdot p\left(\frac{L}{4}, d\right) = \frac{1}{\rho g} \cdot p_d$$

Nur für $z_0 = d$ ist der Druckwert durch Gleichung (132) dem Ort z_0 selber zugeordnet.

Berücksichtigt man auf der rechten Seite der Gleichung (133) nur die beiden ersten Summanden und vernachlässigt also alle vier folgenden Summanden, dann geht diese

Gleichung in die bekannte Näherungsformel von SAINFLOU über. SAINFLOU setzt nämlich bei Scheitellage der stehenden Welle für den Druck p_d am Boden :

$$(134) p_d = \rho g \cdot \left[d + \frac{H}{\cosh(md)} \right]$$

Die vertikale Verteilung des Druckes längs der Wand nimmt SAINFLOU linear an. Er verbindet also den durch Gleichung (134) bestimmten Näherungswert p_d als "Punkt an der Sohle" geradlinig mit dem Scheitelpunkt der Welle, der wegen

$z = 0 - \frac{4\pi}{L} r \cdot r' - 2 r'$ und wegen der Gleichungen (97) und (98) um

$$\left[H + \frac{\pi \cdot H^2}{L} \cdot \coth(md) \right]$$

oberhalb des Ruhewasserspiegels liegt.

Statt dessen müssen der durch die vollständige Gleichung (133) bestimmte "Punkt an der Sohle" und der Wellenscheitel durch eine nicht-lineare Druckverteilungskurve verbunden werden. Diese Druckverteilungskurve muß nach Gleichung (132) punktweise konstruiert werden.

3.10 Berechnung der Wellendruckwerte für beliebige Wellenphasen auf der Grundlage der elliptisch-trochoidalen Wellentheorie (Verallgemeinerungen und Ergänzungen zur Theorie NAGAI'S)

Die von NAGAI mitgeteilten Gleichungen (132) und (133) reichen nicht aus, um den Maximalwert des von der reflektierten Welle erzeugten Druckes auf der Grundlage der elliptisch-trochoidalen Wellentheorie zu berechnen, da sich diese beiden Gleichungen auf die Scheitellage der stehenden Welle an der reflektierenden Wand beziehen. In der Scheitellage der stehenden Welle an der Wand tritt ja dort der Maximalwert des Druckes relativ selten auf.

Zur Berechnung des Maximaldruckes auf der Grundlage der elliptisch-trochoidalen Wellentheorie müssen deshalb zunächst die Gleichungen (132) und (133) durch allgemeine Gleichungen ersetzt werden, die den Druck auf die reflektierende Wand für alle Wellenphasen zur Darstellung bringen.

Diese allgemeinen Formeln bekommt man durch eine allgemeine Integration der Gleichung (121) über die reflektierende Wand. Zur Erleichterung der Durchführung dieser

allgemeinen Integration sollen zunächst der fünfte und der sechste Summand auf der linken Seite der Gleichung (121) in passender Weise umgeformt werden, da sie sich nur für die Scheitellage der Welle zu einem einfachen Ausdruck zusammenfassen lassen.

Es werde wieder zur Abkürzung gesetzt :
 $m(d-z_0) = \alpha$. Es ist :

$$\begin{aligned} & \sinh(\alpha) \cdot [\cosh^2(\alpha) + \sinh^2(\alpha)] = \\ & = \sinh(\alpha) \cdot \cosh(2\alpha) = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2} \cdot \frac{e^{2\alpha} + e^{-2\alpha}}{2} = \\ & = \frac{1}{4} [e^{3\alpha} - e^\alpha + e^{-\alpha} - e^{-3\alpha}] = \frac{1}{4} [e^{3\alpha} - e^{-3\alpha}] - \frac{1}{4} [e^\alpha - e^{-\alpha}] \\ & = \frac{1}{2} \sinh(3\alpha) - \frac{1}{2} \sinh(\alpha) . \end{aligned}$$

Also für $\alpha = m(d-z_0)$:

$$\begin{aligned} (135) \sinh(m(d-z_0)) \cdot [\cosh^2(m(d-z_0)) + \sinh^2(m(d-z_0))] & = \\ & = \frac{1}{2} \sinh(3m(d-z_0)) - \frac{1}{2} \sinh(m(d-z_0)) \end{aligned}$$

Setzt man nun zur Abkürzung :

$$[\sinh(3m(z_0-d)) - \sinh(m(z_0-d))] = A,$$

so nimmt bei Berücksichtigung der Gleichungen (97), (98) und (135) wegen $\sinh(-\alpha) = -\sinh(\alpha)$ der fünfte Summand auf der linken Seite der Gleichung (121) zunächst die Form an :

$$+ \frac{32\pi^3}{L^3} \cdot \frac{H^3}{8} \cdot \frac{\tanh(md)}{\sinh^3(md)} \cdot \sin^3\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{L} \cdot x_0\right) \cdot \frac{1}{2} [A] .$$

Wegen $m = \frac{2\pi}{L}$ läßt sich dieser Ausdruck vereinfachen zu :

$$+ \frac{m^3 \cdot H^3 \cdot \sin^3\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{L} x_0\right)}{4 \cdot \sinh^2(md) \cdot \cosh(md)} \cdot [A]$$

Da nur A von z_0 abhängt und

$$\int_0^{z_0} [A] dz_0 = \frac{1}{3m} \cdot [\cosh(3m(d-z_0)) - 3 \cosh(m(d-z_0)) - \cosh(3md) + 3 \cosh(md)]$$

ist, ergibt sich für das Integral des fünften Summanden auf der linken Seite der Gleichung (121) der Ausdruck :

$$(136) + \frac{m^2 \cdot H^3 \cdot \sin^3\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{L} x_0\right)}{12 \sinh^2(md) \cdot \cosh(md)} \cdot \left[\cosh(3m(d-z_0)) - 3 \cosh(m(d-z_0)) - \cosh(3md) + 3 \cosh(md) \right]$$

Die Integration des 6. Summanden auf der linken Seite der allgemeinen Gleichung (121) wird erleichtert durch passende Umformung von :

$$\left[\sinh(m(d-z_0)) \cdot \cosh^2(m(d-z_0)) \right] .$$

Setzt man wieder zur Abkürzung : $m(d-z_0) = \alpha$, so gilt :

$$\begin{aligned} \sinh(\alpha) \cdot \cosh^2(\alpha) &= \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2} \cdot \frac{(e^\alpha + e^{-\alpha})^2}{4} = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{e^{3\alpha} - e^\alpha + e^{-\alpha} - e^{-3\alpha} + 2(e^\alpha - e^{-\alpha})}{2} \right] = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left[\sinh(3\alpha) + \sinh(\alpha) \right] ; \text{ also für } \alpha = m(d-z_0) \end{aligned}$$

gilt die Gleichung :

$$(137) \sinh(m(d-z_0)) \cdot \cosh^2(m(d-z_0)) = \frac{1}{4} \left[\sinh(3m(d-z_0)) + \sinh(m(d-z_0)) \right]$$

Setzt man nun zur Abkürzung für $\left[\sinh(3m(z_0-d)) + \sinh(m(z_0-d)) \right]$ den Buchstaben B und beachtet, daß $\sinh(-\alpha) = -\sinh(\alpha)$ ist, so kann man bei Berücksichtigung der Gleichungen (97), (98) und (137) dem 6. Summanden auf der linken Seite der allgemeinen Gleichung (121) die Form geben :

$$- \frac{m^3 \cdot H^3 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \cdot \cos\left(\frac{4\pi}{T} t\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{L} x_0\right)}{4 \cdot \sinh^2(md) \cdot \cosh(md)} \cdot [B]$$

Da nur B von z_0 abhängt und

$$\int_0^{z_0} [B] \cdot dz_0 = \frac{1}{3m} \cdot \left[\cosh(3m(d-z_0)) + 3 \cosh(m(d-z_0)) - \cosh(3md) - 3 \cosh(md) \right]$$

ist, bekommt man für das Integral des 6. Summanden auf der linken Seite der allgemeinen Gleichung (121) :

$$(138) - \frac{m^2 \cdot H^3 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \cdot \cos\left(\frac{4\pi}{T} t\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{L} x_0\right)}{12 \cdot \sinh^2(md) \cdot \cosh(md)} \left[\cosh(3m(d-z_0)) + \right. \\ \left. + 3 \cosh(m(d-z_0)) - \cosh(3md) - 3 \cosh(md) \right]$$

Da an der reflektierenden Wand die horizontale Komponente der elliptisch-trochoidalen Bewegung für alle Wellenphasen verschwinden muß, ist dort nach Gleichung (95) ganz allgemein :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{L} x_0\right) = 0 \quad \text{und daher} \quad x_0 = \frac{L}{4} = x \quad \text{und}$$

$$\sin\left(\frac{2\pi}{L} x_0\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Dementsprechend kann man für die Berechnung des Druckes an der reflektierenden Wand für beliebige Wellenphasen auf der linken Seite der Gleichung (121) für den Faktor $\sin\left(\frac{2\pi}{L} x_0\right)$ überall 1 setzen. In entsprechender Weise vereinfachen sich an der Wand auch die beiden bereits berechneten Integrale (136) und (138).

Die Integrale der anderen Summanden auf der linken Seite der allgemeinen Gleichung (121) kann man auf verhältnismässig einfache Weise durch Vergleich dieser Summanden mit den Ausdrücken (122), (123), (125), (126) und (130) gewinnen, welche die Integrale dieser Summanden für den Augenblick des Auftretens des Wellenscheitels an der Wand darstellen.

Da an der Wand für alle Wellenphasen gilt :

$$x_0 = \frac{L}{4} = x \quad \text{und} \quad \sin\left(\frac{2\pi}{L} x_0\right) = 1$$

und da an der Wasseroberfläche, d.h. für $z_0 = 0$ der Druck den Wert $p_0 = 0$ hat, bekommt man durch Integration der rechten Seite der allgemeinen Gleichung (121) wegen der Gleichungen (104) und (99) den Wert der Funktion $p(x, z)$ an der Stelle der Wand ($x = \frac{L}{4}$) mit der z -Koordinate :

$$(139) \quad z = z_0 - \frac{4\pi}{L} \cdot r \cdot r' \cdot \sin^2\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) - 2r' \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) .$$

In Gleichung (139) sind noch r und r' durch die

Gleichungen (97) und (98) auszudrücken. Dieser Wert p der Funktion $p(x, z)$ soll durch den Ausdruck :

$$(140) \quad p\left(\frac{L}{4}; z_0 - \frac{4\pi}{L} r r' \sin^2\left(\frac{2\pi}{T} t\right) - 2r' \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right)\right)$$

gekennzeichnet werden.

Als Ergebnis der Integration der allgemeinen Gleichung (121) an der Wand ($x_0 = \frac{L}{4} = x$) ergibt sich so die auf der elliptisch-trochoidalen Wellentheorie basierende, für beliebige Wellenphasen ($\frac{2\pi}{T} \cdot t$) geltende Wellendruckformel :

$$(141) \quad \frac{1}{\rho g} \cdot p\left(\frac{L}{4}; z_0 - \frac{4\pi}{L} r r' \sin^2\left(\frac{2\pi}{T} t\right) - 2r' \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right)\right) =$$

$$= z_0 + \frac{2H \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right)}{\sinh(2md)} \cdot \sinh(mz_0) +$$

$$+ \frac{mH^2(2\sin^2\left(\frac{2\pi}{T} t\right) - \cos^2\left(\frac{2\pi}{T} t\right))}{2 \sinh(2md)} \cdot \left[\cosh(2m(d-z_0)) - \cosh(2md) \right] -$$

$$- \frac{mH^2 \cdot \sin^2\left(\frac{2\pi}{T} t\right)}{4\sinh^2(md)} \cdot \left[\sinh(2m(d-z_0)) - \sinh(2md) \right] +$$

$$+ \frac{m^2 H^3 \cdot \sin^3\left(\frac{2\pi}{T} t\right)}{12\sinh^2(md)\cosh(md)} \cdot \left[\cosh(3m(d-z_0)) - \right.$$

$$\left. - 3 \cosh(m(d-z_0)) - \cosh(3md) + 3 \cosh(md) \right] -$$

$$- \frac{m^2 H^3 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \cdot \cos\left(\frac{4\pi}{T} t\right)}{12\sinh^2(md) \cdot \cosh(md)} \left[\cosh(3m(d-z_0)) + \right.$$

$$\left. + 3 \cosh(m(d-z_0)) - \cosh(3md) - 3 \cosh(md) \right] -$$

$$- \frac{m^3 \cdot H^4 \cdot \sin^2\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \cdot \cos\left(\frac{4\pi}{T} t\right)}{32\sinh^3(md) \cdot \cosh(md)} \cdot \left[\cosh(4m(d-z_0)) - \cosh(4md) \right]$$

Man überzeugt sich leicht davon, daß bei Auftreten des Wellenscheitels, d.h. für $t = \frac{T}{4}$, $\sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) = 1$, $\cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) = 0$ und $\cos\left(\frac{4\pi}{T} t\right) = -1$ die allgemeine Wellendruckformel (141) in die von NAGAI [1] angegebene spezielle Gleichung (132) übergeht.

Da am Boden $z_0 = d$ ist, ändert sich der Druck am unteren Rande der reflektierenden Wand in Abhängigkeit von der Wellenphase nach der Gleichung :

$$\begin{aligned}
 (142) \quad \frac{1}{\rho g} \cdot p \left(\frac{L}{4}, d \right) &= \\
 &= d + \frac{H \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right)}{\cosh(md)} + \\
 &+ \frac{m \cdot H^2 \cdot \left(2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{T} t\right) - \cos^2\left(\frac{2\pi}{T} t\right)\right)}{2 \sinh(2md)} \cdot \left[1 - \cosh(2md)\right] + \\
 &+ \frac{m H^2 \cdot \sin^2\left(\frac{2\pi}{T} t\right)}{2} \cdot \coth(md) + \\
 &+ \frac{m^2 \cdot H^3 \cdot \sin^3\left(\frac{2\pi}{T} t\right)}{12 \sinh^2(md) \cosh(md)} \cdot \left[3 \cosh(md) - \cosh(3md) - 2\right] - \\
 &- \frac{m^2 \cdot H^3 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \cdot \cos\left(\frac{4\pi}{T} t\right)}{12 \sinh^2(md) \cdot \cosh(md)} \cdot \left[4 - \cosh(3md) - 3 \cosh(md)\right] - \\
 &- \frac{m^3 \cdot H^4 \cdot \sin^2\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \cdot \cos\left(\frac{4\pi}{T} t\right)}{32 \sinh^2(md) \cdot \cosh(md)} \cdot \left[1 - \cosh(4md)\right]
 \end{aligned}$$

Für die Phase des Wellenscheitels ist $\sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) = 1$, $\cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) = 0$ und $\cos\left(\frac{4\pi}{T} t\right) = -1$. Man überzeugt sich leicht davon, daß für diese Wellenphase die allgemeine Gleichung (142) in die von NAGAI angegebene spezielle Gleichung (133) übergeht.

Vermittels der allgemeinen Wellendruckformeln (141) und (142) kann auch der maximale Wert der resultierenden Schubkraft auf die Wand in Mp/m und die zugehörige Wellenphase auf der Grundlage der elliptisch-trochoidalen Wellentheorie berechnet werden.

3.11 Anwendung der von den beiden Theorien gelieferten Berechnungsformeln auf das neue Eidersperrwerk als Berechnungsbeispiel

Es wird auf alle Fälle sehr aufschlußreich sein, die aus sehr verschiedenen theoretischen Grundlagen entwickelten Wellendruckformeln auf das gleiche Berechnungsbeispiel anzu-

wenden und die beiden entsprechenden Berechnungsergebnisse zu vergleichen. Die Annahme der Existenz eines Geschwindigkeitspotentials als Grundlage der einen Theorie und die dagegen in der elliptisch-trochoidalen Theorie gemachten Annahmen sind vom Standpunkt der mathematischen Physik als gegensätzlich und unvereinbar zu betrachten.

Gerade wegen ihrer so wesentlich verschiedenen theoretischen Grundlagen können diese beiden Berechnungsverfahren sich gegenseitig kontrollieren und sich aber auch dadurch gegenseitig in ihrer Aussagekraft stützen, daß sie genügend genau übereinstimmende Berechnungsergebnisse liefern.

Berechnet wird der Druck auf das Eidersperrwerk infolge einer an seiner Wand reflektierten (stehenden) Welle, wobei die Höhe H der anlaufenden (fortschreitenden) Welle gleich ist der größten am Ort des Eidersperrwerkes auftretenden Wellenhöhe.

Es ergeben sich dann folgende Abmessungen : $H = 2,70$ m ; $d = 9,78$ m . Für die mittlere Steilheit einer solchen Welle findet man in dem Nomogramm von DANIEL :

$$\frac{d}{L} = 0,308 ; \quad \frac{H}{L} = 0,086 .$$

Daraus folgt für die Wellenlänge : $L = 31,7$ m . Die zugehörige Periode bekommt man durch Kombination der beiden Gleichungen :

$$c = \frac{L}{T} \quad \text{und} \quad c = \sqrt{\frac{gL}{2\pi} \cdot \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)} . \quad \text{Man findet :}$$
$$T = \frac{L}{\sqrt{\frac{gL}{2\pi} \cdot \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)}} = 4,6 \text{ s}$$

3.11.1 Druckwerte am unteren Rande des Eidersperrwerkes

Es soll zunächst der Druck am unteren Rande der Wand ermittelt werden. Da $\frac{d}{L} = 0,308 < 0,5$ ist, ist bei Anwendung der mit dem v -Potential operierenden Theorie die für Flachwasser geltende Wellendruckformel (71) anzuwenden. In der Phase des Wellenscheitels ist nach Gleichung (1) : $\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) = 1$, d.h. $t = 0$ zu setzen. Dann ist $\eta = H = 2,70$ m und $m = \frac{2\pi}{L} = 0,198 \text{ m}^{-1}$. Setzt man : $\rho g = 1,0 \text{ Mp/m}^2$, erhält man für den Druck am Boden bei Scheitellage der stehenden Welle nach Gleichung (71) :

$$p_d = \left\{ 9,78 + 2,7 \cdot \left[1 + \frac{1}{\cosh(0,198 \cdot 9,78)} - \frac{\cosh(0,198 \cdot 12,48)}{\cosh(0,198 \cdot 9,78)} \right] \right\} \cdot 1$$

$$p_d = \underline{\underline{8,75 \text{ Mp/m}^2}}$$

Für die Scheitellage der stehenden Welle liefert die "Näherungsformel" von SAINFLOU den Bodendruck :

$$p_d = \rho g \cdot d + \frac{H}{\cosh(md)} = 1 \cdot \left(9,78 + \frac{2,7}{3,56} \right)$$

$$p_d = \underline{\underline{10,54 \text{ Mp/m}^2}}$$

Nach der elliptisch-trochoidalen Theorie sind, wie die Gleichung (133) zeigt, auf der rechten Seite der Formel von SAINFLOU vier Summanden unberücksichtigt geblieben. Diese lauten für $(md) = 1,94$; $\sinh(2md) = 24,28$ und $\coth(md) = 1,04$; $\cosh(md) = 3,56$; $\sinh(md) = 3,41$:

$$1.) \frac{0,198 \cdot 2,7^2}{24,28} \cdot (1 - 24,3) = - 1,39$$

$$2.) \frac{1}{2} \cdot 0,198 \cdot 2,7^2 \cdot 1,04 = + 0,75$$

$$3.) \frac{(0,198)^2 \cdot 2,7^3}{6 \cdot 3,41^2 \cdot 3,56} \cdot (1 - 166,1) = - 0,52$$

$$4.) \frac{(0,198)^3 \cdot 2,7^4}{32 \cdot 3,41^3 \cdot 3,56} \cdot (1 - 1180) = - 0,11$$

worin $\cosh(3md) = 166,1$ und $\cosh(4md) = \cosh^2(2md) + \sinh^2(2md) = 24,3^2 + 24,3^2 = 1180$ gesetzt ist.

Die elliptisch-trochoidale Wellentheorie liefert also bei der Reflexion der höchsten Welle für den Bodendruckwert in der Phase des Wellenscheitels :

$$p_d = 1 \cdot (10,54 - 1,39 + 0,75 - 0,52 - 0,11) = \underline{\underline{9,27 \text{ Mp/m}^2}}$$

Zusammenstellung der Ergebnisse :

- a) nach der Formel von SAINFLOU : 10,54 Mp/m²
- b) " IRIBARREN : 10,54 "
- c) auf Grund der v-Potential-Theorie : 8,75 "
- d) nach der elliptisch-trochoidalen Theorie : 9,27 "

Wegen der am Eidersperrwerk vorhandenen relativen Tiefe und Wellensteilheit (DANEL) tritt der maximale Wellendruck am Fuße der Wand nicht in der Phase des Wellenscheitels auf (vgl. Abb. 1). In der Phase des Wellenscheitels tritt ein negativer dynamischer Druckanteil von erheblichem Betrage auf. Den tatsächlichen Verhältnissen können die Verfahren von SAINFLOU und IRIBARREN nicht gerecht werden.

3.11.2 Maximale Druckwerte

Nach der Theorie wird - in Übereinstimmung mit Naturmessungen und Modellversuchen - der maximale Druck in den unteren Bereichen der reflektierenden Wand im allgemeinen nicht bei Scheitellage der stehenden Welle erreicht werden sondern um einen gewissen von $\frac{d}{L}$ und $\frac{H}{L}$ abhängenden Bruchteil der Periode vor und nach dem Eintreten der Scheitellage an der Wand.

Der "exakte" Weg, um diese Zeitpunkte zu bestimmen, wäre eine Differentiation der Gleichung (71) nach t und Auflösen der Gleichung $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$ nach der Zeit t. In der Praxis scheitert diese Methode, da es nicht gelingt, Gleichungen, die Ausdrücke wie $\frac{\partial}{\partial t} [\sin^2(nt) \cdot \cosh^2(mH \cdot \cos(nt))]$ enthalten, nach t aufzulösen.

Man kommt relativ schnell zum Ziel, wenn man den Maximalwert von p direkt aus Gleichung (71) vermittels eines Näherungsverfahrens bestimmt :

1.) Für $t = \frac{T}{4}$ ist nach Gleichung (1) : $n = 0$

und nach Gleichung (71) ist :

$$p_d = 1 \cdot \left[9,78 + \frac{0,198 \cdot 2,7^2 \cdot 1}{24,28} \cdot \left[\cosh^2(0,198 \cdot 9,78) \right] + 0 \right]$$

$$p_d = 10,47 \text{ Mp/m}^2$$

=====

2.) Für $t = \frac{T}{8}$ ist : $\sin(nt) = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0,708$; $\eta = 1,91$ m
 $d + \eta = 11,69$ m; $m \cdot H^2 = 1,44$ m

$$p_d = 1 \cdot \left\{ 9,78 + \frac{1,44 \cdot 0,708^2}{24,28} \cdot \left[\cosh^2(0,198 \cdot 11,69) - 1 \right] + \right. \\ \left. + 1,91 \left[1 + \frac{1}{\cosh(0,198 \cdot 9,78)} - \frac{\cosh(0,198 \cdot 11,69)}{\cosh(0,198 \cdot 9,78)} \right] \right\}$$

$$p_d = 10,24 \text{ Mp/m}^2$$

=====

3.) Für $t = \frac{3}{16} T$: $(nt) = \frac{3}{8} \pi = 67,5$; $\eta = 1,035$ m

$$p_d = 1 \cdot \left\{ 9,78 + \frac{1,44 \cdot 0,854}{24,28} \left[\cosh^2(0,198 \cdot 10,82) - 1 \right] + \right. \\ \left. + 1,035 \left[1 + \frac{1}{3,56} - \frac{\cosh(0,198 \cdot 10,82)}{3,56} \right] \right\}$$

$$p_d = 10,75 \text{ Mp/m}^2$$

=====

Der maximale Druck am Fuße des Eidersperrwerkes wird also bei Reflexion der höchsten Welle etwa zu den Zeitpunkten $\frac{3}{16} T$ vor und nach dem Eintreten der Scheitellage der stehenden Welle an der Wand (d.h. für die Wellenphasen

$$\pm \left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{3}{16} T \right) = \pm 67,5^\circ$$

auftreten.

Zur genaueren Fixierung des Maximums wurde p_d nach Gleichung (71) noch für einige Phasenwinkel in der Umgebung von $67,5^\circ$ berechnet.

Für $(nt) = \pm 70^\circ$:	$p_d = 10,75 \text{ Mp/m}^2$
" $(nt) = \pm 65^\circ$:	$p_d = 10,65 \text{ Mp/m}^2$
" $(nt) = \pm 66,5^\circ$:	$p_d = 10,655 \text{ Mp/m}^2$
" $(nt) = \pm 68^\circ$:	$p_d = 10,755 \text{ Mp/m}^2$

=====

Man braucht die Gleichung (71) nur für positive oder negative Werte des Phasenwinkels (nt) auszuwerten : Da nämlich die Funktion $f(t) = \sin^2(nt)$ und nach Gleichung (1) auch η symmetrisch sind zu $t = 0$, ist auch die rechte Seite der Gleichung (71) symmetrisch zu $(nt) = 0$.

Für $(nt) = + 25^\circ$ und für $(nt) = + 115^\circ$ findet man außerdem noch : $p_d = 9,35 \text{ Mp/m}^2$ bzw. $p_d = -9,58 \text{ Mp/m}^2$. Das Minimum : $p_d = 7,9 \text{ Mp/m}^2$ ($nt = \pm \pi$).

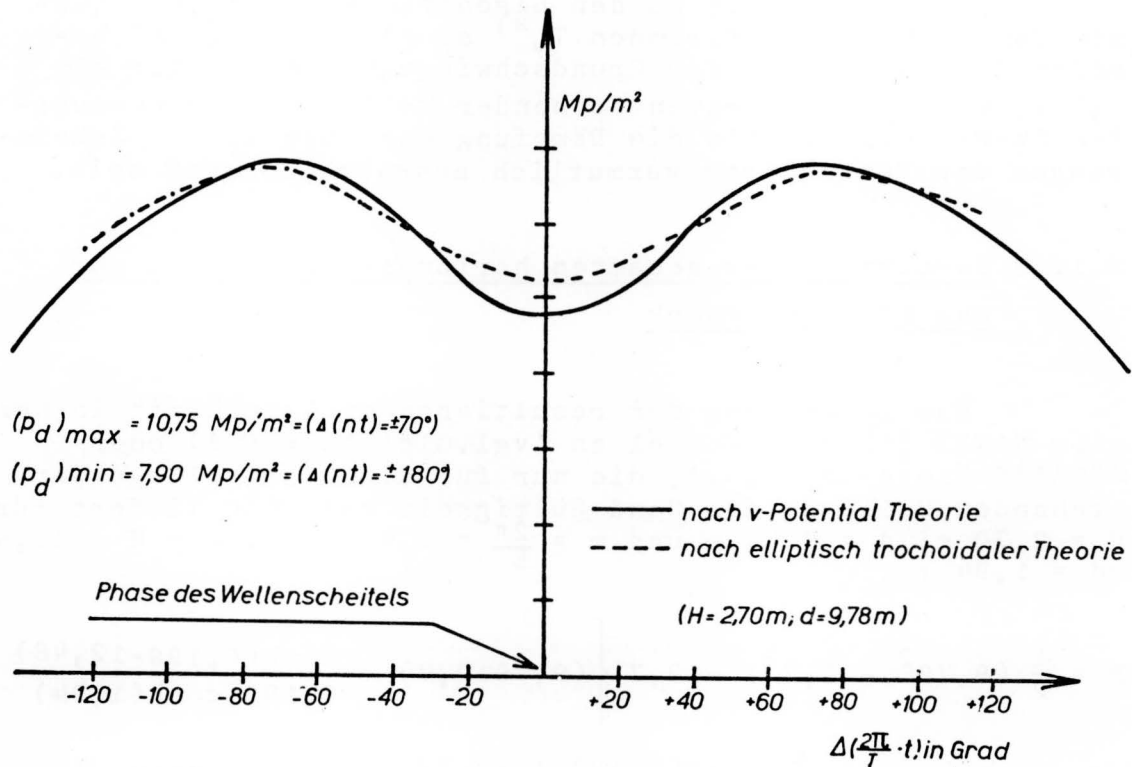


Abb. 2 Druck am Fuß des Eidersperrwerkes bei Reflexion der höchsten Welle in Abhängigkeit von der Wellenphase

In Abb. 2 sind die Bodendruckwerte in ihrer Abhängigkeit vom Phasenwinkel $(\frac{2\pi}{T} T)$ aufgetragen worden. Der Maximalwert des Druckes tritt also am Fuße der Wand des Eidersperrwerkes bei Reflexion der höchsten Welle nicht in der Phase des Wellenscheitels auf, sondern bei einer Wellenphase, die um $\pm 68^\circ$ gegen die Phase des Wellenscheitels verschoben ist.

Im unteren Teil der Verschlüsse des Eidersperrwerkes beträgt diese maximale Druckkraft nur $10,76 \text{ Mp/m}^2$. Die bei weitem größten Druckkräfte auf die Verschlüsse werden durch brechende Wellen größter Steilheit (DANEL) bei den niedrigen Tidewasserständen erzeugt. Jedoch kann eine stehende Welle bei ungünstigen Eigenfrequenzen der Verschlüsse wahrschein-

lich angefachte Schwingungen dieser Bauteile hervorrufen, die zu Zerstörungen führen können. Dabei ist es von Bedeutung, daß zwei anfachende Druckwellen vorhanden sind: Eine mit der Periode T und die andere mit der Periode $\frac{T}{2}$, wie aus einem Vergleich der Gleichungen (71) und (49) folgt. Für die Anfachung von Schwingungen werden im Hinblick auf eine gewisse Mindesthöhe der infrage kommenden Wellen nur Perioden $T > 1$ s eine Rolle spielen können.

Wenn daher die zu den Eigenfrequenzen f_v der Verschlüsse gehörenden Perioden T_v^* so klein sind, daß bereits die Periode T_0 der Grundschwingung kleiner ist als 0,5 s, wird bei Auftreten stehender Wellen mit nennenswerter Schwingungsenergie die Dämpfung der angefachten Schwingungen der Verschlüsse vermutlich ausreichend groß sein.

3.11.3 Berechnung des gesamten horizontalen Schubes auf das Eidersperrwerk

Zur Berechnung der resultierenden Schubkraft in Mp/m gibt NAGAI [1] eine Formel an (vgl. Gleichung (76) oder NAGAI'S Gleichung (13)), die nur für die Scheitellage der stehenden Welle an der Wand Gültigkeit hat. Sie liefert für $H = 2,70$ m; $d = 9,78$ m und $m = \frac{2\pi}{L} = 0,198$ m⁻¹; $d + H = 12,48$ m; $md = 1,94$:

$$P = \frac{1}{2} (9,78^2 - 2,7^2) + 2,7 \left\{ (9,78+2,7) + \frac{\sinh(0,198 \cdot 12,48)}{0,198 \cdot \cosh(1,94)} - (9,78 + 2,7) \cdot \frac{\cosh(0,198 \cdot 12,48)}{\cosh(1,94)} \right\} = 44,0 \text{ Mp/m}$$

=====

Aus Abb. 2 ist zu folgern, daß auch die resultierende Schubkraft auf das Eidersperrwerk nicht bei Scheitellage der stehenden Welle ihren maximalen Wert erreichen wird. Um dieses Maximum zu ermitteln, reichen die von NAGAI angegebenen Formeln nicht aus. Deshalb wurde hier durch Ausbau und Weiterführung der Theorie die allgemeine Gleichung (80) hergeleitet, die den horizontalen Schub in Abhängigkeit von der Wellenphase darstellt und es ermöglicht, die maximale Schubkraft und die zugehörige Wellenphase zu berechnen.

Für die Phasenwinkel $(nt) = \pm 68^\circ$ ist nach Gleichung (1) : $\eta = 2,7 \cdot \cos 68^\circ = 1,014$ m; $d + \eta = 10,79$ m Gleichung (80) liefert für das Eidersperrwerk :

*) $T_v = \frac{1}{f_v}$

$$\begin{aligned}
 P = \int_{-d}^{\eta} pdz &= \frac{1}{2} (9,78^2 - 1,014^2) + \\
 &+ \frac{0,198 \cdot 2,7^2 \cdot \sin^2(68^\circ)}{\sinh(2 \cdot 0,198 \cdot 9,78)} \cdot \left\{ 10,79 \cdot \cosh^2(0,198 \cdot 10,79) - \right. \\
 &- \left. \frac{\sinh(2 \cdot 0,198 \cdot 10,79)}{4 \cdot 0,198} - \frac{10,79}{2} \right\} + \\
 &+ 1,014 \left\{ 10,79 + \frac{\sinh(0,198 \cdot 10,79)}{0,198 \cosh(0,198 \cdot 9,78)} - \right. \\
 &- \left. 10,79 \cdot \frac{\cosh(0,198 \cdot 10,79)}{\cosh(0,198 \cdot 9,78)} \right\} = 59,1 \text{ Mp/m} \\
 &=====
 \end{aligned}$$

Nach der hier hergeleiteten allgemeinen Gleichung (80) wurde die resultierende Schubkraft noch für eine Reihe von Phasenwinkeln der stehenden Welle berechnet. Die Ergebnisse sind in Abb. 3 zur Darstellung gebracht worden.

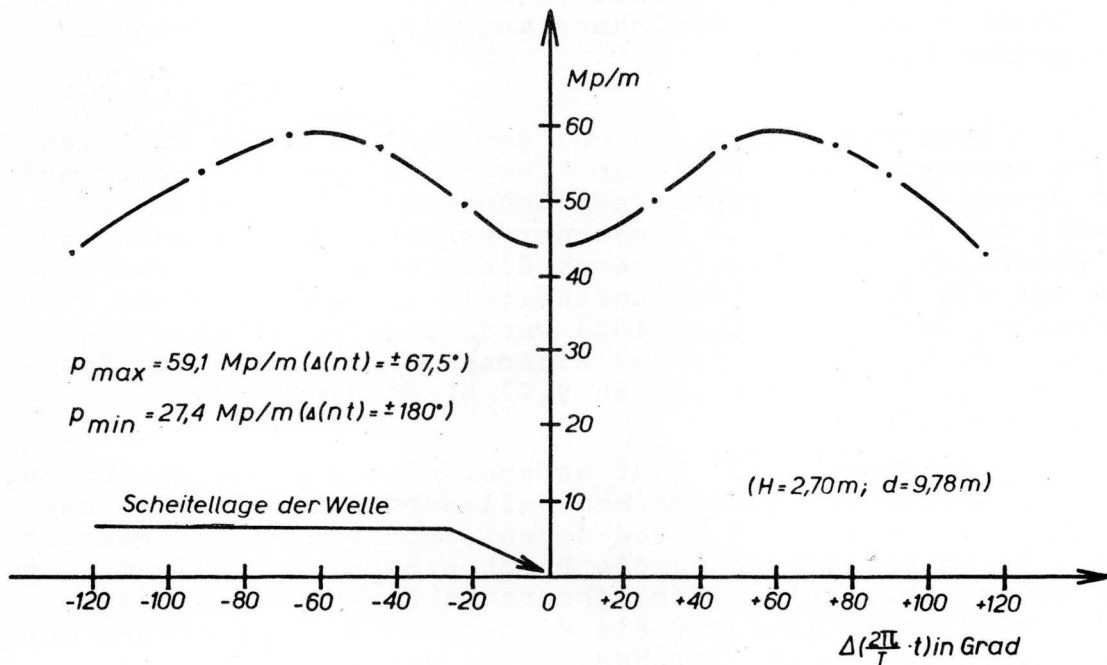


Abb. 3 Resultierende Schubkraft P auf das Eidersperrwerk bei Reflexion der höchsten Welle in Abhängigkeit von der Wellenphase

Ein Vergleich von Abb. 3 mit Abb. 2 zeigt, daß die resultierende Schubkraft ihren Maximalwert nahezu für die gleiche Wellenphase erreicht, wie der Druck am unteren Rande der reflektierenden Wand. Man kann deshalb mit einer für alle Zwecke voll ausreichenden Genauigkeit so vorgehen, daß man zunächst vermittels der relativ einfachen Berechnungsformel (71) die Wellenphasen $\pm \frac{2\pi}{T} t$ mit höchstem Bodendruckwert ermittelt (vgl. Abb. 2). Anschließend kann man dann mit den ermittelten Wellenphasen in Gleichung (80) hineingehen und damit die maximale resultierende Schubkraft bestimmen, die beim Eidersperrwerk 59,1 Mp/m beträgt.

3.11.4 Kontrolle der Ergebnisse vermittels der elliptisch-trochoidalen Theorie

Fast alle bisherigen Berechnungen für das Eidersperrwerk sind auf der Grundlage der v -Potential-Theorie durchgeführt worden. Die Berechnungsergebnisse sollen jetzt vermittels der elliptisch-trochoidalen Theorie kontrolliert werden. Die Anwendung dieser Theorie ist erheblich aufwendiger und komplizierter. Das geht schon aus einem Vergleich der Gleichungen (48) und (69) mit der entsprechenden Gleichung (141) hervor. Besonders die Berechnung der resultierenden Schubkraft ist auf der Grundlage der elliptisch-trochoidalen Theorie aufwendig und kompliziert. Sie ist überhaupt erst durchführbar vermittels der in Abschnitt 3,10 hergeleiteten allgemeinen Wellendruckformel (141), die für beliebige Wellenphasen gilt. Diese Gleichung kann jedoch nicht nach z_0 integriert werden.

Zunächst sollen die bei der Reflexion der höchsten Welle erzeugten Druckwerte am Fuße des Eidersperrwerkes auf der Grundlage der elliptisch-trochoidalen Theorie für eine Anzahl von Wellenphasen berechnet werden. Das hat nach der im Abschnitt 3,10 hergeleiteten Gleichung (142) zu geschehen, die für die Phase des Wellenscheitels in die Gleichung (133) übergeht. Nach Gleichung (133) wurde bereits in Abschnitt 3,11.1 der Druck am Fuße des Eidersperrwerkes für die Scheitellage der höchsten Welle zu 9,27 Mp/m² berechnet.

Gleichung (142) geht andererseits aus der in Abschn. 3,10 hergeleiteten allgemeinen Wellendruckformel (141) dadurch hervor, daß $z_0 = d$ und dementsprechend $r' = 0$ gesetzt wird. Da im nachfolgenden die Durchrechnung der allgemeinen Gleichung (141) selber für mehrere Zahlenbeispiele mitgeteilt wird, soll hier auf die Wiedergabe der Berechnung der Bodendruckwerte nach Gleichung (142) verzichtet werden.

Die leicht nachprüfbaren Ergebnisse dieser Berech-

nungen sind in Abb. 2 zum Vergleich gestrichelt eingetragen worden. Nach der elliptisch-trochoidalen Theorie tritt der maximale Bodendruckwert bei dem Phasenwinkel $(\frac{2\pi}{T} \cdot t) = \approx 70^\circ$ auf mit einem Betrage von $10,65 \text{ Mp/m}^2$ gegenüber $10,75 \text{ Mp/m}^2$ nach der v-Potential-Theorie. Die Differenz der beiden maximalen Werte beträgt nur $\approx 1 \%$.

Da vermittels Gleichung (141) einem Wert z_0 (z_0 ist z-Koordinate der "Anfangslage") der Druck p an der Stelle der Wand mit der z-Koordinate $z = z_0 - \frac{4\pi}{T} \cdot r \cdot r' \sin^2(\frac{2\pi}{T} t) - 2 r' \sin(\frac{2\pi}{T} t)$ zugeordnet wird, läßt sich diese Gleichung nicht nach z_0 integrieren. Deshalb muß zur Berechnung der resultierenden Schubkraft P für einen Phasenwinkel $(\frac{2\pi}{T} t)$ der Druck p vermittels Gleichung (141) für diesen Phasenwinkel und für eine hinreichende Anzahl von Werten z_0 ($0 \leq z_0 \leq d$) berechnet werden und so die Druckverteilungskurve punktweise konstruiert und dann ausplanimetriert werden. Dadurch wird die Berechnung der P-Kurve aufgrund der elliptisch-trochoidalen Theorie sehr aufwendig. Deshalb soll hier auf die Berechnung der Vergleichskurve für Abb. 3 verzichtet werden. Statt dessen soll gezeigt werden, daß der Unterschied zu dieser Vergleichskurve in der Nähe des Maximums von P , also in der Umgebung der Stelle $nt = 65^\circ$ vernachlässigbar gering ist. Hierzu genügt es zu zeigen, daß in der Umgebung der Phase $\Delta \frac{2\pi}{T} \cdot t = 65^\circ$ *) jede nach der elliptisch-trochoidalen Theorie berechnete Druckverteilungskurve mit der entsprechenden nach der v-Potential-Theorie berechneten Druckverteilungskurve nahezu übereinstimmt. An der Stelle der allgemeinen Führung dieses Beweises wird der behauptete Sachverhalt für die aus der Umgebung von $\Delta(nt) = 65^\circ$ beliebig herausgegriffene Phase $\Delta(nt) = 70^\circ$ *) demonstriert. Hierzu werden für diese Wellenphase die Punkte der Druckverteilungskurve an den Stellen, die $z_0 = 0$; $z_0 = \frac{1}{3} d$, $z_0 = \frac{2}{3} d$ und $z_0 = d$ entsprechen, zunächst aufgrund der elliptisch-trochoidalen Theorie, also nach der in Abschnitt 3.10 hergeleiteten Gleichung (141), und anschließend aufgrund der v-Potential-Theorie nach Gleichung (69) berechnet.

Für $z_0 = 0$ folgt aus Gleichung (141) : $p = 0$. Der dem Wert $z_0 = 0$ entsprechende Punkt an der Wand liegt in der Wasseroberfläche, daher ergibt für ihn auch Gleichung (69): $p = 0$.

*) $\Delta(nt) = \pm 65^\circ$ heißt: Um einen Phasenwinkel von 65° bzw. 70° vor bzw. nach Eintreten der Scheitellage der stehenden Welle an der Wand. Diese Schreibweise ist hier gewählt worden, weil nach (141) die Scheitellage für $(nt) = \frac{\pi}{2}$, dagegen nach Formel (69) für $(nt) = 0$ eintritt. In Gleichung (141) ist daher für $\sin(nt)$ hier nicht $\sin(70^\circ)$ sondern $\sin(90^\circ + 70^\circ) = \sin(20^\circ)$ und für $\cos(2nt)$: $\cos(40^\circ) = \sin(50^\circ)$ zu setzen.

Setzt man wieder $\rho g = 1,0 \text{ Mp/m}^3$, so liefert Gleichung (141) für $\Delta(\eta t) = \pm 70^\circ$, $z_0 = \frac{d}{3}$, $m = 0,198 \text{ m}^{-1}$, $H = 2,70 \text{ m}$;
 $2m \cdot (d-z_0) = m \cdot \frac{4}{3} d$ usw. :

$$\begin{aligned}
 1 \cdot p &= 3,26 + \frac{2 \cdot 2,7 \cdot 0,342}{24,9} \cdot 0,693 + \\
 &+ \frac{0,198 \cdot 2,7^2 (2 \cdot 0,117 - 0,882)}{2 \cdot 24,9} \cdot [6,65 - 24,9] - \\
 &- \frac{0,198 \cdot 2,7^2 \cdot 0,117}{4 \cdot 3,46^2} \cdot [6,58 - 24,9] + \\
 &+ \frac{0,198^2 \cdot 2,7^3 \cdot 0,04}{12 \cdot 3,46^2 \cdot 3,56} \cdot [24,0 - 3 \cdot 1,95 - 176 + 3 \cdot 3,56] - \\
 &- \frac{0,198^2 \cdot 2,7^3 \cdot 0,342 \cdot 0,766}{12 \cdot 3,46^2 \cdot 3,56} \cdot [24,0 + 3 \cdot 1,95 - 176 - 3 \cdot 3,56] - \\
 &- \frac{0,198^3 \cdot 2,7^4 \cdot 0,117 \cdot 0,766}{32 \cdot 3,46^3 \cdot 3,56} \cdot [87 - 1242] = \underline{\underline{3,78 \text{ Mp/m}^2}}
 \end{aligned}$$

Für die zugehörige Höhe an der reflektierenden Wand ist:

$$\begin{aligned}
 z &= 3,26 - \frac{2 \cdot 0,198 \cdot 1,959 \cdot 1,685 \cdot 2,7^2 \cdot 0,117}{4 \cdot 3,55^2} - \\
 &- 2,7 \cdot \frac{1,685}{3,55} \cdot 0,342 = \underline{\underline{+ 2,80}}
 \end{aligned}$$

D.h. der Punkt, in dem der Druck p auftritt, liegt 2,80 m unter dem Ruhewasserspiegel.

Bei Anwendung der v -Potential-Theorie auf diesen Punkt der Wand ist nach Abschn. 3.1 (beachte die Richtung der z -Achse und Gleichung (1)) zu setzen : $d + z = 6,98 \text{ m}$, $m \cdot (d+z) = 1,383$; $m \cdot (d+\eta) = 2,12$, $\cosh(m(d+z)) = 2,118$; $\cosh(m(d+\eta)) = 4,25$; $\eta t = \pm 70^\circ$ (vgl. die Fußnote auf S.79). Die den beiden Theorien zugrundegelegten verschiedenen Koordinatensysteme und Zeitachsen wurden von NAGAI [1] übernommen, damit die in dieser Arbeit hergeleiteten Formeln mit denen NAGAI'S leichter zu vergleichen sind). Wird wieder $\rho g = 1,0 \text{ t/m}^3$ gesetzt, erhält man aufgrund der v -Potential-Theorie für den Druck an der gleichen Stelle der Wand nach Gleichung (69) :

$$\begin{aligned}
 p &= 1 \cdot \left\{ 2,80 + \frac{0,198 \cdot 2,7^2 \cdot 0,883}{24,6} \cdot [4,25^2 - 2,118^2] + \right. \\
 &\left. + 0,925 \left[1 + \frac{2,118}{3,56} - \frac{4,25}{3,56} \right] \right\} = \underline{\underline{3,83 \text{ Mp/m}^2}} \quad (\text{gegenüber } 3,78 \text{ Mp/m}^2 \text{ s.o.})
 \end{aligned}$$

Der Unterschied zwischen den beiden Ergebnissen beträgt $\approx 1\%$.

Für den nächsten Punkt der Druckverteilungskurve :
 $z_0 = \frac{2}{3} d$ ergibt sich aufgrund der elliptischen h-trochoidalen
 Theorie nach der in Abschn. 3.10 hergeleiteten Gleichung
 (141) :

$$\begin{aligned}
 1 \cdot p &= 6,52 + \frac{2 \cdot 2,7 \cdot 0,342}{24,9} \cdot 1,675 + \\
 &+ \frac{0,198 \cdot 2,7^2 (2 \cdot 0,117 - 0,882)}{2 \cdot 24,9} \cdot [1,95 - 24,9] - \\
 &- \frac{0,198 \cdot 2,7^2 \cdot 0,117}{4 \cdot 3,46^2} \cdot [1,675 - 24,9] + \\
 &+ \frac{0,198^2 \cdot 2,7^3 \cdot 0,04}{12 \cdot 3,46^2 \cdot 3,56} [3,56 - 3 \cdot 1,217 - 176 + 3 \cdot 3,56] - \\
 &- \frac{0,198^2 \cdot 2,7^3 \cdot 0,342 \cdot 0,766}{12 \cdot 3,46^2 \cdot 3,56} [3,56 + 3 \cdot 1,217 - 176 - 3 \cdot 3,56] - \\
 &- \frac{0,198^3 \cdot 2,7^4 \cdot 0,117 \cdot 0,766}{32 \cdot 3,46^3 \cdot 3,56} \cdot [6,65 - 1242]
 \end{aligned}$$

$$p = 7,23 \text{ Mp/m}^2$$

=====

Für die zugehörige Höhe an der reflektierenden Wand
 ist :

$$\begin{aligned}
 z &= 6,52 - \frac{2 \cdot 0,198 \cdot 1,217 \cdot 0,693 \cdot 2,7^2 \cdot 0,117}{4 \cdot 3,55^2} - \\
 &- 2,7 \cdot \frac{0,693}{3,55} \cdot 0,342 = 6,33 \text{ m}
 \end{aligned}$$

D.h. daß der Punkt, in dem dieser Druck p auftritt, 6,33 m
 unterhalb des Ruhewasserspiegels liegt.

Bei Anwendung der v-Potential-Theorie auf denselben
 Punkt gibt Gleichung (69) :

$$\begin{aligned}
 1 \cdot p &= 6,33 + \frac{0,198 \cdot 2,7^2 \cdot 0,883}{24,6} \cdot [4,25^2 - 1,245^2] \\
 &+ 0,925 \cdot \left[1 + \frac{1,245}{3,56} - \frac{4,25}{3,56} \right] = 7,32 \text{ Mp/m}^2
 \end{aligned}$$

=====

Auch in dieser Höhe unterscheiden sich die nach den beiden Theorien berechneten Druckverteilungskurven nur um $\approx 1\%$.

Für $z_0 = d$, also am Boden, beträgt nach Abb. 2 der nach der elliptisch-trochoidalen Theorie berechnete Druckwert für $\Delta(nt) = \pm 70^\circ$: $p = 10,65 \text{ Mp/m}^2$ und der nach der v -Potential-Theorie berechnete entsprechende Wert : $p = 10,75 \text{ Mp/m}^2$.

Die nach den beiden verschiedenen Theorien berechneten Druckverteilungskurven unterscheiden sich in den vier untersuchten Höhen an der Wand nur um $\approx 1\%$. Daraus ist zu schließen, daß die von den beiden Kurven eingeschlossenen Flächen, d.h. die resultierenden Schubkräfte P , die aufgrund der beiden Theorien berechnet werden, sich in der Umgebung der Wellenphase, in der der Maximalwert von P erreicht wird, auch nur um etwa 1% unterscheiden können. Also auch hinsichtlich der Größe der maximalen Schubkraft auf das Eidersperrwerk und der zu diesem Maximalwert gehörenden Wellenphase führen die v -Potential-Theorie und die elliptisch-trochoidale Theorie zu Ergebnissen von erstaunlich guter Übereinstimmung. Für diesen Maximalwert ergibt sich auf der Grundlage dieser beiden in ihrem Wesen sehr verschiedenen Theorien übereinstimmend :

$$P_{\max} = 59 \text{ Mp/m für die Wellenphasen } 65^\circ$$

vor und nach Eintreten der Scheitellage der stehenden Welle an der Wand.

4. Schrifttum

- [1] NAGAI, S. : Wave pressures on various types of vertical-wall breakwaters, Bericht zum XXI. Internationalen Schiffahrtskongreß Stockholm 1965 Sektion II, Subject 1.

Regierungsbaudirektor Dr.-Ing. Heinz Zweck

Baugrunduntersuchungen mit Sonden

gemäß DIN 4094 mit Auswertungsmöglichkeiten*)

*) Vortrag während eines Baufachseminars über "Praktische Fragen des Baugrundes" in der Technischen Akademie Bergisch Land.

G l i e d e r u n g

1. Einleitung
2. Ramm- und Drucksondiergeräte
3. Wahl des Gerätes
4. Anwendung der Sondierungen
 - 4.1 Ermittlung von Schichtgrenzen
 - 4.2 Ermittlung von bodenphysikalischen Kennziffern
 - 4.2.1 Vorgänge beim Sondieren
 - 4.2.2 Ermittlung der Lagerungsdichte
 - 4.2.3 Ermittlung der Konsistenz bindiger Böden
 - 4.2.4 Ermittlung der Tragfähigkeit und des Setzungsverhaltens von Flachgründungen
 - 4.3 Ermittlung der Tragfähigkeit von Pfählen mit Hilfe der Drucksondierung
5. Flügelsonden und Isotopensonnen
6. Zusammenfassung
7. Schrifttum

1. Einleitung

Baugrunduntersuchungen werden vor Beginn jedes größeren Bauvorhabens durchgeführt, da man erkannt hat, daß nur auf diese Weise eine technisch richtige Bauweise erreicht werden kann. Die Erfahrung hat darüber hinaus gezeigt, daß erhebliche Mittel eingespart werden, wenn die Ergebnisse der Baugrunduntersuchungen bei dem Entwurf berücksichtigt werden, ganz abgesehen von den Kosten, die bei späteren Schäden entstehen könnten.

Im allgemeinen werden zur Erkundung des Baugrundes Bohrungen oder Schürfungen niedergebracht und die dabei gewonnenen gestörten und ungestörten Bodenproben untersucht. Hierbei werden, soweit möglich, die bodenphysikalischen Kennziffern ermittelt, die zur Aufstellung des Bauentwurfes mit den dazugehörigen erdstatischen Berechnungen notwendig sind. In vielen Fällen werden aber außerdem noch an Ort und Stelle ergänzende Untersuchungen durchgeführt. Hierzu gehören vor allem die Sondierungen mit den Ramm- und Drucksondiergeräten, die ich heute behandeln möchte.

Da die Sondierungen, vor allem die Rammsondierungen, empirisch ausgewertet werden, hängen die Ergebnisse sehr von den Abmessungen und der Arbeitsweise der Sonde ab. Ergebnisse, die mit verschiedenen Sonden gewonnen wurden, können nicht ohne weiteres miteinander verglichen werden. Auf Anregung von Herrn Oberbaudirektor i.R. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. Lohmeyer gründete daher die Deutsche Gesellschaft für Erd- und Grundbau im Jahre 1955 den Arbeitskreis "Sonden", der gleichzeitig Arbeitsausschuß im Fachnormenausschuß Bauwesen wurde. Er hat als erstes die DIN 4094 Bl. 1 herausgebracht, in dem die Abmessungen und die Arbeitsweise der in Deutschland üblichen Ramm- und auch Drucksondiergeräte genormt worden sind. Im Anschluß daran ist das Blatt 2 über Hinweise für die Anwendung erarbeitet worden [1] [2].

Wenn nun ein neues Gerät eingeführt oder ein altes Gerät aus seinem Winterschlaf aufgeweckt wird, dann gibt es immer einen Kreis, der die Augen vor dieser Neuentwicklung verschließt und sich nicht darum kümmert, und wieder einen anderen, der diese Neuerung begierig aufgreift und ohne allzu große Kritik und Sachkenntnis verwendet. So werden an vielen Stellen Sondierungen durchgeführt, wo sie überhaupt nicht auswertbar sind, an anderen Stellen aber Sondierungen unterlassen, wo sie sicher wertvolle Aufschlüsse geben könnten.

In meinen Ausführungen werde ich zunächst auf die Ramm- und Drucksondiergeräte und ihre Arbeitsweise eingehen - soweit die Geräte in die DIN 4094 aufgenommen sind - und

dann über ihre Anwendungsmöglichkeiten und die Auswertung der Ergebnisse sprechen.

2. Ramm- und Drucksondiergeräte

Die leichte und schwere Rammsonde unterscheiden sich vor allem durch die Größe des Rammgewichtes, das bei der leichten Rammsonde 10 kp und bei der schweren 50 kp beträgt. Die Fallhöhe ist jeweils 50 cm (Abb. 1).

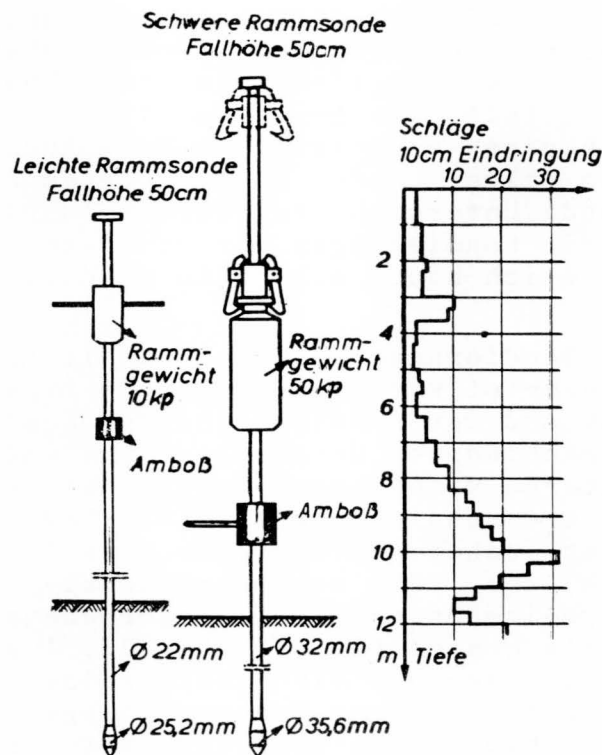


Abb. 1 Leichte und schwere Rammsonde nach DIN 4094 Blatt 1

Außerdem haben die Spitzen verschieden große Querschnittsflächen, 5 und 10 cm² bei der leichten und 15 cm² bei der schweren Rammsonde. In allen Fällen ist der Spitzendurchmesser größer als der des Gestänges. Abb. 2 zeigt die in der Bundesanstalt für Wasserbau verwendete leichte und schwere Rammsonde. Während bei der leichten Rammsonde das Rammgewicht mit Hand gehoben wird, erfolgt das Heben des Gewichtes der schweren Rammsonde mit Hilfe einer Winde. Die Schlagvorrichtung der schweren Rammsonde ist auf einem



Abb. 2a
Leichte Rammsonde der BAW

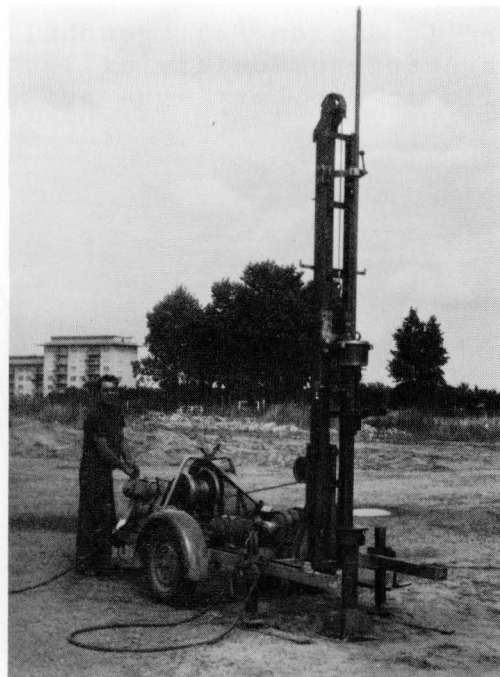


Abb. 2b
Schwere Rammsonde der BAW

1-Achsanhänger aufgebaut. Ein Elektromotor treibt gleichzeitig eine Seilwinde und einen kleinen Kompressor. Das Seil läuft von der Winde über eine Rolle an der Spitze eines umlegbaren Mäklers, an dem hiermit ein Schlitten gehoben und gesenkt werden kann. An diesem Schlitten ist eine Schere, die beim Herablassen des Schlittens über den 50 kg Rammhären gleitet und diesen beim Heben an seiner Unterseite festhält. Hebt die Winde den Schlitten mit gefaßtem Bär um 50 cm, so öffnet ein Preßluftschieber die Schere und läßt den Bär frei fallen. Der Gerätführer läßt durch Umsteuerung der Winde den Schlitten mit Schere wieder ab, faßt den Bären und der beschriebene Vorgang wiederholt sich.

Bei einer Rammsondierung werden gewöhnlich die Anzahl der Schläge je 10 cm Eindringung gezählt. Entsprechend werden auch die Ergebnisse einer Sondierung aufgetragen (Abb. 1). Eine Umrechnung dieser Ergebnisse mit Hilfe einer Rammformel bringt keine Vorteile, zumal die Auswertung der Rammsondierungen empirisch erfolgt und die Rammformeln wegen der darin enthaltenen Vereinfachungen keine zuverlässigen Ergebnisse bringen.

Die Sondierungen mit den genannten Rammsonden werden gewöhnlich von der Geländeoberfläche oder von der Sohle einer Baugrube aus ausgeführt. Sie können aber auch in einem Bohrloch angesetzt werden. Statt der schweren Rammsonde

wird in diesem Fall gewöhnlich die sogenannte Standardsonde der American Society of Testing Materials benutzt, die ebenfalls in die Norm 4094 aufgenommen ist (Abb. 3)

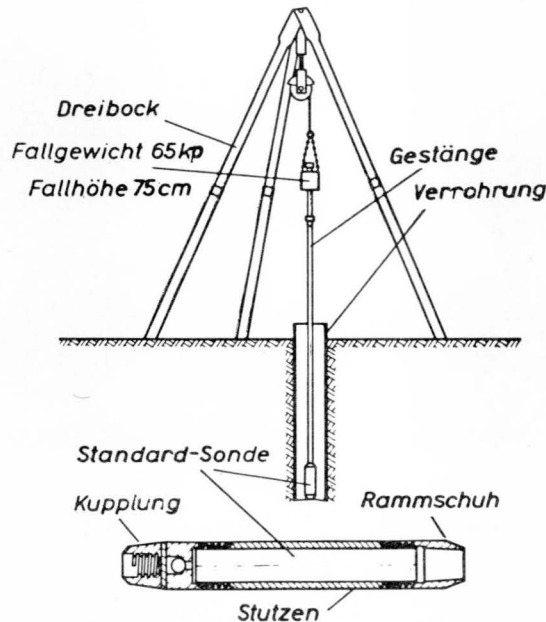


Abb. 3 Standard Penetration Test

Diese Sonde wird mit einer Gewichtskraft von 63,5 kp bei einer Fallhöhe von 76,2 cm im Bohrloch in den Boden gerammt. Die hohe, etwa 50 cm lange Sonde hat einen Außendurchmesser von 50,8 mm und einen Innendurchmesser von 34,9mm. Sie gestattet die gleichzeitige Entnahme von Bodenproben. Beim Einrammen wird nach einer Eindringung von 15,2 cm (1/2 Fuß) die Anzahl der Schläge je 30,5 cm (1 Fuß) gemessen und der Auswertung zugrunde gelegt. Diese Sonde kann auch nach Aufsetzen einer Spitze als reine Spitzensonde verwendet werden. Für die Beurteilung der Ergebnisse ist es wichtig, wie diese Sonde eingerammt wird, ob z.B. der Bär, wie beim amerikanischen Verfahren, über Gelände angesetzt wird oder in einem Bohrloch dicht über der eigentlichen Sonde wirkt. Ebenso ist es von ausschlaggebender Bedeutung, wie das Bohrloch selbst hergestellt wird und welchen Durchmesser es hat. Ganz falsche Ergebnisse werden erhalten, wenn z.B. durch ins Bohrloch strömendes Grundwasser der Boden unter der Bohrlochsohle aufgelockert wird. Der Ausdruck Standardsonde darf nicht zu der Ansicht verleiten, daß die Sondierungen jeweils in gleicher Art durchgeführt werden und daher gleiche Ergebnisse bringen.

Bei der Drucksondierung wird eine Sonde durch eine statische Kraft mit gleichbleibender Geschwindigkeit von 0,2 bis 0,4 m/Min in den Boden gedrückt, wobei der Gesamtwiderstand und der Spitzenwiderstand getrennt gemessen werden können. Für bestimmte Aufgaben genügt es allerdings, den Spitzenwiderstand allein zu bestimmen.

Nach der DIN 4094 ist die Querschnittsfläche der Sonde mit 10 cm^2 und der Spitzenöffnungswinkel mit 60° festgelegt. Die Länge des Schaftes, soweit er dieselbe Querschnittsfläche behält, soll etwa 11 cm betragen.

Die Messung des Spitzenwiderstandes kann auf verschiedene Weise erfolgen. Die Sondenspitze der Firma Gouda, Holland, sitzt an einer inneren Stange mit einem Durchmesser von 15 mm, die in dem Sondengestänge (Durchmesser 36 cm) bis oben hochgeführt wird. Das Gestänge verjüngt sich im unteren Teil und wird vom Schutzmantel der Spitze umschlossen. Beim Sondieren wird zunächst Spitze und Mantel zusammen bis zur gewünschten Tiefe gedrückt. Dann wird die Spitze allein um 6,75 cm vorgedrückt. Anschließend wird der Mantel nachgeschoben. Die Kräfte zum Eindringen der Spitze oder des Gesamtwiderstandes können mit einem Manometer gemessen werden.

Die Drucksonde, wie sie in der Bundesanstalt für Wasserbau verwendet wird, zeigt die Abb. 4.

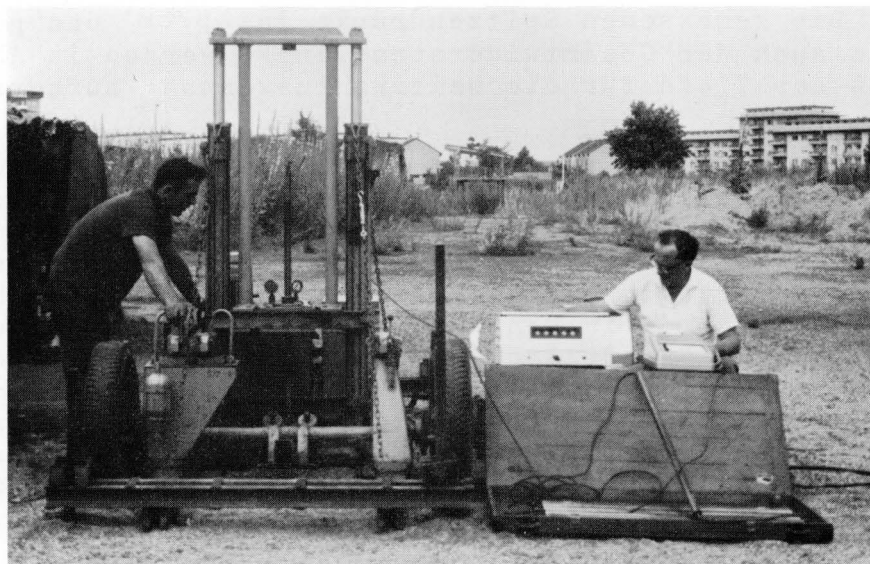


Abb. 4 Drucksonde der B A W

Sie ist mit einer Maihak-Spitze ausgerüstet, die mit Hilfe einer elektrischen Meßeinrichtung eine laufende Messung des Spitzenwiderstandes während des Eindrückens erlaubt. Der Antrieb der Drucksonde erfolgt hydraulisch. Hierzu sind auf einem Einachsanhänger ein elektrisch angetriebenes Ölpumpenaggregat und zwei senkrecht stehende Hydraulikzylinder aufgebaut. Zwischen den beiden Zylindern ist ein rechteckiger Rohrrahmen eingebaut, dessen Steifheit einen mechanischen Gleichlauf der Kolbenstangen der Hydraulikzylinder gewährleisten soll. An der unteren Quertraverse des Rohrrahmens befindet sich ein Hydraulikschloß, das zum Festhalten der Sondenstangen dient und diese auch bei 5 MP vertikalem Druck hält. Beim Sondieren kann der jeweils in den Boden zu drückende Meter der Sondenstange an jeder beliebigen Stelle mit dem Schloß gefaßt werden. Sitzt das Schloß kurz unterhalb des oberen Endes der Sondenstange, so kann auf diese während des hydraulischen Eindrückens die nächste Meterstange aufgeschraubt werden. Ist das gefaßte Sondenstück tief genug eingedrückt, so wird das Schloß durch Hebelsteuerung gelöst und dieses mit dem Rohrrahmen durch die beiden senkrechten Hydraulikzylinder so weit wie zweckmäßig hochgefahren. Dann wird die Sondenstange mit dem Schloß neu gefaßt und durch Umsteuerung des Zylinders nach unten gedrückt. Das Ziehen des Sondengestänges erfolgt in gleicher Weise aber umgekehrter Reihenfolge. An einem gesonderten Abzweig des Ölpumpenaggregates kann mit entsprechenden Schläuchen ein Ölmotor angeschlossen werden, mit dessen Hilfe die Erdanker eingedreht werden können. Mit diesen wird der Einachsanhänger gegen den nach oben gerichteten Druck am Boden verankert.

Die gemessenen Spitzendrücke in kp/cm^2 und gegebenenfalls auch der Gesamtwiderstand in kp werden in Abhängigkeit von der Tiefe für die weitere Auswertung aufgetragen.

Durch Inkrafttreten der DIN 4094 ist die Entwicklung der Ramm- und Drucksondiergeräte selbstverständlich nicht abgeschlossen. Sie geht u.a. darauf hin, die Handarbeit durch Maschinenarbeit zu ersetzen und die Meßergebnisse automatisch aufzuschreiben. Wird die Sonde z.B. durch Schnellschlaghammer in den Boden getrieben, wie dieses bei der sogenannten "Schnellschlagsonde" der Fall ist, so ist das Ergebnis dieser Sondierung nicht mehr mit denen der genormten vergleichbar, da sich nun ganz andere Vorgänge im Boden abspielen. Die Auswertung der Ergebnisse dieser Sonden muß entsprechend nach anderen Gesichtspunkten erfolgen.

In dem Arbeitsausschuß "Sonden" verfolgen wir die neuere Entwicklung auf dem Gebiet der Sonden und werden gegebenenfalls auch die Abmessungen und Arbeitsweise weiterer Geräte festlegen.

3. Wahl des Gerätes

Die Wahl des Gerätes richtet sich nach dem Zweck der Untersuchung, nach der erforderlichen Untersuchungstiefe, sowie nach der Art und Beschaffenheit des Bodens.

Die leichte Rammsonde ist die geeignetste Sonde für Untersuchungen, die schnell und mit geringem Aufwand durchgeführt werden sollen. Dieses Gerät ist ja sofort einsetzbar und so leicht, daß es von einem Mann bedient werden kann. Es braucht auch keine Verankerung oder Belastung wie die Drucksonde. Die Tiefe, bis zu der eine Sondierung mit diesem Gerät ausgeführt werden kann, liegt bei nicht zu dicht gelagerten oder zu groben Bodenarten bei etwa 8 m. Da mit wachsender Sondiertiefe das Gestängegewicht laufend größer wird, wachsen die durch den Fall des Bären zu bewegendenden Massen. Sie zehren in großer Tiefe die Energie des Fallgewichtes auf, so daß schon aus diesem Grunde nicht beliebig tief sondiert werden kann. Sind allerdings weiche Schichten zu durchfahren, um Schichtgrenzen mit tieferliegenden festeren Böden festzustellen, können selbstverständlich auch mit der leichten Rammsonde größere Tiefen erreicht werden. Bei schwer zu durchrammenden Böden muß auf die schwere Rammsonde zurückgegriffen werden. Auch hier hängt die tatsächliche Sondiertiefe von der Festigkeit des Bodens und dem Zweck der Untersuchungen ab. Tiefen von 20 m gehören zu den üblichen Sondiertiefen.

Die Drucksonden erlauben im Gegensatz zu den Rammsonden eine weitergehendere Auswertung der Ergebnisse, weil die Vorgänge beim Eindringen der Sonde nicht so schwer erfassbar sind wie die beim Einrammen. Außerdem kann hier der Spitzenwiderstand getrennt von der Mantelreibung gemessen werden. Die Tiefe, bis zu der sondiert werden kann, hängt auch hier von der Festigkeit des Bodens, dann aber auch von dem maximalen Druck ab, für den die Sonde ausgelegt ist, und von der Größe des Gegengewichtes, die entweder durch Anker oder durch Ballast maximal aufgebracht werden kann. Die Drucksonde ist ein Gerät, das sich vor allem in feinkörnigen Böden bewährt hat.

4. Anwendung der Sondierungen

4.1 Ermittlung von Schichtgrenzen

Sondierungen, vor allen Dingen mit der leichten Rammsonde, die sehr gut transportabel und schnell einsetzbar ist, sind ein ausgezeichnetes Mittel, um den Baugrund zwischen vorhandenen Bohrungen zu überprüfen und so den ge-

nauen Schichtenverlauf festzustellen. Bei Wechsel verschiedenen fester Schichten ergeben sich deutlich ein sprunghaftes Ansteigen oder Abfallen des Sondierwiderstandes.

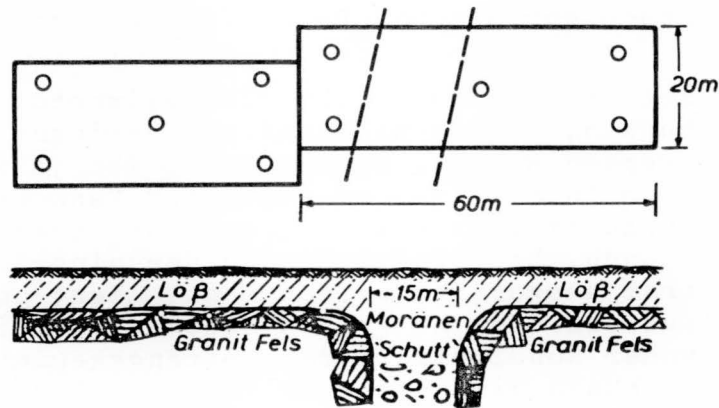


Abb. 5 Ansatz von Bohrungen, bei denen eine Felsspalte nicht erfaßt wurde (nach [20])

Die Abb. 5 zeigt ein Beispiel, bei dem durch eine Rammsondierung Bauverzögerungen und erhebliche zusätzliche Gründungsmaßnahmen hätten erspart werden können. Die für die beiden Bauwerke niedergebrachten 10 Bohrungen zeigten überall unter einer Lößlehmschicht von etwa 3 m Tiefe Granitfels. Zunächst wurde das linke Gebäude errichtet, dann begann man mit dem Bau des rechten Gebäudes. Beim Baugrubenaushub, als schon die rechte Seite dieses Gebäudes zum Teil stand, wurde eine 15 m breite mit weichem Moränenschutt ausgefüllte Felsspalte festgestellt. Ein Verschieben des Bauwerkes war zu diesem Zeitpunkt nicht mehr möglich. So mußte man zusätzlich kostspielige Gründungsarbeiten durchführen, um unterschiedliche Setzungen und Risse im Gebäude zu vermeiden. Durch Sondierungen mit der leichten Rammsonde hätte man mit geringem Aufwand in kurzer Zeit diesen Spalt ausmachen können.

Die Bestimmung der Grenze zwischen Schichten unterschiedlicher Festigkeit spielt auch bei Bodenuntersuchungen eine Rolle, die nicht mit Gründungsfragen in Zusammenhang stehen. So konnten mit der schweren Rammsonde im Rheinbett oberhalb des Binger Loches, wo wegen der geplanten Verbesserung der Schifffahrtslinie Baggerungen notwendig werden, die hierfür wichtige Grenze zwischen der Überlagerungsschicht aus Sanden und Kiesen und den darunter anstehenden Fels schnell und eindeutig festgestellt werden.

Muß eine Sondierung wegen zu großen Bodenwiderstandes in einer bestimmten Tiefe abgebrochen werden, so ist gegebenenfalls durch Bohrungen zu überprüfen, ob nicht unter-

halb der angetroffenen sehr festen Schicht eine weichere ansteht, die einen Einfluß auf das projektierte Bauwerk haben könnte.

4.2 Ermittlung von bodenphysikalischen Kennziffern

4.2.1 Vorgänge beim Sondieren

Um ein Urteil über die Verwendbarkeit der Sonde zur Ermittlung bestimmter bodenphysikalischer Kennziffern zu erhalten, müssen wir uns die Vorgänge klar machen, die beim Einrammen bzw. Eindrücken der Sonde im Boden ablaufen.

Wird die Sonde in einem nicht bindigen Boden - wie Sand und Kies - gerammt, so wird der Boden unter der Spitze je nach seiner Lagerungsdichte mehr oder weniger zusammengedrückt und zur Seite gedrängt.

Sind die Böden wassergesättigt und haben auf Grund ihrer Feinkörnigkeit eine sehr geringe Durchlässigkeit, vor allem bei bindigen Böden, so werden die Vorgänge durch die bei dem verhältnismäßig schnellen Sondieren auftretenden Porenwasserdrücke beeinflusst. Sie verhindern einmal eine Zusammendrückung des Bodens und dann eine Erhöhung der Scherfestigkeit bei den auftretenden Druckbeanspruchungen. Da der Boden beim Auftreten des Porenwasserdruckes zunächst sich nicht komprimiert, fließt er bei nicht verrohrten Sonden um die Spitze und erzeugt eine große Mantelreibung, die stetig zunimmt.

Bei nicht bindigen Böden macht sich die Mantelreibung an dem Gestänge bei Sondierungen über Wasser kaum bemerkbar, da die Sondenspitze verdickt ist und das Sondierloch nicht zusammenfällt. Der Grund für das Stehenbleiben der Löcher liegt an der Verzahnung der Körner, dann aber auch an der sogenannten scheinbaren Kohäsion durch die Kapillarkräfte in diesem doch praktisch immer feuchten Boden. Bei Sondierungen unter Wasser können die Sondierlöcher bereits beim Sondieren zusammenfallen und damit die Mantelreibung mit zunehmender Sondiertiefe vergrößern.

Die Mantelreibung kann bei den Rammsonden durch Verrohrung der Sonde ausgeschaltet werden. Bei den Drucksonden, bei denen der Spitzenwiderstand getrennt gemessen wird, spielt die Mantelreibung bei der Auswertung keine Rolle.

Aus dem oben Genannten geht hervor, daß Sondierungen nur ausgewertet werden können, wenn die Bodenarten bekannt sind; in denen sondiert wird. Sondierungen können also nicht Bohrungen ersetzen, sondern liefern zusätzliche Aus-

künfte über bestimmte Bodeneigenschaften, über die später berichtet wird.

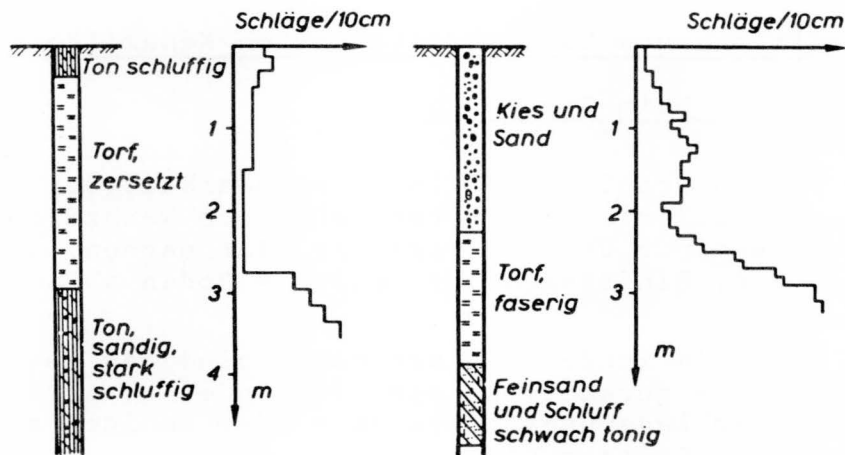


Abb. 6 Einfluß von Torfschichten verschiedener Zusammensetzung auf die Rammsondierergebnisse (nach [2])

Bei der Sondierung, die auf der Abb. 6 rechts aufgetragen ist, ergaben sich zunächst geringe und dann sehr stark zunehmende Schlagzahlen. Ohne die Kenntnis, daß sich unter der oberen Sand-Kies-Schicht ein faseriger Torf befindet, hätte man auf Grund der Sondierung geschlossen - und in einem Fall ist es auch tatsächlich geschehen - daß hier der Sand in ganz besonders dichter Lagerung ansteht. In Wirklichkeit sind die hohen Schlagzahlen auf den faserigen Torf zurückzuführen, der wegen seiner Elastizität in dieser Art durch einen hohen Widerstand auf die Rammsonde reagiert. Daß ein nicht zersetzter Torf nur geringe Schlagzahlen bringt, zeigt die Abb. 6 links.

Verschiedentlich müssen Sondierungen abgebrochen werden, weil der Eindringwiderstand zu groß ist. Es kann sich hierbei um stark verockerte Sandschichten oder andere festere Schichten handeln, die noch von weicheren unterlagert werden. Man darf aus hohen Sondierwiderständen nicht schließen, daß die angetroffene Schicht großer Festigkeit auch nach der Tiefe weiter sich fortsetzt und muß sich gegebenenfalls durch Bohrungen über die Schichten in größerer Tiefe ein Bild verschaffen, soweit dies für den betrachteten Fall erforderlich ist. Angaben über die erforderlichen Untersuchungstiefen bei Gründungen von Bauwerken sind in DIN 1054 enthalten.

4.2.2 Ermittlung der Lagerungsdichte

Wie ich vorher bei den Sondierungen im nichtbindigen Boden ausführte, ist der Eindringwiderstand von Sonden umso kleiner, je größer die Zusammendrückbarkeit und je geringer die Scherfestigkeit gegen ein Verdrängen ist. Beides ist bei einer lockeren Lagerung gegeben. Die umgekehrten Verhältnisse gelten für einen dicht gelagerten, nichtbindigen Boden. Aus diesen Gründen hat sich auch die beste Korrelation zwischen Sondierwiderstand und Bodeneigenschaft für die Beziehung zwischen Sondierwiderstand und Lagerungsdichte ergeben.

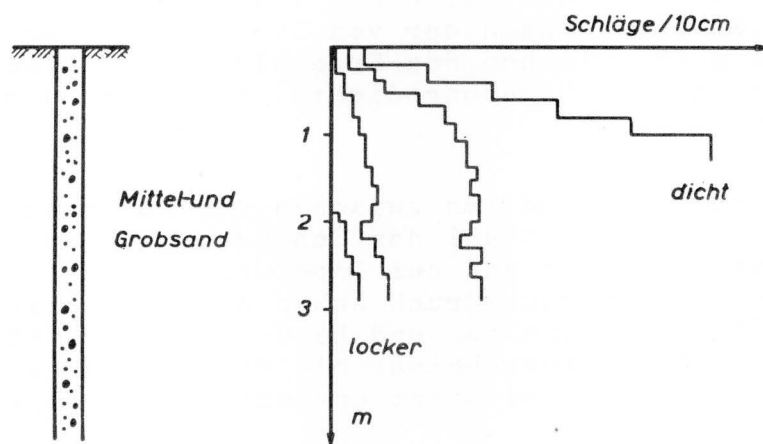


Abb. 7 Einfluß der Lagerungsdichte von Sanden auf die Rammsondierergebnisse (nach [2])

Die Abb. 7 stellt Ergebnisse von Sondierungen mit der leichten Rammsonde in Schüttungen aus Mittel- und Grobsand über Wasser dar. Sie sind in einer Versuchsgrube der Bundesanstalt für Straßenbau durchgeführt worden, bei der die tatsächliche Lagerungsdichte durch Untersuchung ungestört entnommener Bodenproben bestimmt worden war. Die Kurven zeigen für jede Tiefe, daß mit wachsender Lagerungsdichte der Eindringwiderstand, also die Schlagzahlen je 10 cm Eindringung zunehmen. Außerdem ergibt sich, daß der Eindringwiderstand mit der Tiefe zunächst stark wächst und dann nahezu konstant bleibt. Dies zeigt sich besonders deutlich bei der Sondierung bei mitteldichter Lagerung.

Diese Kurven stellen somit Eichkurven dar, auf Grund derer die Lagerungsdichte für diese Sandart in jeder Tiefe genau ermittelt werden kann. Es muß betont werden, daß die Eichkurve von vielen Faktoren abhängt, so von der Korngrößenverteilung, also von der Gleichförmigkeit oder Ungleichfö-

migkeit, ferner von der absoluten Korngröße und sehr wesentlich von der Form und Rauhigkeit der einzelnen Bodenkörner [11].

Die erste Beziehung zwischen Lagerungsdichte und der Schlagzahl der Standard Penetration Sonde für Sande haben Terzaghi und Peck gegeben [15]. Sie verglichen die Ergebnisse der Sondierungen mit denen von Lastplattenversuchen. Aus den Ergebnissen der Lastplattenversuche wurde die Lagerungsdichte abgeschätzt und den jeweiligen Schlagzahlen bestimmte Lagerungsdichten zugeordnet. Da die Abhängigkeit dieser Beziehung von der Untersuchungstiefe, deren Einfluß ich vorher aufzeigte, nicht berücksichtigt ist, gilt sie nur für eine bestimmte Tiefe. In weiteren Forschungsarbeiten ist der Einfluß des Überlagerungsdruckes, also der Tiefe, untersucht worden. Sie führten zu Ergänzungen der von Terzaghi und Peck angegebenen Beziehungen zwischen den Ergebnissen des Standard Penetration Test und der Lagerungsdichte und damit zu genaueren Auswertungen [16].

Die gute Korrelation zwischen dem Eindringwiderstand, ausgedrückt durch die Anzahl der Schläge je 30 cm, des Standard Penetration Testes und der Lagerungsdichte in Abhängigkeit von dem Überlagerungsdruck haben auch Schultze und Menzenbach [13] und Schultze und Melzer [14] bestätigt. Sie verglichen die Sondierergebnisse mit der Lagerungsdichte, die an gleicher Stelle an ungestört entnommenen Bodenproben ermittelt worden war.

Alle Versuchsergebnisse gelten selbstverständlich nur für die untersuchten Bodenarten. Hierauf wird auch bei der Angabe von Untersuchungsergebnissen stets hingewiesen. In der Praxis werden dann allerdings, oft zu Unrecht, diese Ergebnisse auf andere Bodenarten übertragen. Liegen andere Bodenarten vor, vor allem Böden anderer Korngröße, Kornverteilung, Rauhigkeit und Kornform, müssen entsprechende Eichversuche durchgeführt werden.

Die Ermittlung der Lagerungsdichte durch Drucksondierungen erlaubt sicherere Angaben, als sie mit Hilfe der Rammsondierungen möglich sind, vor allem deshalb, weil die Mantelreibung bei den Messungen des Spitzendruckes auf jeden Fall ausgeschaltet ist. Auf der Abb. 8 sehen Sie Versuchsergebnisse der DEGEBO Berlin, die in einem gleichförmigen, feinsandigen Mittelsand ($U = 1,5$) durchgeführt worden sind [6]. Es handelt sich um Sondierungen in einem locker verfüllten, leicht verdichteten und stark verdichteten Sand. In 2,0 m Tiefe liegen die Werte für lockeren Sand noch unter 10 kp/cm^2 . Man sieht aus diesen Kurven, daß - wie bei der Rammsondierung - die Widerstände zunächst mit der Tiefe zunehmen und von einer bestimmten Tiefe ab die Zunahme nur sehr gering ist.

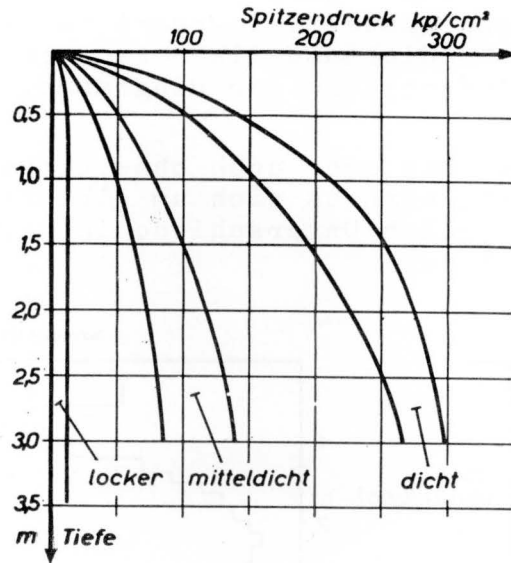


Abb. 8 Einfluß der Lagerungsdichte von Sanden auf die Drucksondiererergebnisse (nach [6])

Diese Kurven stellen also Eichkurven für den untersuchten gleichförmigen Feinsand dar. Bei anders aufgebauten Böden ergeben sich Abweichungen von diesen Kurven. So haben neuere Versuche der DEGEBO [18] für einen ungleichförmigen Sand und Kies Sondierwiderstände ergeben, die bei nicht ausgesprochen dichter Lagerung wesentlich niedriger lagen als bei dem vorher betrachteten Feinsand. Würde man also die Eichkurven für den Feinsand bei der Auswertung einer Sondierung im Sand und Kies benutzen, so würde man die Lagerungsdichte zu gering schätzen.

Als weiterer wesentlicher Faktor bei der Auswertung von Ramm- und Drucksondierungen muß die Lage des Grundwasserspiegels mit in die Auswertung einbezogen werden. Nach Erreichen des Grundwasserspiegels nimmt der Eindringwiderstand der Sonden im allgemeinen ab. Dieser Einfluß macht sich besonders stark bei locker gelagerten Böden bemerkbar. Nach Versuchen der DEGEBO [18] nimmt dieser Einfluß bei Drucksondierungen mit der Tiefe unterhalb des Grundwasserspiegels wieder ab. Er verschwindet nahezu, wenn der Grundwasserspiegel erst in Tiefen von 3 m unter Gelände beginnt.

Liegen für die zur Verfügung stehenden Ramm- oder Drucksonden Eichkurven oder aus Versuchen abgeleitete Beziehungen zwischen Eindringwiderstand und Lagerungsdichte bei Berücksichtigung der Untersuchungstiefe und sonstiger die Vorgänge beeinflussender Faktoren für die zu untersuchenden Böden vor, so ist eine genaue Ermittlung der Lagerungsdichte

gegeben. Dabei ist stets zu prüfen, ob die Sonden eingesetzt werden, für die die Auswertediagramme oder Formeln entwickelt sind, und ob die Sondierungen in derselben Art durchgeführt werden, wie bei Aufstellung der Diagramme.

Die Sonde kann aber auch ohne Eichung wertvolle Erkenntnisse liefern, wenn es sich um gleiches Material handelt, bei dem lediglich Unterschiede in der Dichte festgestellt werden sollen.

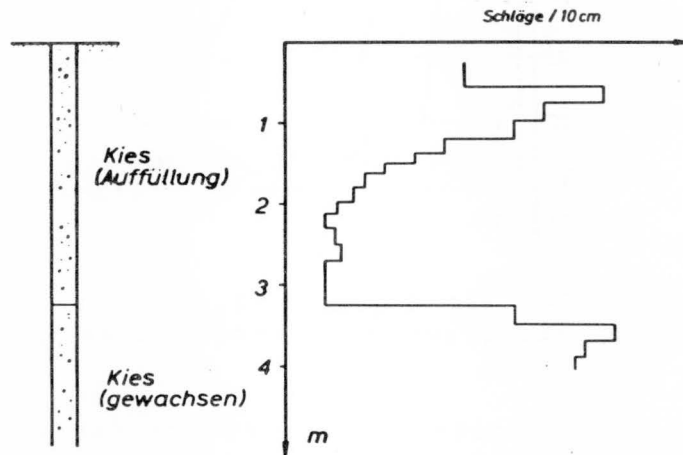


Abb. 9 Nachprüfung der Lagerungsdichte einer Grabenverfüllung durch Rammsondierungen (nach [2])

Die Abb. 9 zeigt ein Beispiel für eine Sondierung in einem mit Kies aufgefüllten 3,20 m tiefen Leitungsgraben. Die Sondierung mit der leichten Rammsonde zeigt in diesem gleichmäßigen Schüttmaterial mit der Tiefe abnehmende Schlagzahlen und damit eine Verringerung der Lagerungsdichte. Sie ist darauf zurückzuführen, daß die verhältnismäßig dicke Schicht in dem engen Graben lediglich von der Oberfläche aus verdichtet worden ist.

Es wird in der Praxis vielfach angenommen, daß aus den Schwierigkeiten beim Bohren auf die Lagerungsdichte geschlossen werden kann. Auch werden vom Bohrmeister oft entsprechende Angaben in den Schichtenverzeichnissen gemacht. Die Schwierigkeit beim Bohren braucht aber in keiner Weise mit der Lagerungsdichte als solcher zusammenzuhängen. Hierfür nur ein Beispiel: Vor dem Schlagen von Dalben im neuen Karlsruher Ölhafen sollte festgestellt werden, wie dicht dort der anstehende Sand und Kies gelagert ist. Zuerst wurde eine Bohrung niedergebracht. Der Bohrmeister bezeichnete auf Grund des langsamen Bohrfortschrittes in diesem Sand-Kies-Gemisch die Lagerung als dicht. Diese Feststellung erschien auch glaubhaft, da das Bohrgut sehr ungleichförmig und dem Anschein

nach natürlich gewachsen war. Bei der zusätzlichen Rammsondierung fiel aber die Sonde zunächst einige Meter mit geringem Widerstand durch. Erst danach mußte eine beträchtliche Anzahl von Schlägen aufgewendet werden, um die Sondierung fortzusetzen. Die Ursache für die tatsächlich vorhandene aber durch die Bohrung nicht festgestellte lockere Lagerung der oberen Schichten wurde bald gefunden. Zur Gewinnung von Sand und Kies war innerhalb des Beckens tiefer gebaggert worden, wobei angrenzende Bereiche nachrutschten und sich auflockerten. Gerade an einer solchen Stelle waren die Untersuchungen durchgeführt worden.

4.2.3 Ermittlung der Konsistenz bindiger Böden

Während es bei nicht bindigen Böden unter bestimmten Voraussetzungen durchaus möglich ist, sichere Angaben über ihre Lagerungsdichte zu erhalten, kann man nur sehr unsichere Angaben über die Konsistenz bindiger Böden erhalten. Der Grund liegt hier in den bei diesen bindigen Böden unter Wasser auftretenden unbekanntem Porenwasserdrücken, die von der Schnelligkeit des Sondierens und von der Durchlässigkeit des Bodens abhängen. Terzaghi und Peck haben zwar bestimmte Schlagzahlen des Standard Penetration Tests bestimmten Konsistenzbereichen zugeordnet, doch hat sich gezeigt, daß diese Angaben nur für eine qualitative Beurteilung ausreichen [15] und mit zunehmender Bindigkeit an Aussagekraft verlieren. Bei gleichartig aufgebauten Böden können selbstverständlich Unterschiede in der Konsistenz deutlich erkannt werden.

4.2.4 Ermittlung der Tragfähigkeit und des Setzungsverhaltens von Flachgründungen

Auf Grund der Kenntnis der Lagerungsdichte von nicht bindigen Böden kann ein qualitatives Bild über das voraussichtliche Setzungsverhalten und auch über die Grenztragfähigkeit von Flachgründungen gewonnen werden. Darüberhinaus hat man versucht, direkte Beziehungen zwischen den Ergebnissen von Sondierungen zu der Tragfähigkeit und dem Setzungsverhalten bzw. der sie bestimmenden Scherfestigkeiten und Steifemodulen zu erhalten.

So stellte Paproth 1943 für den Prüfstab Künzel, der der leichten Rammsonde entspricht, nur keine verdickte Spitze besitzt, für nicht bindige Böden eine Beziehung zwischen der Steifemodul dieser Böden und dem Eindringwiderstand auf, den er aus der Stoßgleichung für den unelastischen Stoß errechnete [10]. Für den Standard Penetration Test gaben Terzaghi und Peck 1948 Beziehungen zwischen der Schlagzahl N dieser Sonde und der zulässigen Belastung eines Sandbodens unter der Voraussetzung, daß die maximalen Setzungen 2,5 cm nicht über-

schreiten [15]. Die Bauwerksbreite, von der die Setzungen mitabhängen, geht in die Auswertung ein. Entsprechende Beziehungen sind auch für die Berechnung der Grundbruchsicherheit aufgestellt worden. Diese Angaben von Terzaghi und Peck sind auf Grund weiterer Versuche an anderer Stelle ergänzt worden [16], wobei besonders der Einfluß der Überlagerungshöhe miteinbezogen wurde. Die vorliegenden Beziehungen geben aber nur einen ganz rohen Anhalt und gelten nur für die untersuchten Böden. Sand kann nicht gleich Sand gesetzt werden, denn beide Sandarten können in der Gleichförmigkeit, der Kornrauigkeit sehr unterschiedlich sein.

Auf weitere Vorschläge zur Auswertung von Ramm- und Drucksondierungen zur Ermittlung der Setzungen und der Tragfähigkeit kann ich im Rahmen dieses Vortrages nicht eingehen und muß auf die Literatur verweisen. Insbesondere nenne ich die Arbeiten von de Beer über die Auswertung von Drucksondierungen zur Ermittlung von Steifeziffern und Scherfestigkeitswerten und deren Anwendung in der Praxis [3] und die im Institut für Verkehrswasserbau, Grundbau und Bodenmechanik der T H Aachen erzielten Versuchsergebnisse zur Ermittlung der Steifeziffer nichtbindiger Böden [14].

4.3 Ermittlung der Tragfähigkeit von Pfählen mit Hilfe der Drucksondierung

Eine sehr wichtige Anwendung der Sondierungen, vor allen Dingen der Drucksondierung, ist die Ermittlung der Tragfähigkeit von Pfählen bzw. die Ermittlung der notwendigen Pfahllänge bei gegebener Belastung.

Grundsätzlich kann man nach Vorliegen des Bohrprofiles die Lagerungsdichte der nicht bindigen Schicht ermitteln, in die die Pfähle einbinden sollen, und auf Grund von Erfahrungen die Einbindetiefe ausreichend groß wählen.

Darüberhinaus aber ist es möglich, die Tragfähigkeit von Pfählen auf Grund statistischer Auswertungen von Pfahlprobelastungen und dazugehörigen Sondierungen oder aber unter bestimmten Voraussetzungen auf Grund erdstatischer Berechnungen zu ermitteln.

Den Weg der Auswertung von Drucksondierungen hinsichtlich der Tragfähigkeit von Pfählen hat Huizinga [5] beschrieben. Er ermittelte den Spitzenwiderstand von Pfählen auf Grund von Druck- und Zugversuchen und verglich den so gefundenen Spitzenwiderstand der Pfähle mit dem der Drucksonde. Auf der Abb. 10 sind auf der Abszisse Spitzenwiderstände der Sonde und auf der Ordinate die der Pfähle aufgetragen. Für die Punkte, die auf einer unter 45° geneigten

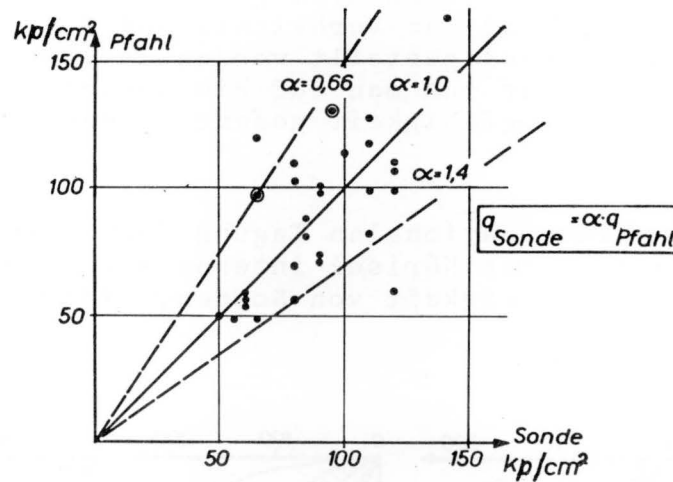


Abb.10 Beziehung zwischen Spitzenwiderstand von Drucksonden und Pfählen (nach [3])

Geraden liegen, ist der Spitzenwiderstand in beiden Fällen gleich groß. Bei den Versuchswerten oberhalb dieser Geraden ist der Spitzenwiderstand des Pfahles größer, bei den Punkten unterhalb ist er kleiner als der der Sonde. Der Pfahlwiderstand war nicht kleiner als der durch 1,4 geteilte Spitzenwiderstand der Sonde. Da aus dem Diagramm einerseits hervorgeht, daß im Mittel die Spitzenwiderstände für Pfahl und Sonde gleich groß sind, andererseits aber die genannten Streuungen vorkommen, wurde empfohlen, zur Berechnung der Bruchlast von Pfählen den Wert des Spitzenwiderstandes der Sonde zu nehmen und durch 1,4 zu teilen. Nachdem zu den hier dargestellten Ergebnissen noch weitere hinzugekommen sind, ging man nach einem Vorschlag von van der Veen [17] dazu über, statt 1,4 einen Faktor von 1,5 der Errechnung der Bruchlast des Pfahles aus dem Sondenwiderstand zu Grunde zu legen. Um hieraus die zulässige Pfahlbelastung zu bekommen, muß selbstverständlich noch ein zweiter Sicherheitsfaktor eingeführt werden. Ist dieser z.B. 1,67, so muß die Sondenbruchspannung durch $1,5 \cdot 1,67 = 2,5$ dividiert werden, um die zulässige Pfahllast zu erhalten.

Menzenbach [9] ist dem Problem der Beziehung zwischen Spitzenwiderstand des Pfahles und dem der Sonde rein statistisch nachgegangen. Er untersuchte 88 Pfähle mit Durchmessern zwischen 12 und 124 cm, die im Kiesboden standen, und trug das Verhältnis des Spitzenwiderstandes von Pfählen zu dem der Sonde in einem Häufigkeitsdiagramm auf. Als Mittelwert fand er für das vorher genannte Verhältnis vom Spitzenwiderstand des Pfahles zu dem der Sonde den Wert 1,17. Als ungünstigsten Wert fand er allerdings das Verhältnis 2,4.

Dieser große Wert betraf aber nur 17 % der Pfähle, und zwar nur solche mit besonders großem Durchmesser. Bei den übrigen Pfählen lag das Verhältnis bei 1,5, wie es von den Holländern auch festgestellt worden ist. Bei Pfählen mit großem Durchmesser muß man auf die dadurch bedingte Verkleinerung der Tragfähigkeit gegenüber der Sonde Rücksicht nehmen.

Bei der Internationalen Tagung für Bodenmechanik und Gründungen 1961 hat Kérisel interessante Versuchsergebnisse über die Tragfähigkeit von Sonden, Pfählen und Brunnen vorgelegt [7].

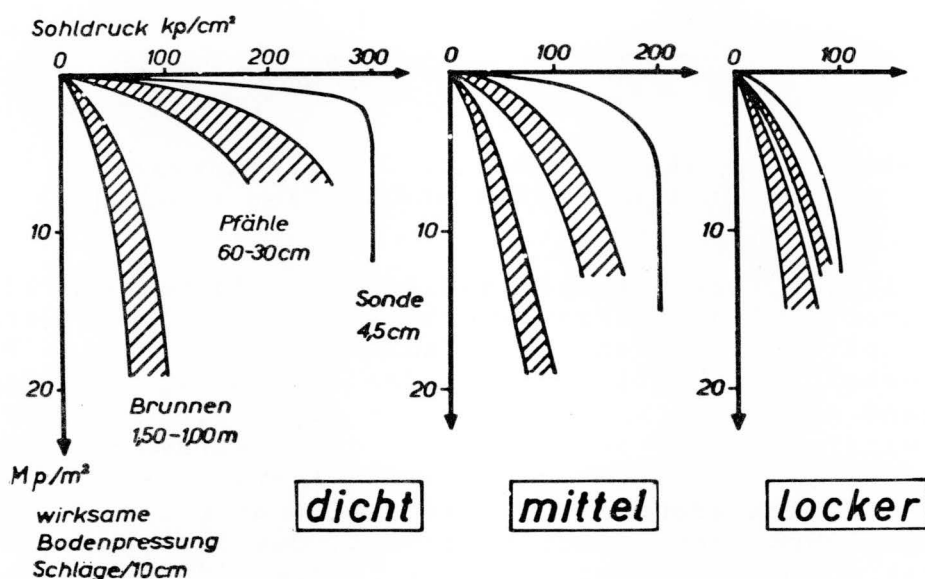


Abb.11 Spitzenwiderstand von Sonden, Pfählen und Brunnen in Sanden verschiedener Dichte (nach [7])

Auf der Abszisse der Abb. 11 ist die Tragfähigkeit in kp/cm^2 auf der Ordinate die in der Höhe der Pfahlspitze wirkende Bodenpressung angegeben. Diese wirksame Bodenpressung in Mp/m^2 der Tiefe in Metern. Man sieht deutlich, daß die Grundbruchsicherheit mit größer werdendem Pfahldurchmesser abnimmt. Für Pfähle von nicht zu großem Durchmesser, wenn diese außerdem in nicht zu dicht gelagerten Sanden stehen, ist aber der von den Holländern vorgeschlagene Wert von 1,5 durchaus praktisch anwendbar. Bei der Übertragung der Sondierergebnisse auf Pfahlbelastungen muß also auf die Größe der Pfähle bzw. Brunnen geachtet werden. Hierauf hat besonders de Beer hingewiesen und auch herausgestellt, daß die Tiefe, bis zu der die Pfähle in einer Sandschicht unter weichen Schichten einbinden, bei dem Vergleich berücksichtigt werden muß [4].

5. Flügelsonden und Isotopensonden

Der Vollständigkeit halber sei noch kurz auf die Flügel- und Isotopensonden hingewiesen, die nicht in der Norm DIN 4094 enthalten sind, die der Arbeitsausschuß "Sonden" aber ebenfalls behandelt.

Die Flügelsonde besteht aus einem Gestänge, an dessen unterem Ende Flügel angeschweißt sind. Sie wird in den Boden eingedrückt, oder eingetrieben und dann mit einem Handgriff gedreht. Hierbei wird das zur Erreichung des Maximalwertes erforderliche Drehmoment gemessen und die Scherfestigkeit beim Bruch für weiche bindige Böden gefunden. Anschließend kann man auch weiterdrehen und nun die Scherfestigkeit des Bodens beim Gleiten ermitteln. Man erhält damit auch ein Maß für die Störungsempfindlichkeit bindiger Böden.

Die Isotopensonden sind in steigendem Maße nach dem Kriege entwickelt worden und erlauben es, ohne Entnahme von Bodenproben das Feuchtraumgewicht und den Wassergehalt des Bodens in beliebigen Tiefen zu ermitteln. Dieses Verfahren beruht auf der Absorption oder Streuung von Gammastrahlung bei der Raumgewichtsermittlung oder der Bremsung der Neutronenstrahlung bei der Ermittlung des Wassergehaltes. Wird an Hand gleichzeitig entnommener gestörter Bodenproben im Labor die dichteste und lockerste Lagerung bestimmt, so kann ohne weiteres die Lagerungsdichte ermittelt werden. Herr Dr. Wolters hat als Mitglied des Arbeitsausschusses "Sonden" einen Aufsatz "Strahlenmeßgeräte im Erd- und Straßenbau" in der Bau-technik [19] veröffentlicht. Er soll als Grundlage für die weiteren Diskussionen dienen. Die Arbeit an der Vereinheitlichung der Isotopensonden ist allerdings zurückgestellt, da noch z.Zt. laufende Forschungen abgewartet werden sollen.

6. Zusammenfassung

Die in der DIN 4094 aufgeführten Sonden, die leichte und schwere Rammsonde, die Sonde des Standard Penetration Tests und die Drucksonde, sind wertvolle Geräte zur Untersuchung des Untergrundes und von Schüttungen. Voraussetzung für die Auswertung ist allerdings die Kenntnis der Bodenarten, die im Untergrund anstehen.

Die Sondierungen erlauben eine schnelle und einfache Feststellung von Grenzen verschieden fester Bodenschichten und geben damit eine Ergänzung und Kontrolle der Bohrungen. Darüber hinaus ist es bei nicht bindigen Böden möglich, zusätzliche Informationen über die Lagerungsdichte zu erhalten.

Auch können Aussagen über die Belastbarkeit des Baugrundes bei Flachgründungen, besonders aber bei Pfahlgründungen gemacht werden. Bei diesen Auswertungen müssen aber verschiedene Einflüsse berücksichtigt werden, wie z.B. der Überlagerungsdruck, der Grundwasserstand und vor allem die Bodenart, wobei nicht nur die Kornverteilung sondern auch die Kornform und die Kornrauigkeit eine große Rolle spielen. Daß Aussagen gerade bei nicht bindigen Böden möglich sind, ist ein besonderer Vorteil der Sonden, da ja bekanntlich die Entnahme ungestörter Bodenproben aus diesen Böden kaum oder nur mit großen Schwierigkeiten möglich ist. Bei bindigen Böden ist die Aussagekraft der Ramm- und Drucksonden gering, hier aber können leicht ungestörte Proben aus Bohrungen gewonnen werden.

Der Arbeitsausschuß Sonden hat außer dem Blatt 1 über die Abmessungen und Arbeitsweise der Sondiergeräte das Blatt 2 herausgebracht, das Hinweise für die Anwendung gibt und vor allem die Einflüsse aufzeigen soll, die bei der Auswertung zu beachten sind. Wegen der vielen Faktoren, die sich auf die Sondierung auswirken, können noch keine einfachen und zuverlässigen Angaben über die Beziehung zwischen Sondierwiderstand und bestimmten Bodeneigenschaften gemacht werden. Der Ausschuß arbeitet an dieser Frage aber weiter, wobei er sich im wesentlichen auf systematisch durchgeführte Versuche stützen muß und auf die Auswertung weiterer einzelner Versuchsergebnisse, die allerdings eine vollständige Bodenbeschreibung enthalten müssen.

Der Vortragende dankt allen Mitgliedern des Arbeitsausschusses Sonden für die vielen Anregungen, die er bei den Sitzungen des Arbeitsausschusses erhalten hat und für die Überlassung verschiedener Beispiele, die er in die Erläuterungen der DIN 4094 Blatt 2 aufgenommen und zum Teil in diesem Vortrag aufgeführt hat.

7. Schrifttum

- [1] DIN 4094 Blatt 1 : "Ramm- und Drucksondiergeräte.
(Mai 1964) Abmessungen und Arbeitsweise
der Geräte" mit Erläuterungen
- [2] Vornorm DIN 4094 : "Ramm- und Drucksondiergeräte,
Blatt 2 (Juni 1965) Hinweise für die Anwendung"
mit Erläuterungen
- [3] de Beer, E.E. : "Etudes des fondations sur pi-
lotis et des fondations directs"
Ann.Trav.Publ.Belg.(1945)S.229
- [4] de Beer, E.E. : "The scale effect in the trans-
position of the results of deep-
sounding tests and the ultimate
bearing capacity of piles and
caisson foundations"
Géotechnique 13 (1963) S.39

- [5] Huizinga, T.K. : "Application of results of deep penetration tests to foundation piles". Proc.Bldg.Res. Congr. (1951) Bd.1, S.173
- [6] Kahl, H. : "Derzeitiger Stand des Spitzendruck-Sondierverfahrens" Fortschr.u.Forsch.i.Bauwesen (1955) Teil II,H.25,S.1
- [7] Kérisel, J. : "Fondations profondes en milieux sableux".Proc. 5.Int.Conf.Soil.Mech.Found.Eng.(1961) Bd.2,S.73
- [8] Melzer, Kl.-J. : "Vergleichende Untersuchungen mit verschiedenen Sondenkonstruktionen im Sand". Mitt.Inst.Verkehrswasserb.Grundb.Bodenmech. TH Aachen (1964) H.33, S.173
- [9] Menzenbach, E. : "Die Anwendbarkeit der Sonden zur Prüfung der Festigkeitseigenschaften des Baugrundes".Westdeutscher Verlag Köln u. Opladen 1959
- [10] Paproth, E. : "Der Prüfstab Künzel, ein Gerät für Baugrunduntersuchungen". Die Bautechnik 21 (1943) S.327
- [11] Schubert, K. : "Untersuchung des sandigen Untergrundes durch Rammsondierungen" Bauplanung und Bautechnik (1956) H.12,S.515
- [12] Schultze, E. und Muhs, H. : "Bodenuntersuchungen für Ingenieurbauten". Springer-Verlag Berlin,Göttingen,Heidelberg,1950
- [13] Schultze, E. und Menzenbach, E. : "Standard Penetration Test und Zusammendrückbarkeit des Bodens" Mitt.Inst.Verkehrswasserb.Grundbau u.Bodenmech. TH Aachen(1962) H. 24
- [14] Schultze, E. und Melzer, K.-J. : The détermination of the density and the modulus of compressibility of non-cohesive soils by soundings. Proc. 6 Int.Conf.Soil Mech. Found.Eng. (1965) Bd.1,S.354
- [15] Terzaghi, K. und Peck, R.B. : "Die Bodenmechanik in der Baupraxis".Springer Verlag Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1961

- [16] Thornburn, S. : "Tentative correction chart for the standard penetration tests in non-cohesive soils". Civ. Eng. and Public Works Rev. (1963) S.752
- [17] van der Veen, C. : "The bearing capacity of a pile predetermined by a cone penetration test". Proc. 4 Int. Conf. Soil Mech. Found. Eng., London (1957) Bd. II, S.72
- [18] Weiß, K. : "Neuere Erkenntnisse mit der Spitzendrucksonde". Vorträge der Baugrundtagung 1964 in Berlin, S.227. Deutsche Gesellschaft für Erd- und Grundbau, Essen, 1964.
- [19] Wolters, R. : "Strahlungsmeßgeräte im Erd- und Grundbau". Die Bautechnik 39 (1962) Heft 10
- [20] Zweck, H. : Baugrunduntersuchungen. Der Maschinenschaden 33 (1960) H.5/6, S.91.

Dr. Rostislav Davidenkoff

und

Dr.-Ing. Lehn Franke

Räumliche Sickerströmung

in eine umpundete Baugrube im Grundwasser

Räumliche Sickerströmung in eine umpundete Baugrube im Grundwasser

Von Dr. Rostislav Davidenkoff und Dr.-Ing. Lehn Franke, Bundesanstalt für Wasserbau, Karlsruhe

1. Einleitung

Für eine umpundete Baugrube, ob sie in einem offenen Gewässer oder in einem Boden mit Grundwasser ausgehoben wird, sind — bezüglich der dabei entstehenden Sickerströmung — die in die Baugrube fließende Sickerwassermenge und die Standsicherheit des Bodens der Baugrube gegen einen hydraulischen Grundbruch zu bestimmen.

In einem früheren Aufsatz [2] haben die Verfasser diese Fragen für Baugruben in offenen Gewässern (Fall a) behandelt. Als Fortsetzung dieser Arbeit werden nun Baugruben in einem Boden mit Grundwasser untersucht, wobei das zur Baugrube strömende Grundwasser einmal als Strömung mit freier Oberfläche (Fall b), das andere Mal als artesisch gespanntes Wasser (Fall c) betrachtet wird. Es ist zu bemerken, daß von den Fällen b und c in der Praxis vor allem der Fall b vorkommt.

Die genannten drei Fälle sind in Bild 1 bei einer endlichen Mächtigkeit der durchlässigen Schicht dargestellt. Für jeden Fall ist annähernd die allgemeine Richtung der Stromlinien angegeben. Als r ist hier für runde Baugruben der Radius, für quadratische die Hälfte der Baugrubenseite, für lange Baugruben (zweidimensionales Problem) die Hälfte der Baugrubenbreite, als R die Reichweite der zur Baugrube fließenden Grundwasserströmung (auch im zweidimensionalen Fall) bezeichnet.

Der bei einer Baugrube im Grundwasser maßgebende Fall b wird gewöhnlich, da für diesen Fall keine Lösung vorliegt, so behandelt, als ob das der Fall a wäre. Es wird angenommen, daß die Grundwasserspeisung im Falle b nicht von der Seite, sondern, wie im Falle a, von oben kommt, so daß die Stromlinien in beiden Fällen denselben Verlauf haben (vgl. die Stromlinien in Bild 1 a mit den punktierten Stromlinien in Bild 1 b).

Um die Frage zu klären, wie weit diese zwei Fälle in bezug auf die Gefahr eines hydraulischen Grundbruches und die Größe der in die Baugrube fließenden Sickerwassermenge sich voneinander unterscheiden, wurden in der Bundesanstalt für Wasserbau 1964/65 systematische Versuche mit Modellen von runden und quadratischen Baugruben bei verschiedenen geometrischen Parametern (s. weiter Abschnitt 2) nach der Methode der elektro-hydrodynamischen Analogie durchgeführt. Dabei wurde von dem theoretisch und versuchstechnisch einfacher zu behandelnden Fall c einer Baugrube in einem artesisch gespannten Grundwasser ausgegangen. Dieser Fall wurde versuchstechnisch an dreidimensionalen runden und quadratischen Analogiemodellen und theoretisch — für eine ebene Sickerströmung — mit Hilfe des Fragmentenverfahrens (s. weiter Abschnitt 3) untersucht. Um vom Fall c zum Fall b übergehen zu können, wurden einige Versuche an zweidimensionalen Analogiemodellen durchgeführt, die einen, wenn auch qualitativen Vergleich zwischen diesen zwei Fällen gestatteten. Diese Versuche und einige Überlegungen haben gezeigt, daß der Fall c eines artesisch gespannten Grundwassers in bezug auf die Größe des Zuflusses und die Gefahr des hydraulischen Grundbruches auf der sicheren Seite liegt, so daß die mit dreidimensionalen Analogiemodellen für den Fall c durchgeführten Versuche als Grundlage für die praktischen Berechnungsempfehlungen des Falles b angenommen werden konnten.

Die Ergebnisse der durchgeführten Untersuchungen ermöglichen für eine umpundete Baugrube in einem Boden mit Grundwasser die zur Verhinderung eines hydraulischen Grundbruches notwendige Rammtiefe der Spundwand und den zu erwartenden Zufluß in die Baugrube bei einer stationären Grundwasserströmung zu berechnen. Dabei hat es sich gezeigt, daß im Falle b die Gefahr eines hydraulischen Grundbruches und die Größe des Zuflusses bei bestimmten Verhältnissen kleiner sind als im Falle a, so daß die übliche Berechnung, in der diese Fälle als identisch betrachtet werden, bisweilen zu unwirtschaftlichen Lösungen führt.

2. Berechnungsgrundlagen

Für alle drei in Bild 1 dargestellten Fälle wird bei stationärer Strömung der Zufluß zur Baugrube nach der Formel:

$$q = k \cdot h \cdot f \dots \dots \dots (1)$$

und der hydraulische Grundbruch nach der Formel:

$$\eta = \frac{\gamma_a \cdot s_2}{\gamma_w \cdot h \cdot \varphi_s} \dots \dots \dots (2)$$

berechnet [2]. Hier sind:

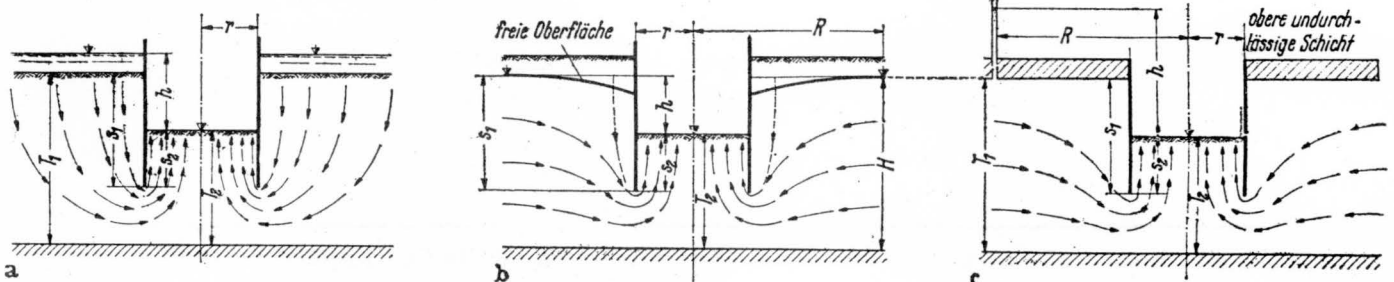


Bild 1. Baugruben im offenen Gewässer (a), im Grundwasser mit freier Oberfläche (b) und im artesischen Grundwasser (c)

Rostislav Davidenkoff/Lehn Franke

Räumliche Sickerströmung in eine umpundete Baugrube im Grundwasser

- q = Zufluß je Längeneinheit der Spundwand; bei einer quadratischen Baugrube ist unter q der mittlere Zufluß je Längeneinheit der Spundwand gemeint.
- k = Durchlässigkeitsbeiwert des als homogen, isotrop und kohäsionslos angenommenen Bodens
- h = Differenz der Standrohrspiegelhöhen beiderseits der Spundwand (Fall a) bzw. zwischen dem nicht abgesenkten Grundwasserspiegel und der Baugrubensohle (Fälle b und c), siehe Bild 1
- η = Sicherheitsbeiwert, der gewöhnlich 1,5 bis 2,0 beträgt [2]
- φ_s = Potential am Spundwandfuß bezogen auf das gesamte Potential h
- γ_a = Raumbgewicht des Bodens unter Auftrieb
- γ_w = Raumbgewicht des Wassers
- s_2 = Rammtiefe der Spundwand (Bild 1)
- f = Formfaktor, der eine Funktion der Geometrie des Systems ist.

Der Formfaktor f und das Potential am Spundwandfuß φ_s sind für den Fall a von den Parametern (Bild 1)

$$\frac{T_1}{r}, \frac{s_1}{T_1}, \frac{s_2}{T_1} \text{ (bzw. } T_2) \text{ und für die Fälle b und c von den Parametern } \frac{T_1}{r}, \frac{s_1}{T_1}, \frac{s_2}{T_1} \text{ (bzw. } T_2) \text{ und } \frac{R}{r} \text{ abhängig.}$$

R ist, wie gesagt, die Reichweite der zur Baugrube fließenden Grundwasserströmung bzw. die Entfernung der Baugrube von einem offenen Gewässer. Man sieht, daß in den Fällen b und c im Vergleich mit dem Fall a ein zusätzlicher Parameter $\left(\frac{R}{r}\right)$ zu berücksichtigen ist, wodurch die Behandlung der letzteren Fälle erschwert wird.

Ein anderer wesentlicher Unterschied zwischen dem Fall a und dem Fall b besteht in folgendem:

Im Falle a (bei offener Wasserhaltung) treten die ungünstigsten Verhältnisse für die Berechnung des Zuflusses und des hydraulischen Grundbruches bei der vollen Trockenlegung der Baugrube (wenn vorher unter Wasser gebaggert wurde), d. h. bei der nun sich einstellenden stationären Sickerströmung ein; dabei erreichen die Größen h und φ_s in den Formeln (1) und (2) ihren maximalen Wert. In dem in der Praxis bei einer Grundwasserströmung meist vorkommenden Fall b werden dagegen während der Trockenlegung der Baugrube der Zufluß zur Baugrube und die für die Berechnung des hydraulischen Grundbruches maßgebenden Wasserdrücke in der nun nicht stationären Grundwasserströmung mehr oder weniger größer sein als die beim nachher eintretenden stationären Zustand. Da die weiter beschriebenen Untersuchungen bei der Verwendung der Formeln (1) und (2) für einen stationären Zustand durchgeführt wurden, können ihre Ergebnisse ohne Einschränkung nur zu dem Fall angewendet werden, bei dem während der Absenkung des Wasserspiegels in der Baugrube die zur Baugrube fließende Grundwasserströmung sich in jedem Zeitpunkt nicht wesentlich von dem für diese Verhältnisse geltenden stationären Zustand unterscheidet. Das ist gewöhnlich der Fall bei den hier behandelnden kohäsionslosen, d. h. mehr oder weniger durchlässigen Sandböden, für die laut [4] in den meisten praktischen Fällen (wenn die Absenkung nicht zu rasch erfolgt) die stationäre Sickerströmung für die Berechnung des Zuflusses und des hydraulischen Grundbruches als maßgebend angenommen werden kann.

Zum Schluß dieses Abschnittes sei noch erwähnt, daß ein hydraulischer Grundbruch sich zu einem Durchbruch des Sickerwassers in die Baugrube nur unter der Bedingung einer genügenden Wasserzufuhr entwickeln kann. Das ist für eine Baugrube in offenem Gewässer (Bild 1 a) der Fall, bei dem es im Endstadium zu einem Durchbruch des Wassers vom Fluß her in die Baugrube kommt. Diese Bedingung ist aber für eine Baugrube im Grundwasser (Bild 1 b und 1 c), wenn der Boden homogen ist und keine größeren Schichten enthält, die in einer Verbindung mit einem nahe liegenden offenen Gewässer stehen, nicht gegeben. Wenn die Sickerströmung aus dem Grundwasser gespeist wird, kommt das anfängliche Fließen des Sandes in die Baugrube selbst zum Stillstand, wie dies Schmid-

bauer [3] in Modellversuchen beobachtet hat, so daß in diesem Fall der Boden in der Baugrube bei demselben Sicherheitsbeiwert η gegen einen hydraulischen Grundbruch sich in günstigeren Verhältnissen befindet als im Falle a, Bild 1.

3. Anwendung des Fragmentenverfahrens für die Untersuchung der ebenen Strömung eines artesisch gespannten Grundwassers in eine umpundete Baugrube

Das von Pavlovsky und Dachler vorgeschlagene Fragmentenverfahren wurde in unserem Aufsatz [2] erläutert. Hier werden nur Formeln und Diagramme für den Fall Bild 1 c, der in Bild 2 für eine ebene Sickerströmung nochmals dargestellt ist, wiedergegeben.

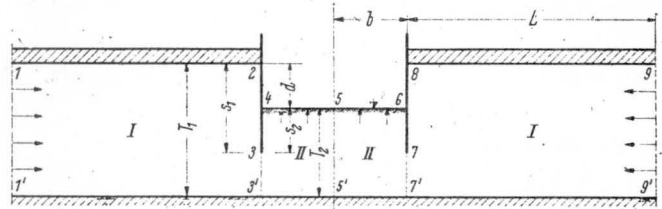


Bild 2. Schema für die Anwendung des Fragmenten-Verfahrens zum Fall c in Bild 1

Für den Bereich I (1—2—3—3'—1' bzw. 9—8—7—7'—9') wird nach Aravin und Numerov [1] die Größe $\Phi_I = \frac{1}{f_1}$ (f_1 = Formfaktor für diesen Bereich) gleich (Bezeichnungen s. Bild 2):

$$\Phi_I = \frac{L}{T_1} - 1,47 \lg \left(\cos \frac{\pi \cdot s_1}{2 \cdot T_1} \right) \dots \dots \dots (3)$$

Diese Formel gilt für $L \geq T_1$.

Für den Bereich II (4—3—3'—5'—5 bzw. 6—7—7'—5'—5) wird die Größe Φ_{II} dieselbe sein wie in Bild 1 a (Baugruben in offenen Gewässern), so daß diese aus dem entsprechenden Diagramm in [2] entnommen werden kann.

In Bild 3 ist ein Diagramm der Größen Φ_I und Φ_{II} in Abhängigkeit von $\frac{s_1}{T_1}$, $\frac{s_2}{T_2}$, $\frac{T_2}{b}$ und $\frac{L}{T_1}$ (Bild 2) für den Fall Bild 1 c aufgetragen.

Der obere Teil des Diagrammes gilt für die Bestimmung von Φ_I , der untere Teil für die Bestimmung von Φ_{II} . Die Länge $L + b$ stellt die Reichweite der zur Baugrube fließenden Grundwasserströmung dar. Der untere Teil des Diagrammes kann auch für die Berechnung von Φ_I und Φ_{II} für den Fall a benutzt werden, und zwar gilt dann die Kurve $\frac{T_2}{b} = 0$ für die Bestimmung von Φ_I , während für die Bestimmung von Φ_{II} alle Kurven gelten (s. auch Bild 5 in [2]).

Für die Berechnung der von einer Seite in die Baugrube je Längeneinheit der Spundwand fließenden Sickerwassermenge nach der Formel (1) braucht man den Formfaktor f . Er ist gleich:

$$f = \frac{1}{\Phi_I + \Phi_{II}} \dots \dots \dots (4)$$

Für die Berechnung des hydraulischen Grundbruches nach der Formel (2) braucht man das Potential am Spundwandfuß. Man erhält es aus der Formel:

$$\varphi_s = \frac{\Phi_{II}}{\Phi_I + \Phi_{II}} \dots \dots \dots (5)$$

Aus dem Diagramm Bild 3 und den Formeln (3), (4) und (5) kann man bezüglich der Größe von f und φ_s folgende Schlüsse ziehen:

- Bei $L = \infty$ $\Phi_I = \infty$ $f = 0$ $\varphi_s = 0$
- Bei $L = 0$ $\Phi_I = 0$ $f = \frac{1}{\Phi_{II}}$ $\varphi_s = 1$

d. h. je kleiner die Länge L , desto größer der Zufluß des Grundwassers zur Baugrube und die Gefahr eines hydraulischen Grundbruches.

4. Qualitativer Vergleich zwischen den Fällen b und c

4.1. Allgemeines

Der Vergleich der Größe des Formfaktors f für die Fälle b und c (Bild 1) wird in der Weise durchgeführt, daß zunächst die Formfaktoren für einen artesischen Brunnen und einen Brunnen mit freier Oberfläche, die in Bild 4 dargestellt sind, miteinander verglichen werden. Für die beiden Fälle sind die Größen H , R und r_0 einander gleich.

Im Falle eines artesischen Brunnens (Fall c) ist der Zufluß zu Brunnen gleich:

$$Q_c = \frac{k \cdot 2 \cdot \pi \cdot H (h_1 - h_2)}{\ln \frac{R}{r_0}} \dots (6)$$

Für den Brunnen mit freier Oberfläche (Fall b) ist der Zufluß gleich:

$$Q_b = k \cdot \pi \cdot \frac{H^2 - h_0^2}{\ln \frac{R}{r_0}} = k \cdot \pi \cdot \frac{(H + h_0)(H - h_0)}{\ln \frac{R}{r_0}} \dots (7)$$

Wenn nun die Ausdrücke (6) und (7) auf die Form

$$Q = k \cdot h \cdot f$$

gebracht werden, sind die entsprechenden Formfaktoren (sie haben hier die Dimension der Länge), da $h = h_1 - h_2$ im Fall c und $H - h_0$ im Fall b ist, gleich:

Für den artesischen Brunnen

$$f_c = \frac{2 \cdot \pi \cdot H}{\ln \frac{R}{r_0}} \dots (8)$$

Für den Brunnen mit freier Oberfläche

$$f_b = \frac{\pi (H + h_0)}{\ln \frac{R}{r_0}} \dots (9)$$

Das Verhältnis $\frac{f_c}{f_b}$ (bei denselben H , R und r_0) ist danach gleich:

$$\frac{f_c}{f_b} = \frac{2H}{H + h_0} = \frac{2}{1 + \frac{h_0}{H}} \dots (10)$$

Da h_0 immer kleiner als H ist, ist der Ausdruck $1 + \frac{h_0}{H}$ immer kleiner als 2 und der rechte Teil der Gleichung (10) immer größer als 1, d. h.,

$$\frac{f_c}{f_b} > 1 \dots (11)$$

Daraus folgt, daß die Größe $\Phi_c = \frac{1}{f_c}$ immer kleiner als die Größe $\Phi_b = \frac{1}{f_b}$ ist, und der Unterschied zwischen Φ_c und Φ_b (bei gleichen H , R und r_0) nur vom Verhältnis $\frac{h_0}{H}$ abhängt. Dieser Unterschied wird um so größer, je kleiner dieses Verhältnis ist.

Wenn nun der Zufluß in eine umpundete Baugrube betrachtet wird, so ist aus dem Vergleich von Bild 1 (bzw. 2) und Bild 4 zu ersehen, daß das Verhältnis der Formfaktoren in den Fällen b und c für den Bereich I bei gleichen R , r und T_1 (Fall c) = H (Fall b) dem Verhältnis der Formfaktoren für einen artesischen Brunnen und einen Brunnen mit freier Oberfläche bei gleichen H , R und r_0 qualitativ entspricht. Das bedeutet, daß in den Formeln (4) und (5) die Größen f und φ_s , da die Φ_{II} -Werte in den Fällen b und c dieselben bleiben, bei kleineren Φ_I -Werten größer werden, d. h.:

$$f_c > f_b, \text{ weil } \frac{1}{\Phi_{I(c)} + \Phi_{II}} > \frac{1}{\Phi_{I(b)} + \Phi_{II}} \dots (12)$$

und

$$\varphi_{s(c)} > \varphi_{s(b)}, \text{ weil } \frac{\Phi_{II}}{\Phi_{I(c)} + \Phi_{II}} > \frac{\Phi_{II}}{\Phi_{I(b)} + \Phi_{II}} \dots (13)$$

Um die Differenz in den Werten f und φ_s für die Fälle c und b größenordnungsgemäß abschätzen zu können, wurden folgende Versuche mit ebenen Analogiemodellen durchgeführt.

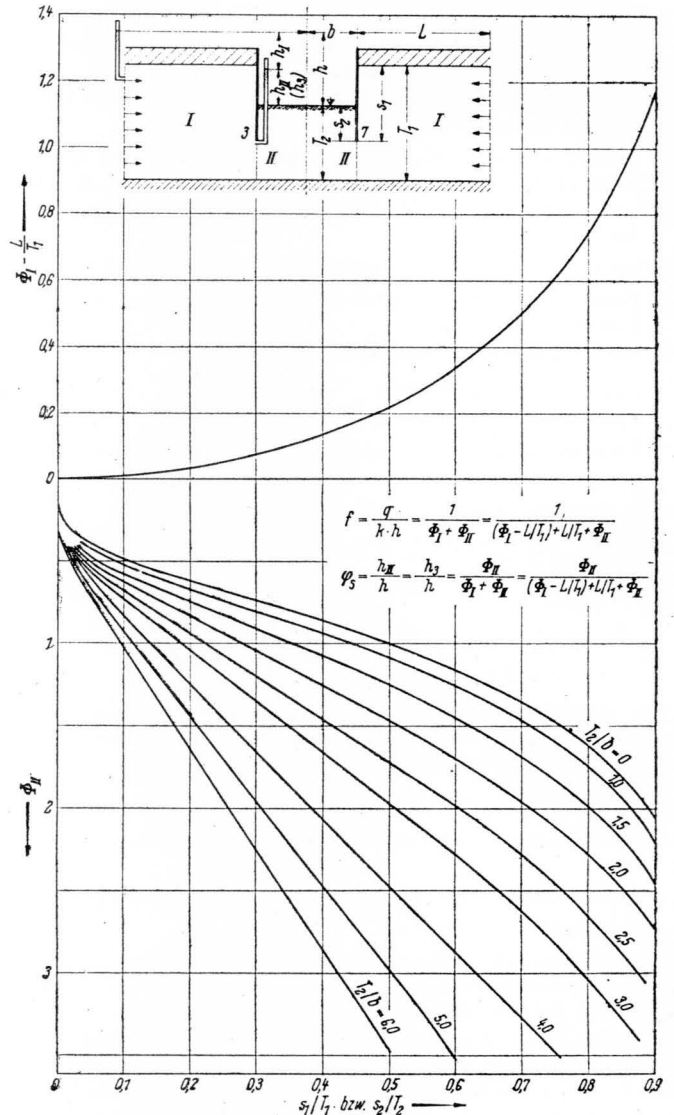


Bild 3. Diagramm zur Berechnung des Formfaktors f und des Potentials am Spundwandfuß φ_s für eine ebene artesische Sickerströmung

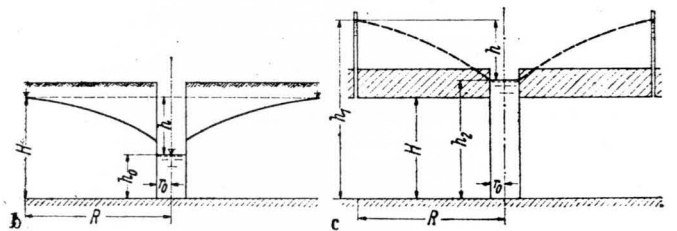


Bild 4. Schema zum Vergleich der Formfaktoren für einen Brunnen mit freier Oberfläche (b) und einen artesischen Brunnen (c)

4.2. Versuche mit ebenen Analogiemodellen

Es wurden 12 Versuche, 7 mit leitfähigem Papier und 5 mit einem Neusilberblech durchgeführt, mit dem Ziel, die im vorigen Abschnitt aus dem Vergleich zwischen artesischen Brunnen und Brunnen mit freier Oberfläche abgeleiteten Beziehungen (12) und (13) qualitativ nachzuprüfen, sowie die aus dem Berechnungsdiagramm Bild 3 entnommenen φ_s - und f -Werte mit den experimentell gewonnenen Werten zu vergleichen.

Da nach (10) die Beziehungen (12) und (13) bei gleichen anderen Verhältnissen nur von der Größe $\frac{h_0}{H}$ abhängen, wurden für die lediglich als grobe Näherung gedachten Versuche das Schema von

Räumliche Sickerströmung in eine umpundete Baugrube im Grundwasser

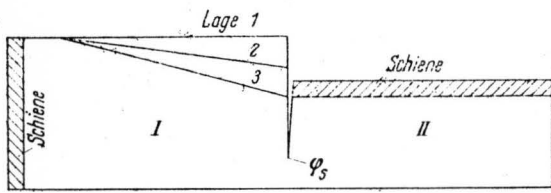


Bild 5. Schema des ebenen Analogiemodells zur Untersuchung der Änderung des Potentials φ_s am Spundwandfuß bei Lagen 1 bis 3

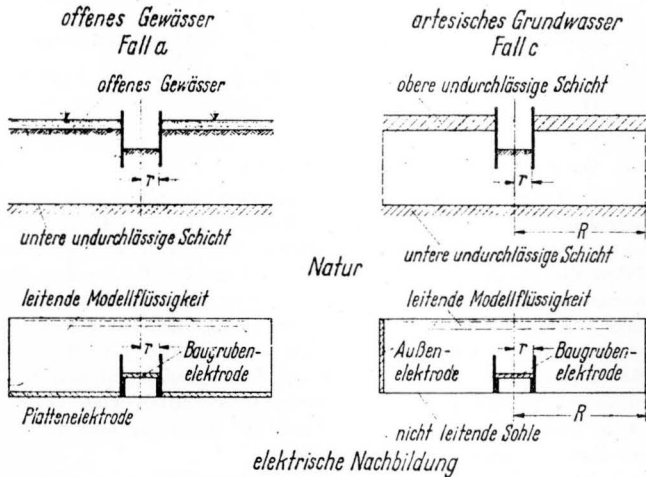


Bild 6. Randbedingungen in der Natur und ihre elektrische Nachbildung, für die Fälle a und c in Bild 1

Bild 5 verwendet. Bild 5 stellt die Hälfte des beim Zufluß in eine umpundete Baugrube entstehenden Grundwasserströmungsbereiches dar. Analog dem Bild 3 kann man diesen Bereich als zwei Fragmente I und II betrachten. In den Versuchen wurde das Potential am Spundwandfuß φ_s bei verschiedenen Lagen der oberen Grenze des Fragmentes I (Bild 5) gemessen, um die Tendenz in der Änderung dieses Potentials mit der Änderung der genannten Lage festzustellen und das gemessene Potential φ_s mit dem nach Bild 3 für den Fall c (Lage 1 in Bild 5) berechneten zu vergleichen.

Tabelle 1. Ergebnisse der Versuche mit runden Baugruben

$\frac{T_1}{r}$	s_1 T_1	s_2 T_2	$\frac{T_2}{r(b)}$	$\frac{L}{T_1}$ (Bild 2)	Potential φ_s					Formfaktor f				
					gemessen (Fall c)	berechnet nach Bild 2	(1) (2)	gemessen (Fall a)	(1) (4)	gemessen (Fall c)	berechnet nach Bild 2	(6) (7)	gemessen (Fall a)	(6) (10)
0,293	0,575	0,538	0,276	16,65	0,17	0,060	2,83	0,55	0,31	0,13	0,055	2,37	0,46	0,28
0,293	0,575	0,370	0,201	16,65	0,14	0,047	2,98	0,48	0,29	0,14	0,056	2,50	0,54	0,26
0,298	0,825	0,810	0,276	16,65	0,22	0,088	2,50	0,55	0,40	0,11	0,052	2,11	0,32	0,34
0,298	0,825	0,625	0,179	16,65	0,19	0,065	2,92	0,48	0,40	0,12	0,053	2,26	0,37	0,32
0,746	0,230	0,206	0,724	6,66	0,24	0,092	2,61	0,59	0,41	0,30	0,135	2,22	0,71	0,42
0,746	0,530	0,515	0,724	6,66	0,34	0,138	2,46	0,61	0,56	0,24	0,127	1,89	0,44	0,55
0,746	0,820	0,815	0,730	6,66	0,42	0,191	2,20	0,60	0,70	0,18	0,109	1,65	0,27	0,67
1,49	0,115	0,103	1,470	3,33	0,32	0,148	2,16	0,60	0,53	0,46	0,255	1,81	0,80	0,57
1,49	0,265	0,254	1,470	3,33	0,46	0,199	2,31	0,66	0,70	0,38	0,236	1,61	0,53	0,72
1,49	0,515	0,508	1,470	3,33	0,58	0,260	2,23	0,71	0,82	0,28	0,206	1,36	0,35	0,80
1,49	0,810	0,807	1,480	3,33	0,63	0,327	1,93	0,71	0,89	0,20	0,183	1,09	0,22	0,91
2,98	0,058	0,050	2,96	1,67	0,38	0,251	1,52	0,61	0,62	0,57	0,448	1,27	0,81	0,70
2,98	0,058	0,026	2,88	1,67	0,30	0,220	1,36	0,52	0,58	0,63	0,467	1,35	0,96	0,66
2,93	0,133	0,126	2,96	1,67	0,53	0,324	1,64	0,68	0,78	0,47	0,400	1,18	0,56	0,84
2,98	0,133	0,067	2,79	1,67	0,43	0,269	1,60	0,56	0,77	0,57	0,433	1,32	0,75	0,76
2,98	0,268	0,252	2,96	1,67	0,67	0,409	1,64	0,75	0,89	0,34	0,341	1,00	0,37	0,92
2,98	0,268	0,144	2,59	1,67	0,55	0,336	1,64	0,64	0,86	0,47	0,385	1,22	0,52	0,90
2,98	0,508	0,505	2,96	1,67	0,73	0,509	1,53	0,82	0,95	0,23	0,257	0,90	0,23	1,00
2,98	0,508	0,336	2,22	1,67	0,67	0,433	1,55	0,71	0,94	0,34	0,297	1,15	0,35	0,97
2,98	0,808	0,806	2,96	1,67	0,81	0,551	1,47	0,83	0,98	0,15	0,182	0,82	0,15	1,00
2,98	0,808	0,675	1,77	1,67	0,70	0,505	1,39	0,71	0,99	0,24	0,200	1,20	0,24	1,00

Die Versuche haben im Einklang mit den Beziehungen (12) und (13) ergeben, daß mit Übergang von der Lage 1 (artesischer Fall) zur Lage 3 das Potential am Spundwandfuß abnahm. In den durchgeführten Versuchen war diese Abnahme unbedeutend und überschritt nicht etwa 7% von φ_s bei der Lage 1.

Der Vergleich der für den Fall c (Lage 1 in Bild 5) gemessenen und nach dem Fragmenten-Verfahren (Bild 3) berechneten φ_s -Werte ergab, daß die Abweichung zwischen den beiden Werten 3 bis 9% betrug, was als zulässig angesehen werden kann.

5. Versuchstechnische Untersuchung der räumlichen Sickerströmung in eine umpundete Baugrube im artesisch gespannten Grundwasser

5.1. Analogiemodell

Für die versuchstechnische Untersuchung des Falles c in Bild 1 wurde die schon früher [2] beschriebene, für die Versuche mit Modellen der Baugruben im offenen Gewässer verwendete Anlage benutzt; nur wurde nun die am Boden des Modells angelegte Plattenelektrode entfernt und die aus versilbertem, zu einem Kreisring von 30 cm Durchmesser gebogenen Kupferblech bestehende Außenwand des elektrolytischen Troges als Außenlektrode benutzt. Der Abstand dieser Elektrode vom Zentrum der Baugrube R entspricht der Reichweite der zur Baugrube fließenden Grundwasserströmung. In Bild 6 sind die Fälle a und c in der Natur und in ihrer elektrischen Nachbildung schematisch dargestellt. Bei der elektrischen Nachbildung ist das Modell um 180° um die tatsächliche Lage (in der Natur) gedreht.

Es wurden dieselben runden und quadratischen Baugrubenmodelle aus Trovidur mit einem konstanten Verhältnis $\frac{R}{r} = 6$ (r = Radius des runden Modells bzw. die Hälfte der Seitenlänge des quadratischen Modells) untersucht. Die elektrische Anlage und Versuchsdurchführung waren dieselben wie bei den Versuchen mit Modellen im offenen Gewässer [2], so daß es sich erübrigt, hier davon zu berichten.

5.2. Versuchsergebnisse und ihre Auswertung

5.2.1. Runde Baugruben

In der Tabelle 1 sind für das Modell einer runden Baugrube das im Versuch gemessene Potential φ_s am Spundwandfuß und der nach der Formel

$$f = \frac{J \cdot \varphi}{U \cdot 2 \cdot \pi \cdot r} \quad (14)$$

errechnete Formfaktor f aufgetragen. In der Formel (14) bedeuten:

- J = Stromstärke
- U = die am Modell angelegte Spannung
- ρ = spezifischer Widerstand der leitenden Modellflüssigkeit
- r = Radius des Modells.

Außer den gemessenen φ_s - und f -Werten sind in der Tabelle 1 die nach dem Diagramm Bild 3 berechneten φ_s - und f -Werte für die ebene Sickerströmung, sowie die aus den früheren Versuchen [2] entnommen entsprechenden Werte für den Fall a (Baugruben in offenen Gewässern) aufgetragen.

Aus der Tabelle 1 ist folgendes zu ersehen:

1. Der Vergleich zwischen den φ_s - und f -Werten für die Fälle a (offenes Gewässer) und c (artesisches Grundwasser) zeigt, daß diese Werte im untersuchten Parameterbereich

$$2,98 \geq \frac{T_1}{r} \geq 0,298; 0,825 \geq \frac{s_1}{T_1} \text{ bzw. } \frac{s_2}{T_2} \geq 0,026; \frac{R}{r} = 6$$

für den Fall c kleiner als für den früher untersuchten Fall a bzw. einander gleich sind. Die Werte der Koeffizienten

$$\varepsilon_{\varphi}(c a) = \frac{\varphi_s(\text{Fall c})}{\varphi_s(\text{Fall a})} \text{ und } \varepsilon_f(c a) = \frac{f(\text{Fall c})}{f(\text{Fall a})} \quad (15)$$

die mit steigenden $\frac{T_1}{r}$ und $\frac{s_1}{T_1}$ zunehmen, liegen (s. Spalten 5 und 10 der Tabelle 1) für ε_{φ} zwischen $0,29 \left(\frac{T_1}{r} = 0,298\right)$ und $0,99 \left(\frac{T_1}{r} = 2,98\right)$ und für ε_f entsprechend zwischen $0,26$ und $1,00$. Wenn deshalb der Fall c (oder b) als der Fall a berechnet wird, werden die Ergebnisse bei $\frac{R}{r} = 6$ und $\frac{T_1}{r} < 3,00$ auf der sicheren Seite liegen, wobei die Sicherheit mit kleiner werdenden $\frac{T_1}{r}$ - und $\frac{s_1}{T_1}$ -Werten zunimmt.

2. Der Vergleich der nach Bild 3 für eine ebene Sickerströmung berechneten und im Versuch gemessenen φ_s - und f -Werte (s. Spalten 3 und 8 der Tabelle 1) zeigt, daß der Koeffizient

$$\varepsilon_{\varphi} = \frac{\varphi_s(\text{gemess})}{\varphi_s(\text{berechn})}$$

sich von $1,36 \left(\frac{T_1}{r} = 2,98\right)$ bis $2,98 \left(\frac{T_1}{r} = 0,298\right)$ und der Koeffizient

$$\varepsilon_f = \frac{f(\text{gemess})}{f(\text{berechn})}$$

sich entsprechend von $0,82$ bis $2,50$ ändern, wobei mit kleiner werdenden $\frac{T_1}{r}$ -Werten diese Koeffizienten zunehmen.

Wenn deshalb der räumliche Fall als ebener gerechnet wird, werden die Ergebnisse (für f bei $\frac{T_1}{r} < 3$) auf der unsicheren Seite liegen, und zwar desto mehr, je kleiner das Verhältnis $\frac{T_1}{r}$ ist.

5.2.2. Quadratische Baugruben

In der Tabelle 2 sind die Versuchsergebnisse mit quadratischen Baugruben bezüglich der Größe des Formfaktors f und des Potentials am Spundwandfuß φ_s aufgetragen. Dabei sind als gemessene Größen die Potentiale in der Mitte und in der Ecke einer Baugrubenseite sowie der Formfaktor für eine mittlere Sickerwasser-menge je Längeneinheit der Spundwand angegeben. Die gemessenen φ_s - und f -Werte wurden mit denen nach Bild 3 für die ebene Sickerströmung berechnet, sowie mit denen früher für den Fall a gemessenen f - und φ_s (für die Baugrubenecken)-Werten [2] verglichen. Auch die gemessenen φ_s -Werte für die Mitte und die Ecke einer Baugrubenseite wurden verglichen.

Aus der Tabelle 2 ist folgendes zu ersehen:

1. Die nach (15) berechneten Koeffizienten $\varepsilon_{\varphi}(c a)$ und $\varepsilon_f(c a)$ (s. Spalten 8 und 13 der Tabelle 2), die ebenso wie für runde

Baugruben mit steigenden $\frac{T_1}{r}$ - und $\frac{s_1}{T_1}$ -Werten zunehmen, liegen für den untersuchten Parameterbereich

$$2,98 \geq \frac{T_1}{r} \geq 0,30; 0,935 \geq \frac{s_1}{T_1} \text{ bzw. } \frac{s_2}{T_2} \geq 0,036; \frac{R}{r} = 6$$

Tabelle 2. Ergebnisse der Versuche mit quadratischen Baugruben

$\frac{T_1}{r}$	$\frac{s_1}{T_1}$	$\frac{s_2}{T_2}$	$\frac{T_2}{r(b)}$	$\frac{rL}{T_1}$ (Bild 2)	Potential φ_s								Formfaktor f					
					gemessen (Fall c)		berechnet nach Bild 2	(2)		gemess. (Fall a) Ecke	(2)	ge- messen (Fall c)	berechnet nach Bild 2	(9)	ge- messen (Fall a)	(9)		
					Mitte	Ecke		(1)	(3)								(7)	(10)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)						
0,300	0,700	0,667	0,268	16,65	0,16	0,32	0,071	2,00	2,25	4,50	0,77	0,42	0,10	0,054	1,85	0,29	0,34	
0,300	0,660	0,506	0,206	16,65	0,14	0,29	0,056	2,07	2,50	5,17	0,76	0,38	0,11	0,055	2,00	0,37	0,30	
0,300	0,935	0,932	0,268	16,65	0,25	0,44	0,112	1,76	2,23	3,92	0,81	0,54	0,08	0,055	1,46	0,15	0,53	
0,300	0,875	0,788	0,176	16,65	0,19	0,39	0,082	2,05	2,32	4,75	0,76	0,51	0,08	0,052	1,54	0,21	0,38	
0,746	0,280	0,250	0,715	6,66	0,24	0,37	0,097	1,54	2,48	3,81	0,78	0,48	0,25	0,134	1,87	0,56	0,45	
0,746	0,264	0,160	0,654	6,66	0,18	0,32	0,083	1,78	2,17	3,86	0,73	0,44	0,26	0,137	1,90	0,66	0,39	
0,746	0,470	0,453	0,723	6,66	0,30	0,45	0,126	1,50	2,38	3,57	0,79	0,57	0,22	0,128	1,72	0,41	0,54	
0,746	0,446	0,302	0,592	6,66	0,22	0,38	0,102	1,73	2,16	3,73	0,74	0,51	0,24	0,131	1,83	0,50	0,48	
0,746	0,870	0,865	0,723	6,66	0,40	0,57	0,202	1,43	1,98	2,83	0,78	0,73	0,14	0,103	1,36	0,20	0,70	
0,746	0,850	0,798	0,410	6,66	0,31	0,50	0,180	1,61	1,73	2,78	0,75	0,67	0,17	0,108	1,57	0,26	0,65	
1,49	0,140	0,123	1,46	3,33	0,32	0,47	0,156	1,47	2,05	3,01	0,79	0,60	0,39	0,252	1,55	0,67	0,58	
1,49	0,132	0,075	1,40	3,33	0,24	0,40	0,137	1,67	1,75	2,92	0,74	0,54	0,42	0,258	1,63	0,79	0,53	
1,49	0,235	0,223	1,47	3,33	0,40	0,54	0,190	1,35	2,11	2,85	0,81	0,67	0,35	0,240	1,46	0,53	0,66	
1,49	0,223	0,134	1,34	3,33	0,30	0,47	0,158	1,57	1,90	2,98	0,75	0,63	0,39	0,250	1,67	0,65	0,50	
1,49	0,435	0,426	1,47	3,33	0,50	0,62	0,241	1,24	2,08	2,58	0,81	0,77	0,28	0,217	1,29	0,37	0,76	
1,49	0,425	0,227	1,19	3,33	0,38	0,54	0,175	1,42	2,17	3,08	0,74	0,73	0,34	0,236	1,44	0,49	0,69	
1,49	0,840	0,837	1,46	3,33	0,58	0,71	0,334	1,22	1,74	2,12	0,81	0,88	0,17	0,158	1,08	0,20	0,85	
1,49	0,825	0,706	0,89	3,33	0,44	0,63	0,259	1,43	1,70	2,43	0,74	0,85	0,22	0,178	1,24	0,27	0,81	
2,98	0,070	0,061	2,95	1,67	0,35	0,53	0,268	1,51	1,31	1,98	0,80	0,66	0,49	0,438	1,12	0,71	0,69	
2,98	0,066	0,036	2,89	1,67	0,30	0,48	0,234	1,60	1,28	2,05	0,75	0,64	0,54	0,458	1,18	0,82	0,66	
2,98	0,118	0,111	2,96	1,67	0,45	0,62	0,331	1,38	1,36	1,88	0,82	0,76	0,43	0,398	1,08	0,56	0,77	
2,98	0,112	0,063	2,83	1,67	0,37	0,55	0,267	1,49	1,39	2,07	0,76	0,72	0,50	0,435	1,15	0,69	0,73	
2,98	0,218	0,212	2,96	1,67	0,58	0,72	0,387	1,24	1,50	1,86	0,84	0,86	0,34	0,358	0,95	0,40	0,85	
2,98	0,213	0,123	2,68	1,67	0,46	0,63	0,311	1,37	1,48	2,03	0,77	0,82	0,44	0,403	1,09	0,54	0,82	
2,98	0,420	0,415	2,97	1,67	0,70	0,81	0,483	1,16	1,45	1,68	0,86	0,94	0,24	0,284	0,85	0,26	0,92	
2,98	0,413	0,264	2,38	1,67	0,57	0,72	0,373	1,26	1,53	1,93	0,79	0,91	0,35	0,345	1,02	0,39	0,90	

für ε_r zwischen $0,33 \left(\frac{T_1}{r} = 0,30 \right)$ und $0,94 \left(\frac{T_1}{r} = 2,98 \right)$ und für ε_f entsprechend zwischen $0,30$ und $0,92$.

2. Das Verhältnis der φ_s -Werte für die Mitte und die Ecke einer Baugrubenseite (s. Spalte 4 der Tabelle 2) nimmt mit der Zunahme des Verhältnisses $\frac{T_1}{r}$ ab und liegt zwischen $2,07 \left(\frac{T_1}{r} = 0,30 \right)$ und $1,16 \left(\frac{T_1}{r} = 2,98 \right)$.

3. Das Verhältnis der gemessenen und nach Bild 3 für die ebene Sickerströmung gerechneten φ_s - (für die Mitte einer Baugrubenseite) und f -Werte (s. Spalten 5 und 11 der Tabelle 2) nimmt auch mit der Zunahme des Verhältnisses $\frac{T_1}{r}$ ab und bewegt sich für φ_s zwischen $2,50 \left(\frac{T_1}{r} = 0,30 \right)$ und $1,28 \left(\frac{T_1}{r} = 2,98 \right)$ und für f entsprechend zwischen $2,00$ und $0,85$. Für die Ecke einer Baugrubenseite liegt das entsprechende Verhältnis für φ_s (s. Spalte 6 der Tabelle 2) zwischen $5,17 \left(\frac{T_1}{r} = 0,30 \right)$ und $1,68 \left(\frac{T_1}{r} = 2,98 \right)$.

6. Praktische Empfehlungen

6.1. Allgemeines

Die im vorigen Abschnitt angeführten Versuchsergebnisse gelten für eine Baugrube im artesisch gespannten Grundwasser (Fall c) bei

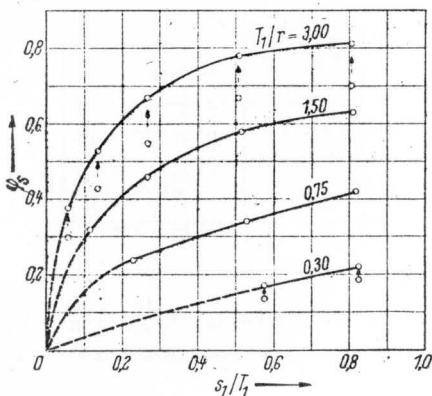


Bild 7. Versuchskurven $\varphi_s = F \left(\frac{s_1}{T_1}, \frac{T_1}{r} \right)$ bei $\frac{R}{r} = 6$ für runde Baugruben

einem konstanten Verhältnis $\frac{R}{r} = 6$. Bei der Übertragung dieser Versuchsergebnisse auf den Fall b (Baugrube im Grundwasser mit freier Oberfläche) werden, wie im Abschnitt 4 gezeigt, die φ_s - und f -Werte auf der sicheren Seite liegen. Die Größe der dabei vorhandenen Sicherheit wird nicht weiter untersucht werden. Dagegen wird versucht, den Einfluß des Verhältnisses $\frac{R}{r}$ auf die φ_s - und f -Werte qualitativ und, wenn möglich, quantitativ zu berücksichtigen.

6.2. Runde Baugruben

6.2.1. Potential φ_s am Spundwandfuß

In Diagramm Bild 7 sind die in Versuchen (bei $\frac{R}{r} = 6$) gemessenen φ_s -Werte in Abhängigkeit von $\frac{s_1}{T_1}$ und $\frac{T_1}{r}$ (abgerundet) aufgetragen. Der Einfluß des Parameters $\frac{s_2}{T_2}$ bei $\frac{s_2}{T_2} \neq \frac{s_1}{T_1}$ wird hier durch den Unterschied in den φ_s -Werten, die bei demselben $\frac{s_1}{T_1}$ und verschiedenen $\frac{s_2}{T_2}$ gemessen wurden, ausgedrückt. Die größten φ_s -Werte erhält man bei $s_1 = s_2$; die Punkte, die diesen Werten entsprechen, sind in Bild 7 durch Kurven verbunden. Die Kurven gehen durch den Nullpunkt, da bei $\frac{s_1}{T_1} = 0$ auch $\varphi_s = 0$ ist. Für die praktische Berechnung können aus dem Diagramm jeweils die größten φ_s -Werte entnommen werden, wobei zwischen den $\frac{T_1}{r}$ -Werten interpoliert werden kann.

Das Diagramm Bild 7 gilt, wie schon gesagt, für $\frac{R}{r} = 6$. Bei $\frac{R}{r} > 6$ werden die φ_s -Werte kleiner und bei $\frac{R}{r} < 6$ werden sie größer. Bei $\frac{R}{r} = \infty$ ist $\varphi_s = 0$ und bei $\frac{R}{r} = 1$ ist $\varphi_s = 1$. In Bild 8 ist die entsprechende etwaige Abhängigkeit $\varphi_s = F \left(\frac{r}{R} \right)$ für $\frac{s_1}{T_1} = 0,1$ und $0,8$ bei $s_2 = s_1$ dargestellt, die für die praktische Berechnung bei $\frac{R}{r} \geq 6$ empfohlen wird. Für andere $\frac{s_1}{T_1}$ - und $\frac{T_1}{r}$ -Werte kann dabei entsprechend interpoliert werden.

6.2.2. Formfaktor f

Der für die Berechnung des Zuflusses nach der Formel (1) notwendige Formfaktor f ist für ein gegebenes $\frac{s_1}{T_1}$ desto größer, je kleiner das Verhältnis $\frac{s_2}{s_1}$ ist. Er ist am kleinsten ($f = \min f$) bei $s_1 = s_2$ und am größten ($f = \max f$) bei $s_2 = 0$. Im weiteren werden die max f -Werte als maßgebend angenommen. Diese Werte wurden folgendermaßen berechnet:

Für die in Versuchen untersuchten $\frac{s_1}{T_1} = \frac{s_2}{T_2}$ -Werte wurden nach Bild 3 die theoretischen f -Werte bei $s_1 = s_2$ (min f) und bei $s_2 = 0$ (max f) berechnet und das Verhältnis $\frac{\max f}{\min f}$ gebildet. Die bei $\frac{s_1}{T_1} = \frac{s_2}{T_2}$ in Versuchen gemessenen min f -Werte wurden mit dem $\frac{\max f}{\min f}$ -Verhältnis multipliziert und die so gewonnenen max f -Werte in Bild 9 aufgetragen, wobei die f -Kurven für $\frac{T_1}{r} = 0,30$ und $0,75$ bis zu $\frac{s_1}{T_1} = 0,1$ extrapoliert worden sind. Das Diagramm Bild 9 gilt für $\frac{R}{r} = 6$. Wenn $\frac{R}{r} > 6$ wird, werden die f -Werte kleiner und wenn $\frac{R}{r} < 6$ wird, werden sie größer. Bei $\frac{R}{r} = \infty$ ist $f = 0$, bei

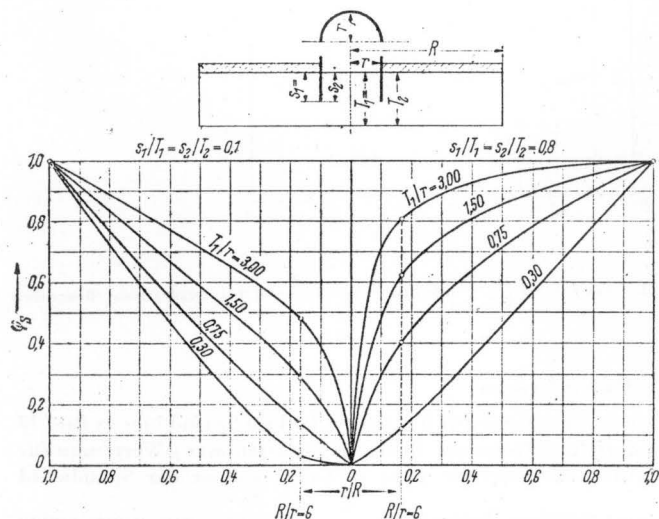


Bild 8. Abhängigkeit des Potentials am Spundwandfuß φ_s von $\frac{T_1}{r}$ und $\frac{r}{R}$ bei $\frac{s_1}{T_1} = \frac{s_2}{T_2} = 0,1$ und $0,8$ für runde Baugruben

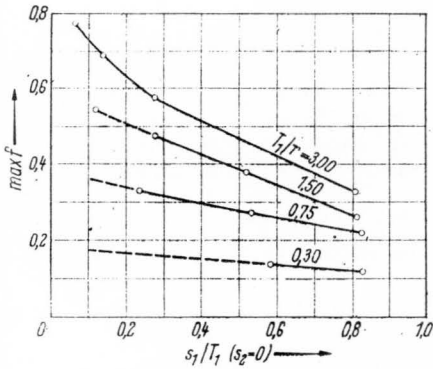


Bild 9. $\max f = F\left(\frac{s_1}{T_1}, \frac{T_1}{r}\right)$ bei $s_2 = 0$ und $\frac{R}{r} = 6$ für runde Baugruben

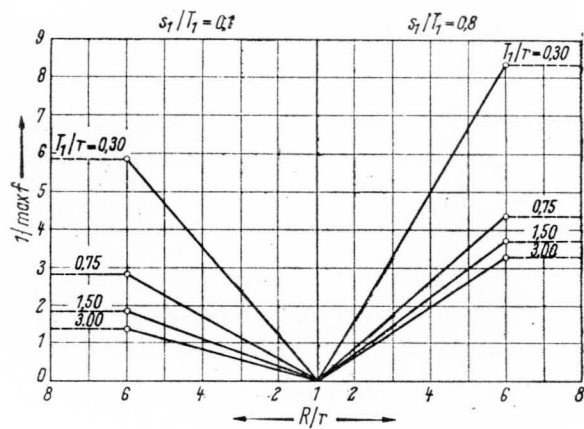


Bild 10. Angenommene Abhängigkeit $\frac{1}{\max f} = F\left(\frac{R}{r}\right)$ bei $s_2 = 0$ für runde Baugruben

$\frac{R}{r} = 1$ ist $f = \infty$. In Bild 10 ist das für die praktische Berechnung bei $\frac{R}{r} \geq 6$ empfohlene Diagramm $\frac{1}{\max f} = F\left(\frac{R}{r}\right)$ für $\frac{s_1}{T_1} = 0,1$ und $0,8$ aufgestellt, in dem die Änderung der $\frac{1}{\max f}$ -Werte für $6 > \frac{R}{r} > 1$ geradlinig angenommen wird (die $\max f$ -Werte für $\frac{R}{r} = 6$ sind aus dem Diagramm Bild 9 entnommen). Für $\frac{R}{r} > 6$ kann sicherheitshalber mit den $\max f$ -Werten für $\frac{R}{r} = 6$ gerechnet werden.

6.3. Quadratische Baugruben

6.3.1. Potential φ_s am Spundwandfuß

Ähnlich wie bei runden Baugruben sind in Bild 11 die im Versuch gewonnenen φ_s -Werte für die Ecken einer Baugrubenseite in Abhängigkeit von $\frac{s_1}{T_1}$ (bei $\frac{R}{r} = 6$) aufgetragen. Die Punkte mit den größten φ_s -Werten (bei $s_1 = s_2$) sind durch Kurven verbunden.

Für $\frac{R}{r} \geq 6$ sind in Bild 12 ähnlich dem Bild 8 die Kurven φ_s (Ecke) = $F\left(\frac{r}{R}\right)$ für $\frac{s_1}{T_1} = 0,1$ und $0,8$ bei $s_1 = s_2$ dargestellt, die für die praktische Berechnung bei $\frac{R}{r} \geq 6$ empfohlen werden. Die φ_s -Werte für die Mitte einer Baugrubenseite können für den untersuchten Parameterbereich laut dem Vorhergesagten von $1\left(\frac{T_1}{r} = 3,00\right)$ bis $2\left(\frac{T_1}{r} = 0,30\right)$ mal kleiner als das Potential in der Ecke angenommen werden.

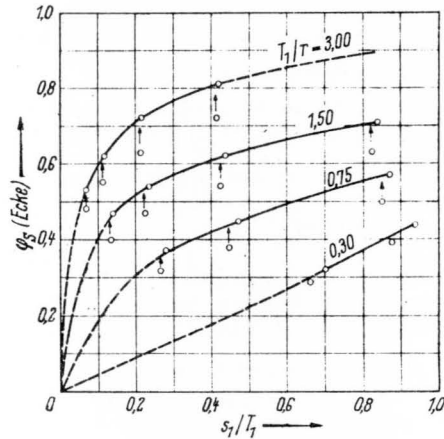


Bild 11. Versuchskurven $\varphi_s = F\left(\frac{s_1}{T_1}, \frac{T_1}{r}\right)$ bei $\frac{R}{r} = 6$ für die Ecken einer quadratischen Baugrube

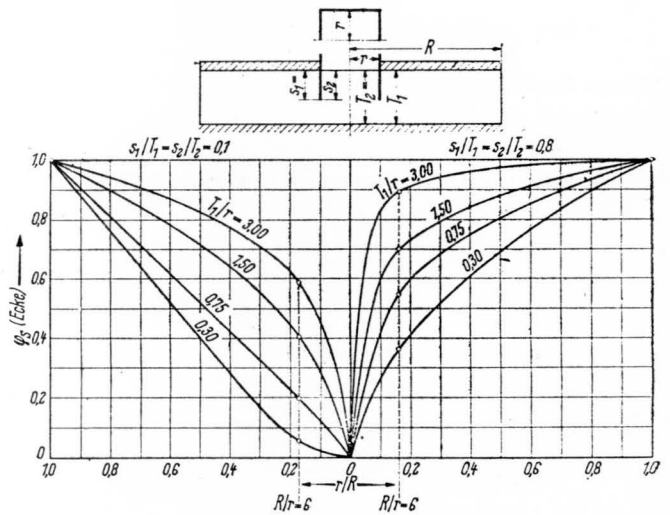


Bild 12. Abhängigkeit des Potentials am Spundwandfuß φ_s von $\frac{T_1}{r}$ und $\frac{r}{R}$ bei $\frac{s_1}{T_1} = \frac{s_2}{T_2} = 0,1$ und $0,8$ für die Ecken einer quadratischen Baugrube

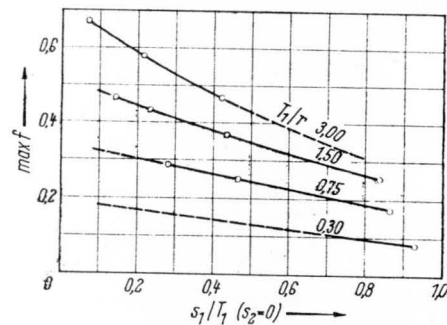


Bild 13. $\max f = F\left(\frac{s_1}{T_1}, \frac{T_1}{r}\right)$ bei $s_2 = 0$ und $\frac{R}{r} = 6$ für quadratische Baugruben

6.3.2. Formfaktor f

Ähnlich wie bei runden Baugruben (s. Bild 9) sind hier in Bild 13 die in derselben Weise wie früher berechneten $\max f$ -Werte nun für die mittlere Sickerwassermenge je Längeneinheit der Spundwand einer quadratischen Baugrube bei $\frac{R}{r} = 6$ aufgetragen, wobei einige Kurven bis zu $\frac{s_1}{T_1} = 0,1$ bzw. $0,8$ extrapoliert worden sind.

Rostislav Davidenkoff / Lehn Franke

Räumliche Sickerströmung in eine umpundete Baugrube im Grundwasser

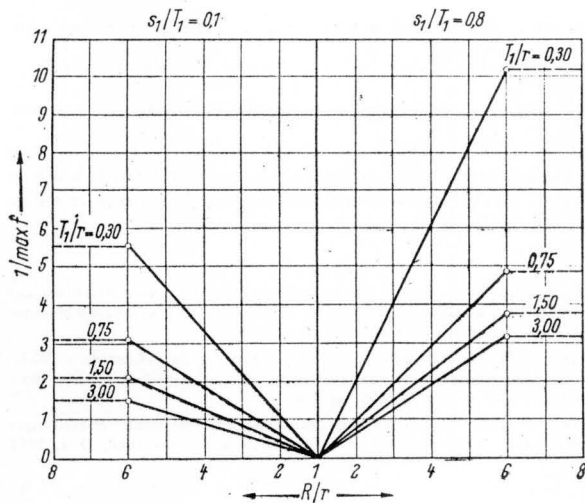


Bild 14. Angenommene Abhängigkeit $\frac{1}{\max f} = F\left(\frac{R}{r}\right)$ bei $s_2 = 0$ für quadratische Baugruben

Ähnlich dem Bild 10 ist die für die praktische Berechnung bei $\frac{R}{r} \geq 6$ empfohlene Abhängigkeit $\frac{1}{\max f} = F\left(\frac{R}{r}\right)$ für $\frac{s_1}{T_1} = 0,1$ und $0,8$ in Bild 14 aufgetragen.

6.4. Baugruben anderer Form

Bei einer rechteckigen Baugrube können das Potential am Spundwandfuß für die Ecken der Baugrube aus Bild 11 bzw. 12 und der Formfaktor für die Berechnung des mittleren Zuflusses aus Bild 13 bzw. 14 abgelesen werden.

Für eine sehr lange rechteckige Baugrube, z. B. bei einem Verhältnis der Länge L_B zur Breite $2b$ von mehr als 10 können die f -Werte — bei der Annahme, daß der Zufluß zu den kurzen Seiten vernachlässigbar klein ist — aus dem Diagramm Bild 3 wie für eine ebene Sickerströmung berechnet werden, da die Versuche mit ebenen Analogiemodellen (s. Abschnitt 4.2) die Brauchbarkeit des Diagrammes für diesen Fall bestätigt haben*). Der Zufluß ist dann gleich:

$$Q = k \cdot f \cdot h \cdot 2 L_B \dots \dots \dots (16)$$

Das Potential am Spundwandfuß für die Mitte der längeren Seiten kann auch aus dem Diagramm Bild 3 entnommen werden. Für die Ecken kann es wiederum aus Bild 11 bzw. 12 abgelesen werden.

Für eine Baugrube unregelmäßiger polygonaler Form bei den Winkeln zwischen benachbarten Seiten $> 90^\circ$ wird empfohlen — wie dies bei der Berechnung der Absenkungsanlagen üblich ist — die Baugrube als Kreis mit derselben Fläche zu betrachten und die Berechnung der Rammtiefe s_2 und des Zuflusses q wie für eine runde Baugrube durchzuführen.

7. Berechnungsbeispiel

Es sollen für die in Bild 15 dargestellte runde, umpundete, einmal in einem Mittel-, das andere Mal in einem Feinsand ausgehobene Baugrube die Rammtiefe s_2 bestimmt werden, bei der unter Annahme einer Sicherheit $\eta = 2$ kein hydraulischer Grundbruch stattfindet; für diese Rammtiefe soll dann der Formfaktor f bestimmt werden. Die s_2 -Werte sowie die Größe des Formfaktors bei diesen Rammtiefen sollen mit den entsprechenden Werten für den Fall a (Baugrube im offenen Gewässer) verglichen werden.

a) Mittelsand mit

$$k = 4 \cdot 10^{-2} \text{ cm/s} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ m/s.}$$

Die Reichweite R wird nach Sichardt berechnet:

$$R = 3000 \cdot h \cdot \sqrt{k (\text{m/s})} = 3000 \cdot 3 \cdot \sqrt{4 \cdot 10^{-4}} = 180 \text{ m.}$$

Danach folgt:

$$\frac{R}{r} = \frac{180}{10} = 18 \text{ bzw. } \frac{r}{R} = 0,055.$$

*) Das Diagramm Bild 3 kann z. B. im Falle einer Uferspundwand zur Abschätzung der Gefahr des hydraulischen Grundbruches bei stationärer Sickerströmung direkt angewendet werden.

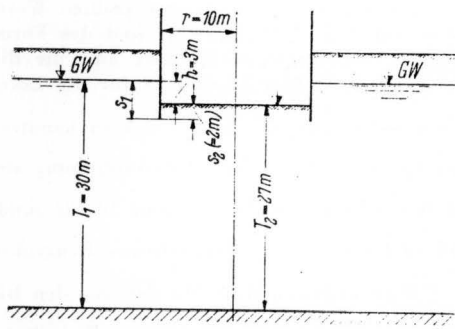


Bild 15. Berechnungsbeispiel

Die Rammtiefe s_2 wurde nach der Formel (2) bei $\frac{\gamma_u}{\gamma_w} \approx 1$

$$s_2 = \eta \cdot h \cdot \varphi_s$$

bei der Berücksichtigung, daß $s_2 = s_1 - h$ ist (Bild 15), mit Hilfe von Bild 8 bei $\frac{T_1}{r} = \frac{30}{10} = 3,00$ und $\frac{r}{R} = 0,055$ durch Probieren zu $s_2 \approx 2 \text{ m}$ ermittelt.

Der Formfaktor $\max f$ wurde bei $\frac{T_1}{r} = 3,00$ und $\frac{R}{r} > 6$ nach

Bild 10 für $\frac{s_1}{T_1} = \frac{5}{30} = 0,167$ zu $\max f = \frac{1}{1,55} = 0,63$ bestimmt.

Der Zufluß beträgt somit $Q = q \cdot 2 \cdot \pi \cdot r = 4 \cdot 10^{-4} \cdot 3 \cdot 0,63 \cdot 2 \cdot 3,14 \cdot 10 = 47 \text{ l/s.}$

Für eine Baugrube im offenen Gewässer wurden nach [2] $s_2 = 4,80 \text{ m}$ und der verbesserte Formfaktor $f \cdot \varepsilon$ für $s_1 = 5 \text{ m}$ und $s_2 = 2 \text{ m}$ zu $0,64$ ermittelt.

b) Feinsand mit

$$k = 4 \cdot 10^{-3} \text{ cm/s} = 4 \cdot 10^{-5} \text{ m/s,}$$

$$R = 3000 \cdot 3 \cdot \sqrt{4 \cdot 10^{-5}} = 57 \text{ m,}$$

$$\frac{R}{r} = \frac{57}{10} \approx 6.$$

Für die Berechnung können somit die Bilder 7 und 9 benutzt werden. Man erhält aus Bild 7 bei $\frac{T_1}{r} = 3,00$ durch Probieren

$s_2 = 4,0 \text{ m}$ und aus Bild 9 bei $\frac{T_1}{r} = 3,00$ und $\frac{s_1}{T_1} = \frac{7}{30} = 0,234$

$\max f = 0,60$, während für eine Baugrube im offenen Gewässer [2] die Rammtiefe $s_2 = 4,80 \text{ m}$ und der verbesserte Formfaktor $f \cdot \varepsilon$ für $s_1 = 7 \text{ m}$ und $s_2 = 4 \text{ m}$ zu $0,60$ ermittelt wurden.

Die Berechnungsergebnisse sind in der Tabelle 3 zusammengefaßt.

Tabelle 3. Berechnungsergebnisse

Boden	k m/s	R m	$\frac{R}{r}$	s_1 m	s_2 Fall c bzw. b m	s_2 Fall a m	$\max f$ Fall c bzw. b	f im Fall a für ge- gebene s_1 u. s_2
Mittelsand	$4 \cdot 10^{-4}$	180	18	5	2	4,8	0,63	0,64
Feinsand	$4 \cdot 10^{-5}$	57	6	7	4	4,8	0,60	0,60

8. Zusammenfassung

Es wurde die Sickerströmung zu einer Baugrube in einem homogenen, isotropen und kohäsionslosen Boden mit artesisch gespanntem Grundwasser in bezug auf die Größe des Zuflusses und die Gefahr eines hydraulischen Grundbruches in einem räumlichen Analogiemodell untersucht. Die Versuchsergebnisse wurden auf den Fall einer Baugrube in einem Grundwasser mit freier Oberfläche übertragen, da diese dabei, wie im Abschnitt 4 gezeigt, auf der sicheren Seite liegen.

Die entsprechend ausgewerteten Ergebnisse der mit runden und quadratischen Baugrubenmodellen bei einem konstanten Verhältnis $\frac{R}{r} = 6$ durchgeführten Versuche gestatten für den untersuchten

Parameterbereich eine angenäherte Ermittlung der größten Werte des Potentials am Spundwandfuß φ_s (bei $s_1 = s_2$) und des Formfaktors $\max f$ (bei $s_2 = 0$). Als Ausgangsdiagramme sind die Bilder 7 und 9 für runde und die Bilder 11 und 13 für die Ecken quadratischer Baugruben aufgestellt, die bei $\frac{R}{r} = 6$ zu benutzen sind. Aus diesen Diagrammen sind — bei Berücksichtigung der Grenzfälle — für andere $\frac{R}{r}$ -Werte die Bilder 8 und 10 für runde und die Bilder 12 und 14 für die Ecken quadratischer Baugruben gewonnen, die bei $\frac{R}{r} \geq 6$ zu benutzen sind. Mit den aus den Bildern 7 bis 14 entnommenen φ_s - und f -Werten können die notwendige Rammtiefe s_2 und der Zufluß zur Baugrube q nach den Formeln (1) und (2) bei stationärer Sickerströmung ermittelt werden. Hier ist im Gegensatz zum Fall der Baugrube im offenen Gewässer die Länge s_2 vom Boden, in dem die Baugrube ausgehoben wird, abhängig, da sich dabei die Reichweite R ändert.

Der Vergleich der φ_s - und f -Werte für Baugruben im offenen Gewässer (Fall a) und im Grundwasser (Fall b bzw. c) zeigt, daß

diese Werte im letzteren Fall bei kleinen $\frac{T_1}{r}$ und $\frac{r}{R}$ geringer sind als die entsprechenden Werte für den Fall a. Je kleiner die Verhältnisse $\frac{T_1}{r}$ und $\frac{r}{R}$, desto mehr unterscheiden sich die φ_s - und f -Werte für die Fälle a und b (c). Wenn deshalb der meistens in der Praxis vorkommende Fall b als Fall a gerechnet wird, kann es bei bestimmten Verhältnissen unwirtschaftliche Lösungen ergeben, was auch an einem Beispiel gezeigt wurde.

Literatur

- [1] Aravin, V. J. und Numerov, S. N.: Berechnung von Grundwasserströmungen im Wasserbau (in russischer Sprache). 2. Auflage, S. 221. Leningrad-Moskau: Staatsverlag für Bauwesen und Architektur, 1955.
- [2] Davidenkoff, R. N. und Franke, O. L.: Untersuchung der räumlichen Sickerströmung in eine umspundete Baugrube in offenen Gewässern. Die Bau-technik (42) 1963, H. 9, S. 298—307. *
- [3] Schmidbauer, J.: Die Fließsand- und Schwimmsanderscheinung. Mitteilungen der Hannoverschen Versuchsanstalt für Grundbau und Wasserbau, H. 1, 1952, S. 60—72.
- [4] Vorobkov, L. N., Gavrilko, V. M., Lobachev, P. V. und Shestakov, V. M.: Grundwasserabsenkung im Wasserbau (in russischer Sprache), S. 17 und 68. Moskau: Staatsverlag für Bauwesen, Architektur und Baumaterialien 1960.

*) Ebenfalls im Mitteilungsblatt der Bundesanstalt für Wasserbau Heft Nr. 22 (1965) erschienen.