

Dr.-Ing. Heinrich D o r e r

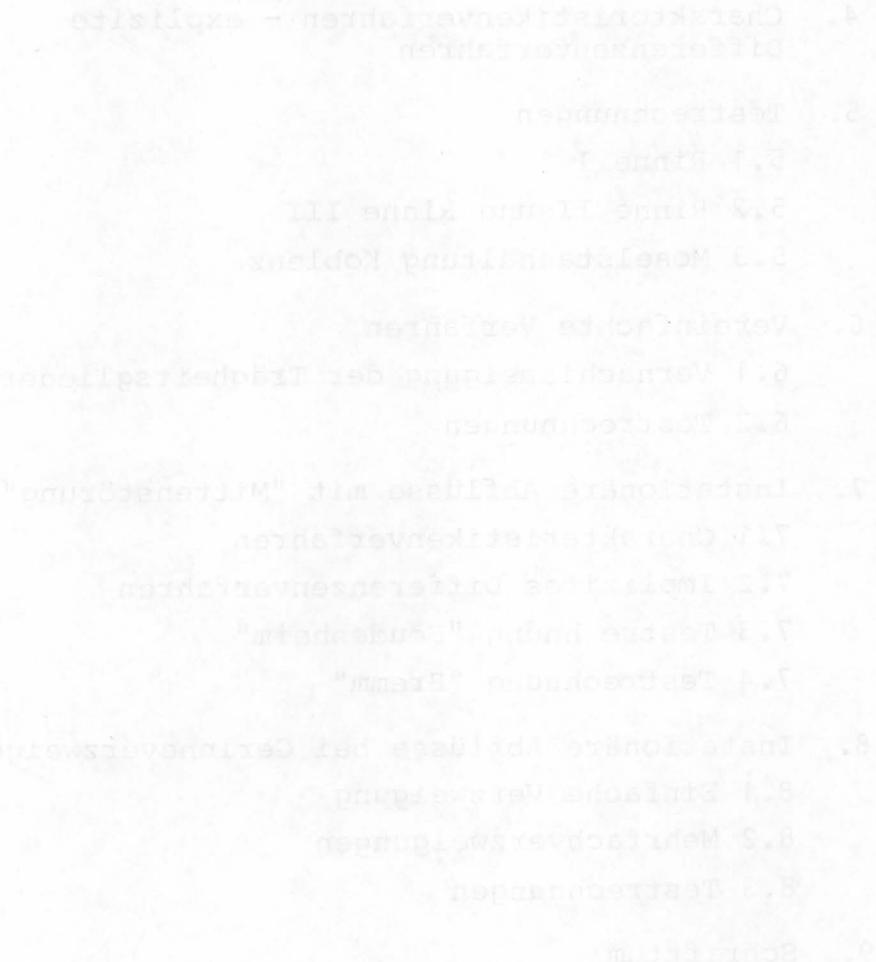
und

Frau Dipl.-Ing. Sian Hoei L i e

SCHWALL- UND SUNKBERECHNUNG MIT IMPLIZITEN

DIFFERENZENVERFAHREN

Surge Computation by Implicit Difference Schemes



I N H A L T

	Seite
1. Allgemeines	31
2. Grundgleichungen (Saint-Venant Gleichungen)	31
3. Numerische Integration der SV-Gleichungen mit impliziten Differenzenverfahren	32
3.1 Allgemeines	32
3.2 Anfangs- und Randbedingungen	32
3.3 Differenzenquotienten	33
3.4 Linearisierte Differenzengleichungen	34
3.5 Lösung der Bandmatrix	40
3.6 Ermittlung der Querprofilwerte	41
3.7 Rechenprogramme	43
4. Charakteristikenverfahren - explizite Differenzenverfahren	45
5. Testrechnungen	47
5.1 Rinne I	47
5.2 Rinne II und Rinne III	51
5.3 Moselstauhaltung Koblenz	56
6. Vereinfachte Verfahren	62
6.1 Vernachlässigung der Trägheitsglieder	62
6.2 Testrechnungen	63
7. Instationäre Abflüsse mit "Mittenstörung"	65
7.1 Charakteristikenverfahren	65
7.2 Implizites Differenzenverfahren	67
7.3 Testrechnung "Feudenheim"	68
7.4 Testrechnung "Bremm"	72
8. Instationäre Abflüsse bei Gerinneverzweigungen	78
8.1 Einfache Verzweigung	78
8.2 Mehrfachverzweigungen	82
8.3 Testrechnungen	84
9. Schrifttum	93

1. ALLGEMEINES

Die vorliegenden Untersuchungen sind die Weiterführung der Untersuchungen von Dorer /7/ über Berechnungsmöglichkeiten des instationären Abflusses in offenen Gerinnen.

Die Arbeiten wurden finanziell unterstützt durch:

- Bundesminister für Verkehr, Forschungsprojekt Nr. 93725;
- Deutsche Forschungsgemeinschaft, Schwerpunktprogramm "Mathematische- und Analogieverfahren in der Wasserbau-forschung", Az. Do 169/1 und Do 169/2.

Die Berechnungen wurden durchgeführt auf dem Rechner UNIVAC 1108 im Rechenzentrum der Universität Karlsruhe.

Die Herausgabe dieses Berichtes wurde durch den Wegzug der Mit-autorin Frau Dipl.-Ing. Sian Hoei Lie nach Kanada verzögert.

2. GRUNDGLEICHUNGEN (SAINT-VENANT GLEICHUNGEN)

Die numerische Berechnung des instationären Freispiegelabflusses beruht auf den von BARRE DE SAINT-VENANT aufgestellten Gleichungen (SV-Gleichungen), die den zeitlich sich allmählich verändernden Abfluß in eindimensionaler Form beschreiben.

Die Ableitung der SV-Gleichungen und deren verschiedene Schreibweisen wurden in zahlreichen Arbeiten behandelt. Siehe z.B. Dorer /7/.

Mit der Geschwindigkeit v und der Wasserspiegelhöhe h als abhängige Variable lauten die SV-Gleichungen:

Kontinuitätsgleichung:

$$v \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{F}{B} \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{v}{B} \frac{\partial F}{\partial x} \quad |_{h=\text{const.}} \quad (1)$$

Dynamische Gleichung:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = - g \frac{v|v|}{k^2 R_a^{4/3}} \quad (2)$$

Die Gleichungen (1) und (2) stellen ein hyperbolisches System von zwei quasilinearen partiellen Differentialgleichungen dar, das durch numerische Verfahren integriert werden kann.

Für das Reibungsglied in den SV-Gleichungen wird die Formel von GAUCKLER-STRICKLER verwendet, wobei angenommen wird, daß die k -Werte des stationären Abflusses auch für den instationären Fall Gültigkeit haben.

Seitlicher Zufluß q (m^3/sm) zum Gerinne (Grundwasser, Regen, Versickerung usw.) wird in den SV-Gleichungen durch zusätzliche

Glieder berücksichtigt (siehe Baltzer /5/, Ligget /16/).

$$v \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{F}{B} \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{v}{B} \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_h + \frac{q}{B} \quad (4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = - g \frac{v|v|}{k^2 R^{4/3}} - \frac{q v}{F} \quad (5)$$

3. NUMERISCHE INTEGRATION DER SV-GLEICHUNGEN MIT IMPLIZITEN DIFFERENZENVERFAHREN

3.1 Allgemeines

Im folgenden sollen einige wesentliche Merkmale der impliziten Verfahren aufgezählt werden:

- Für die impliziten Verfahren kann nachgewiesen werden, daß sie "bedingungslos stabil" sind, d.h., daß die COURANT-Bedingung nicht eingehalten zu werden braucht. Siehe Kamphuis /15/, Ligget /16/, Strelkoff /25/. Es können also gegenüber relativ kleinen Wegschritten Δx große Zeitschritte Δt gewählt werden, was bei der Untersuchung langer Wellen (HW-Wellen, Tide) Rechenzeit einspart. Allerdings steht dem Vorteil großer Zeitschritte der Nachteil abnehmender Genauigkeit gegenüber. Bei der Wahl großer Zeitschritte ist deshalb eine Vergleichsrechnung mit kleineren Zeitschritten zu empfehlen, um den Einfluß der Größe von Δt auf die Genauigkeit des Verfahrens abschätzen zu können. Siehe Preissmann /22/, Sevuk /24/.
- Die Wegschritte Δx können ohne Einfluß auf den Zeitschritt Δt verschieden groß gewählt werden, so daß z.B. Singularitäten im Gerinne gut beschrieben werden können.
- Im Unterschied zu den expliziten Verfahren, die relativ einfach zu programmierende Algorithmen aufweisen, muß bei den impliziten Verfahren ein größerer Aufwand an Programmierarbeit in Kauf genommen werden. Das Hauptproblem hierbei ist die Auflösung von extrem großen Bandmatrizen. Bei der Verwendung von Unterprogrammen bzw. Prozeduren können einmal erstellte Programmabusteine jedoch leicht immer wieder zu verschiedenen Programmen zusammengestellt werden.

3.2 Anfangsbedingungen und Randbedingungen

Zur Durchführung der Berechnungen müssen neben der Gerinnegeometrie sowie der die Verluste beschreibenden k -Werte Anfangs- und Randbedingungen gegeben sein.

Als Anfangsbedingung ist der Verlauf entlang des Gerinnes zur einer Zeit t_0 von Wasserspiegelhöhe $h(x, t_0)$ und Geschwindigkeit $v(x, t_0)$ bzw. Abfluß $Q(x, t_0)$ erforderlich. In der Regel

kann hierfür ein Ruhezustand $v = 0$ oder eine stationäre Staukurve verwendet werden. Die Staukurvengleichung kann aus Gleichung (2) durch Weglassen der Zeitableitung gewonnen werden:

$$v \frac{dv}{dx} + g \frac{dh}{dx} = - \frac{v^2}{k^2 R_a^{4/3}} \quad (6)$$

Die Lösung dieser gewöhnlichen Differentialgleichung erfolgt durch ein übliches Differenzenverfahren und liefert h und v entlang des Gerinnes zur Zeit t_0 .

Als Randbedingungen müssen an den Gerinnerändern entweder der zeitliche Verlauf von Wasserspiegelhöhe h bzw. Geschwindigkeit v oder Abfluß Q gegeben sein oder eine Beziehung zwischen Wasserspiegelhöhe h und Geschwindigkeit v bzw. Abfluß Q (z.B. Schlüsselkurve, Überfallgleichung usw.).

3.3 Differenzquotienten

Bei den expliziten Verfahren werden mit bekannten Werten von h und v zur Zeit t_j (siehe Abb. 1) jeweils für die unbekannten Werte h und v an einem Netzpunkt zur Zeit t^{j+1} zwei Gleichungen aufgestellt, aus denen h und v explizit berechnet werden können. Bei den impliziten Verfahren werden Gleichungen aufgestellt, die jeweils die Unbekannten h und v von zwei (oder mehreren) Nutzpunkten enthalten. Man erhält so ein Gleichungssystem, in dem alle Unbekannte h und v entlang des ganzen Gerinnes implizit enthalten sind. Siehe hierzu z.B. Amein u.a. /1/, /2/, /3/, Dronkers /10/, Fang /11/, Gunaratnam u.a. /12/, Halliwell u.a. /13/, Miller /20/ etc..

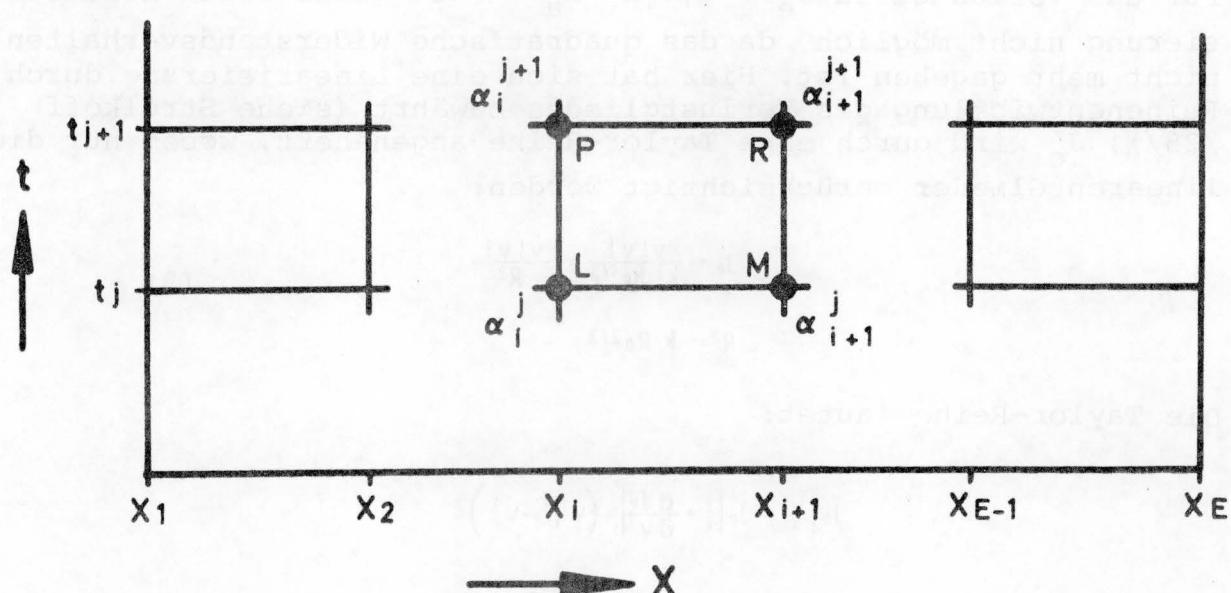


Abb. 1 Differenzenschema

Für das vorliegende implizite Differenzenverfahren werden zur Annäherung der Differentialquotienten $\partial(\cdot)/\partial x$ und $\partial(\cdot)/\partial t$ folgende Differenzenquotienten gewählt:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} \sim \frac{(\alpha_{i+1}^{j+1} + \alpha_i^{j+1}) - (\alpha_{i+1}^j + \alpha_i^j)}{2\Delta t} \quad (7)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} \sim \frac{\vartheta(\alpha_{i+1}^{j+1} - \alpha_i^{j+1}) + (1-\vartheta)(\alpha_{i+1}^j - \alpha_i^j)}{\Delta x}$$

Damit die mit diesen Differenzenquotienten aufgebauten Berechnungsverfahren stabil sind, muß der ϑ -Wert zwischen 0,5 und 1,0 liegen. Im vorliegenden Fall wird $\vartheta = 0,66$ angenommen.

3.4 Linearisierte Differenzengleichungen

Wenn in die Differentialgleichungen (1) und (2) neben den Differenzenquotienten (7) auch die Werte für die Funktionen von h und v zur Zeit t^{j+1} als Unbekannte eingeführt werden, erhält man nichtlineare Differenzengleichungen. Die Differenzengleichungen werden linear, wenn die bekannten Funktionswerte zur Zeit t^j angenommen werden:

$$\alpha = (\alpha_{i+1}^j + \alpha_i^j)/2 \quad (8)$$

Für das Verlustglied $J_e = v|v|k^2 R_a^{4/3}$ ist diese volle Linearisierung nicht möglich, da das quadratische Widerstandsverhalten nicht mehr gegeben ist. Hier hat sich eine Linearisierung durch Reihenentwicklung des Verlustgliedes bewährt (siehe Strelkoff /25/), J_e wird durch eine Taylor-Reihe angenähert, wobei nur die linearen Glieder berücksichtigt werden:

$$J_e = \frac{v|v|}{k^2 R_a^{4/3}} = \frac{v|v|}{R^2} \quad (9)$$

$$R = k R_a^{2/3}$$

Die Taylor-Reihe lautet:

$$J_e|_i^{j+1} = J_e|_i^j + \frac{\partial J_e}{\partial v}|_i^j (v^{j+1} - v_i^j)$$

$$+ \frac{\partial J_e}{\partial R}|_i^j \frac{dR}{dh}|_i^j (h_i^{j+1} - h_i^j)$$

Mit

$$\frac{\partial J_e}{\partial v} = + \frac{2|v|}{R^2} \quad (9)$$

$$\frac{\partial J_e}{\partial R} = - 2|v| \frac{1}{R^3} = - \frac{2J_e}{R}$$

ergibt sich:

$$J_e |_{i+1}^{j+1} = J_e |_i^j + \frac{2|v|}{R^2} |_i^j (v_i^{j+1} - v_i^j) \quad (10)$$

$$- \frac{2J_e}{R} |_i^j \frac{dR}{dh} |_i^j (h_i^{j+1} - h_i^j)$$

Aus den Gleichungen (4), (5), (7) und (10) ergeben sich die Differenzengleichungen:

$$\begin{aligned} & \frac{V_{(i+1)} + V_{(i)}}{2} \frac{\vartheta(HH_{(i+1)} - HH_{(i)}) + (1-\vartheta)(H_{(i+1)} - H_{(i)})}{\Delta x} \\ & + \frac{(HH_{(i+1)} + HH_{(i)}) - (H_{(i+1)} + H_{(i)})}{2\Delta t} \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{F_{(i)}}{B_{(i)}} + \frac{F_{(i+1)}}{B_{(i+1)}} \right) \frac{\vartheta(VV_{(i+1)} - VV_{(i)}) + (1-\vartheta)(V_{(i+1)} - V_{(i)})}{\Delta x} = \end{aligned} \quad (11)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{V_{(i)}}{B_{(i)}} + \frac{V_{(i+1)}}{B_{(i+1)}} \right) \frac{1}{2} (DFXL + DFXM)$$

$$g \frac{\vartheta(HH_{(i+1)} - HH_{(i)}) + (1-\vartheta)(H_{(i+1)} - H_{(i)})}{\Delta x}$$

$$+ \frac{V_{(i)} + V_{(i+1)}}{2} \frac{\vartheta(VV_{(i+1)} - VV_{(i)}) + (1-\vartheta)(V_{(i+1)} - V_{(i)})}{\Delta x}$$

$$+ \frac{(VV_{(i+1)} + VV_{(i)}) - (V_{(i+1)} + V_{(i)})}{2\Delta t} =$$

$$= \frac{g}{2} \left[J_e(i) + J_e(i+1) + \frac{2|V_{(i)}|}{R_{(i)}^2} (VV_{(i)} - V_{(i)}) \right] \quad (12)$$

$$+ \frac{2|V_{(i+1)}|}{R_{(i+1)}^2} (VV_{(i+1)} - V_{(i+1)})$$

$$- \frac{2J_e(i)}{R_{(i)}} SL(i) (HH_{(i)} - H_{(i)})$$

$$- \frac{2J_e(i+1)}{R_{(i+1)}} SL(i+1) (HH_{(i+1)} - H_{(i+1)})$$

Folgende Bezeichnungen gelten:

Unbekannte Werte zur Zeit t^{j+1} werden mit Doppelbuchstaben bezeichnet (HH , VV) zur Zeit t^j mit Einfachbuchstaben (H , V , F , B , R ...).

Die Glieder $\frac{\partial F}{\partial x}$ (für konstante Wasserspiegelhöhe) an den Punkten L und M (siehe Abb. 1) werden mit $DFXL$ und $DFXM$ bezeichnet:

$$DFXL = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{HL=\text{const.}} = \left(\frac{F_M - F_L}{\Delta x} \right)_{HL}$$

$$DFXM = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{HM=\text{const.}} = \left(\frac{F_M - F_L}{\Delta x} \right)_{HM}$$

Die Änderung des Reibungsgliedes $R = k R_a^{2/3}$ mit der Wasserspiegelhöhe wird bezeichnet:

$$SL(i) = \left. \frac{dR}{dH} \right|_i \quad SL(i+1) = \left. \frac{dR}{dH} \right|_{i+1}$$

Die Gleichungen (11) und 12) lassen sich auf folgende Form bringen:

$$\begin{aligned} HH(i) \alpha(2i,2) + VV(i) \alpha(2i,3) \\ + HH(i+1) \alpha(2i,4) + VV(i+1) \alpha(2i,5) = XV(2i) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} HH(i) \alpha(2i+1,1) + VV(i) \alpha(2i+1,2) \\ + HH(i+1) \alpha(2i+1,3) + VV(i+1) \alpha(2i+1,4) = XV(2i+1) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\alpha(2i,2) = \frac{\Delta x}{\Delta t} - \delta CA$$

$$\alpha(2i,3) = -\delta CD$$

$$\alpha(2i,4) = \frac{\Delta x}{\Delta t} + \delta CA$$

$$\alpha(2i,5) = \delta CD$$

$$\begin{aligned} XV(2i) = -\frac{\Delta x}{2} CF \cdot CG - CE \cdot CD \\ + \frac{\Delta x}{\Delta t} CC - CA \cdot CB \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
 a(2i+1,1) &= -\vartheta - \frac{DK \cdot \Delta x}{2} \\
 a(2i+1,2) &= -\vartheta \frac{CA}{2g} + \frac{\Delta x}{\Delta t \cdot 2g} + \frac{DG \cdot \Delta x}{2} \\
 a(2i+1,3) &= \vartheta - \frac{DL \cdot \Delta x}{2} \\
 a(2i+1,4) &= \vartheta \frac{CA}{2g} + \frac{\Delta x}{\Delta t \cdot 2g} + \frac{DH \cdot \Delta x}{2}
 \end{aligned} \tag{16}$$

$$XV(2i+1) = -[DF - DG \cdot V(i) - DH \cdot V(i+1) + DK \cdot H(i)$$

$$+ DL \cdot H(i+1)] \frac{\Delta x}{2} - CB$$

$$- \frac{CA \cdot CE}{2g} + \frac{CA \cdot \Delta x}{2g \cdot \Delta t}$$

$$CA = V(i) + V(i+1)$$

$$CB = (1 - \vartheta) (H(i+1) - H(i))$$

$$CC = H(i) + H(i+1) \tag{17}$$

$$CD = \frac{F(i)}{B(i)} + \frac{F(i+1)}{B(i+1)}$$

$$CE = (1 - \vartheta) (V(i+1) - V(i))$$

$$CF = \frac{V(i)}{B(i)} + \frac{V(i+1)}{B(i+1)}$$

$$CG = DFXL + DFXM$$

$$DF = Je(i) + Je(i+1)$$

$$DG = 2 \frac{|V(i)|}{R(i)^2}$$

$$DH = 2 \frac{|V(i+1)|}{R(i+1)^2}$$

$$DK = 2 Je(i) \frac{SL(i)}{R(i)}$$

$$DL = 2 Je(i+1) \frac{SL(i+1)}{R(i+1)}$$

Die Gleichungen (14) und (15) stellen ein lineares Gleichungssystem dar mit den Unbekannten HH und VV an den Netzpunkten i und i + 1. Für eine Gerinnestrecke mit E Stationen = Querprofilen ergeben sich (E - 1) Gleichungspaaare (14)/(15), d.h. (2 E - 2) lineare Gleichungen. Insgesamt sind auf der Gerinnestrecke E Unbekannte HH und E Unbekannte VV vorhanden, insgesamt also 2 E Unbekannte. Die für das vollständige Gleichungssystem noch fehlenden zwei Gleichungen werden durch die Randbedingungen gebildet.

Das endgültige Gleichungssystem hat folgende Form:

$$\begin{aligned} \text{HH } XV(1) &= f[\text{HH}(1), \text{VV}(1)] \\ XV(2) &= f[\text{HH}(1), \text{VV}(1), \text{HH}(2), \text{VV}(2)] \\ \text{XV}(3) &= f[\text{HH}(1), \text{VV}(1), \text{HH}(2), \text{VV}(2)] \end{aligned} \quad (18)$$

$$XV(2i) = f[\text{HH}(i), \text{VV}(i), \text{HH}(i+1), \text{VV}(i+1)]$$

$$XV(2i+1) = f[\text{HH}(i), \text{VV}(i), \text{HH}(i+1), \text{VV}(i+1)]$$

$$XV(2E-2) = f[\text{HH}(E-1), \text{VV}(E-1), \text{HH}(E), \text{VV}(E)]$$

$$XV(2E-1) = f[\text{HH}(E-1), \text{VV}(E-1), \text{HH}(E), \text{VV}(E)]$$

$$XV(2E) = f[\text{HH}(E), \text{VV}(E)]$$

$$\frac{\partial A}{\partial B} V + \frac{\partial V}{\partial B} = 0$$

$$MX30 \times 1X30 = 30$$

In Matrizenbeschreibung ergibt sich:

$$\|A\| * \|X\| = \|XV\| \quad (19)$$

$$\begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{ccccc}
 a_{13} & a_{14} & 0 & & \\
 a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 \\
 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\
 a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & 0
 \end{array} \right] \quad 0 \\
 \times \quad \left[\begin{array}{c}
 HH(1) \\
 VV(1) \\
 HH(2) \\
 VV(2) \\
 HH(3)
 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c}
 XV(1) \\
 XV(2) \\
 XV(3) \\
 XV(4) \\
 XV(5)
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{cccccc}
 a_{2e-5,1} & a_{2e-5,2} & a_{2e-5,3} & a_{2e-5,4} & 0 & \\
 0 & a_{2e-4,2} & a_{2e-4,3} & a_{2e-4,4} & a_{2e-4,5} & \\
 a_{2e-3,1} & a_{2e-3,2} & a_{2e-3,3} & a_{2e-3,4} & 0 & \\
 0 & a_{2e-2,2} & a_{2e-2,3} & a_{2e-2,4} & a_{2e-2,5} & \\
 a_{2e-1,1} & a_{2e-1,2} & a_{2e-1,3} & a_{2e-1,4} & & \\
 0 & a_{2e,2} & a_{2e,3} & & &
 \end{array} \right] \quad 0
 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{c}
 HH(e-2) \\
 VV(e-2) \\
 HH(e-1) \\
 VV(e-1) \\
 HH(e) \\
 VV(e)
 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c}
 XV(2e-5) \\
 XV(2e-4) \\
 XV(2e-3) \\
 XV(2e-2) \\
 XV(2e-1) \\
 XV(2e)
 \end{array} \right]$$

Abb. 2 Differenzengleichung in Matrizen schreibweise

3.5 Lösung der Bandmatrix

Die Matrizengleichung (19) wird mittels eines für eine Bandmatrix zugeschnittenen Gauß'schen Eliminationsverfahrens gelöst. Siehe Thurnau /26/.

Diese Methode besitzt folgende Vorteile:

- Einsparung von Rechenzeit, da Nullen außerhalb des Bandes der Matrix bei der Rechnung nicht berücksichtigt werden,
- die große ($2W + 2E$) Matrix wird auf eine ($2E + 5$) Matrix reduziert mit entsprechender Einsparung von Speicherplatz im Computer,
- das Verfahren verwendet die "Maximum-Pivot-Strategie" mit entsprechender Erhöhung der Rechenstabilität.

Die Matrix A (siehe Abb. 2) wird in eine obere Dreiecksmatrix gemäß Abb. 2 transformiert. Hierbei wird als "Pivot-Element" jeweils das größte Element der jeweiligen Spalte von A verwendet. Gleichzeitig wird die Singularität der Matrix A durch den Nachweis getestet, daß das Pivot-Element größer ist als ein vorgegebener Wert. Mit der oberen Dreiecksmatrix gemäß Abb. 3 können die Unbekannten HH und VV ausgehend von VV(E) rückwärts durch fortgesetzte Substitution berechnet werden.

1	a ₁₂	a ₁₃	a ₁₄	a ₁₅			0
1	a ₂₂	a ₂₃	a ₂₄	a ₂₅			
0	1	a ₃₂	a ₃₃	a ₃₄	a ₃₅		
0	1	a ₄₂	a ₄₃	a ₄₄	a ₄₅		
1	a _{2e-52}	a _{2e-53}	a _{2e-54}	a _{2e-55}			0
1	a _{2e-42}	a _{2e-43}	a _{2e-44}	a _{2e-45}			
1	a _{2e-32}	a _{2e-33}	a _{2e-34}				
0	1	a _{2e-22}	a _{2e-23}				
	1	a _{2e-12}					1

Abb. 3 Obere Dreiecksmatrix A aus Gleichung (19)

3.6 Ermittlung der Querprofilwerte

Die Gerinnegeometrie wird durch Querprofile im Abstand Δx beschrieben. Die Profile werden für die Rechnung durch einen Polygonzug angenähert, der Polygonzug selbst wird durch $y - z$ Koordinaten beschrieben (siehe Abb. 4).

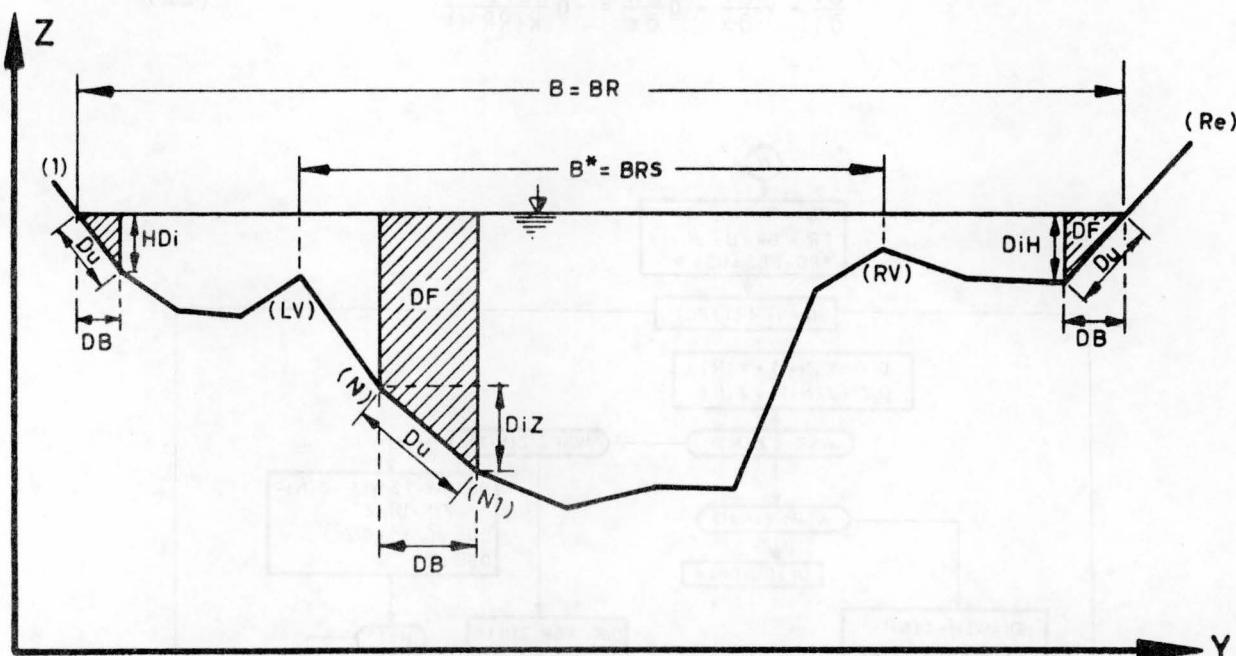


Abb. 4 Querprofil mit Vorländern - Bezeichnungen

Bei gegliederten Querschnitten entsprechend Abb. 4 wird in der Regel angenommen, daß Vorländer bzw. Teile derselben nicht am Abfluß teilnehmen, sondern sich lediglich füllen und entleeren. Mit dieser Annahme ergibt sich für die Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial(v \cdot FRS)}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

mit

$$F = F_1 + FRS + F_3$$

$$v \frac{\partial FRS}{\partial x} + FRS \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} = v$$

Mit $F=f(x, h(x, t))$ ergibt sich

$$v \left(\frac{\partial FRS}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial FRS}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + FRS \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial t} = 0$$

Mit $Bdh = dF$ ergibt sich

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v BRS \frac{\partial h}{\partial x} + FRS \frac{\partial v}{\partial x} = -v \frac{\partial FRS}{\partial x} \Big|_{h=\text{const.}} \quad (21)$$

Die dynamische Gleichung lautet mit RR als hydraulischem Radius des durchströmten Teil des Querprofils:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = -g \frac{v | v |}{k^2 RR^{4/3}} \quad (22)$$

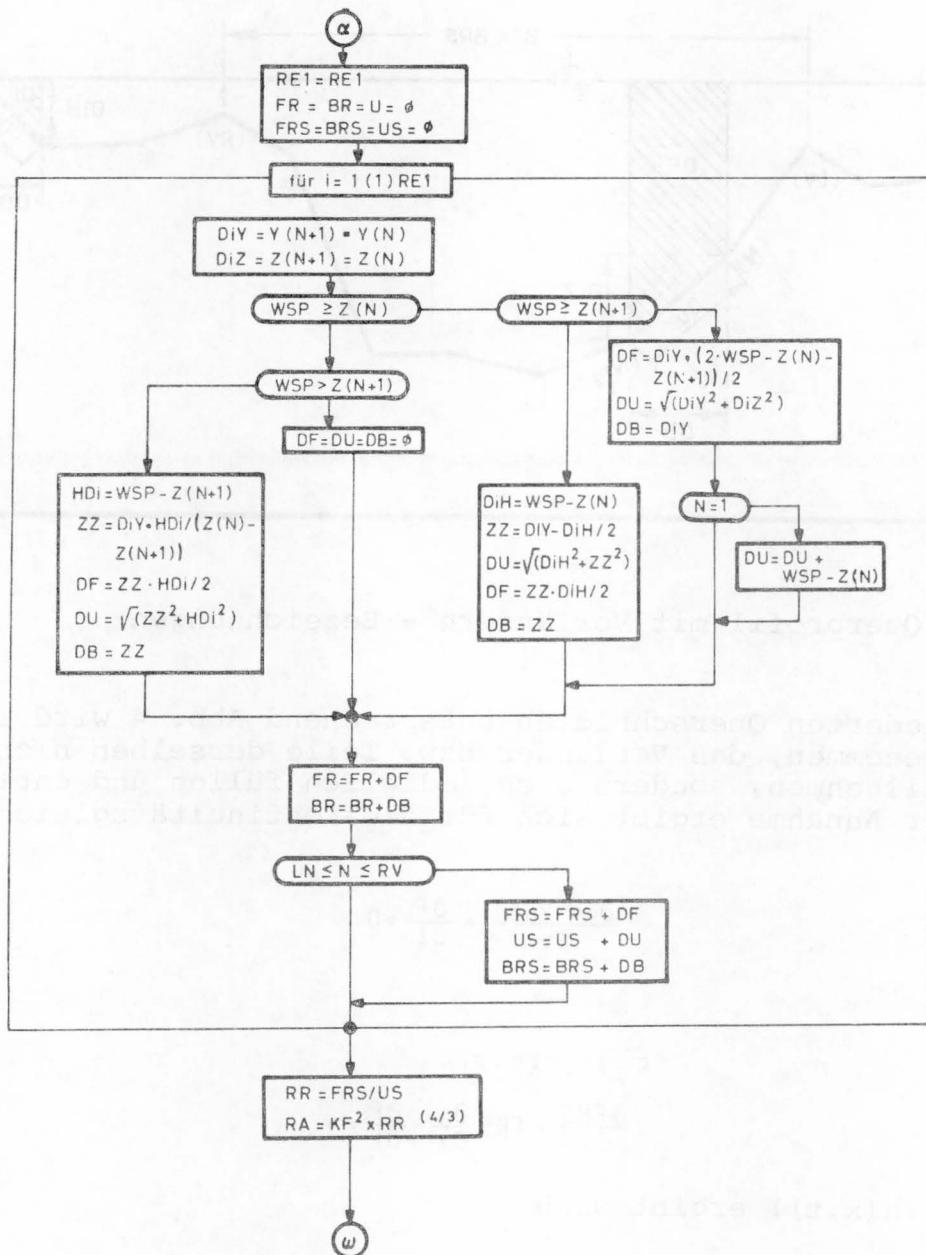


Abb. 5 Prozedur GEOMETRIE zur Ermittlung von Fläche, Wasserspiegelbreite und Reibungsglied bei Abfluß im Flußbett eines gegliederten Querschnitts

In Abb. 5 ist das Flußdiagramm der Prozedur GEOMETRIE dargestellt, mit der Fläche und Wasserspiegelbreite des gesamten Profils sowie des durchströmten Teils (FR, BR, FRS, BRS) und der hydraulische Radius RR des durchströmten Teils bestimmt werden können.

Für die Bereitstellung der Gerinnegeometriedaten bestehen drei Möglichkeiten:

- Die Profile werden in Form von y/z - Koordinaten bereitgestellt, immer wenn die Berechnung es erforderlich macht, werden mit der Prozedur GEOMETRIE die erforderlichen Querschnittswerte berechnet. Diese Methode ist sehr rechenzeitaufwendig.
- Mittels der Prozedur GEOMETRIE werden gesondert für jedes Profil für verschiedene Werte der Wasserspiegelhöhe W_{sp} die Profilwerte berechnet. Die Werte für Flächen, Wasserspiegelbreiten und Reibungsglied werden als Tabellen zur Verfügung gestellt, vom Programm verlangte Werte für bestimmte Wasserspiegelhöhen werden interpoliert.
- Die Tabellen für Flächen und Reibungsglied werden durch Polynome approximiert, als Profildaten werden die Koeffizienten der Polynome vorgegeben. Bei dieser Methode können die Wasserspiegelbreiten jeweils aus der Beziehung $B = dF/dh$ berechnet werden.

3.7 Rechenprogramme

In Abb. 6 ist das allgemeine Ablaufschema des Programms zur Berechnung des instationären Abflusses mittels eines impliziten Verfahrens dargestellt.

Die im Ablaufschema angeführte Prozedur IMLINEAR ermittelt nach einer impliziten Methode die Werte für Geschwindigkeit v und Wasserspiegelhöhe h entlang des Gerinnes an den einzelnen Profilen zur Zeit $t + \Delta t$ aus den bekannten Werten zur Zeit t . In Abb. 7 ist das Ablaufschema dieses Unterprogrammes dargestellt.

Bei unterschiedlichen Randbedingungen müssen die entsprechenden Koeffizienten der Matrizen $\|A\|$ und $\|XV\|$ geändert werden.

Zum Beispiel gilt für eine Randbedingung links $Q = f$ (Zeit) (Abflußganglinie):

$$v(1) = \frac{Q}{F(1)}$$

$$a(13) = 0$$

$$a(14) = 1$$

$$Xv(1) = \frac{Q}{F(1)}$$

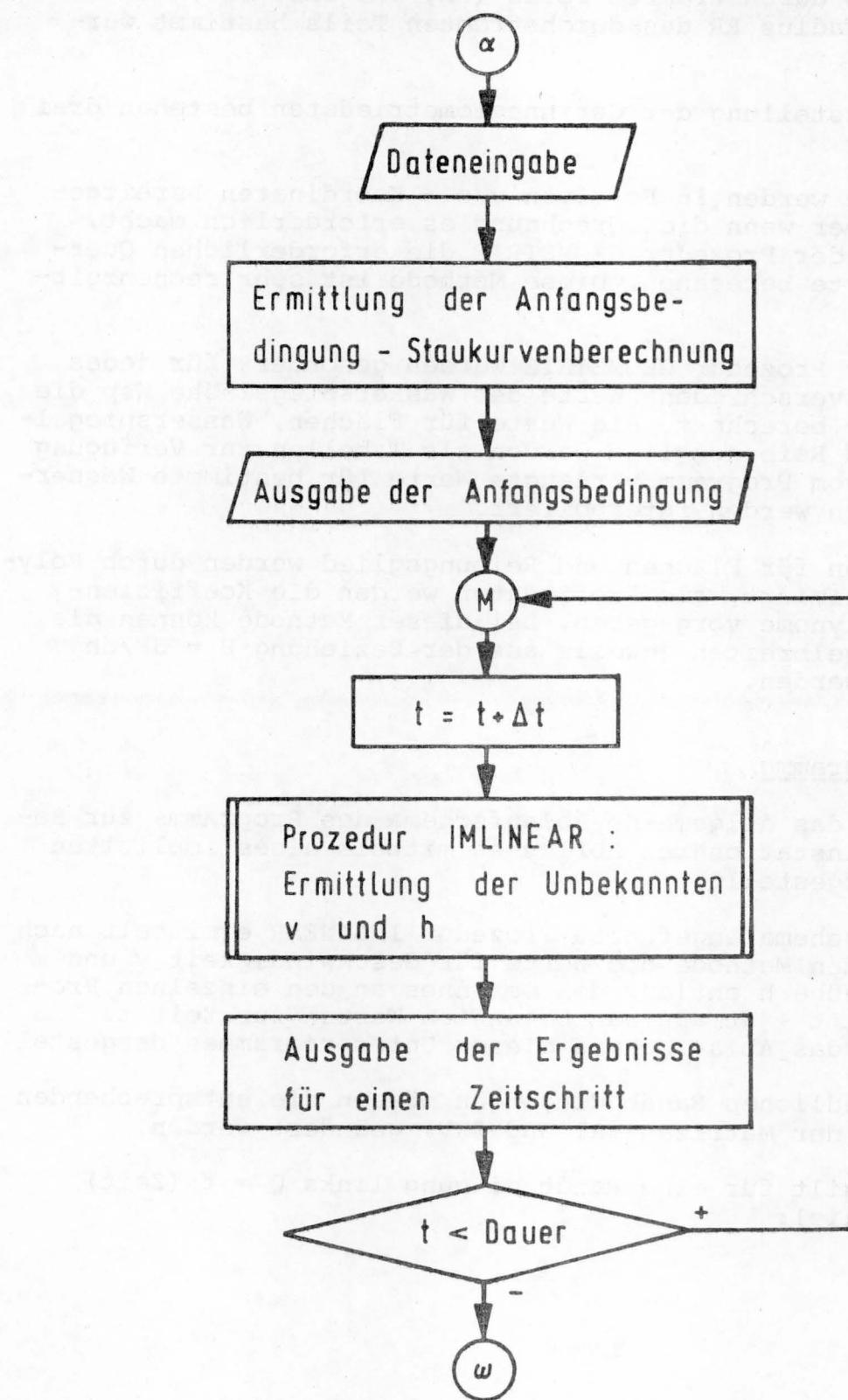


Abb. 6 Schematisches Ablaufschema des Rechenprogramms

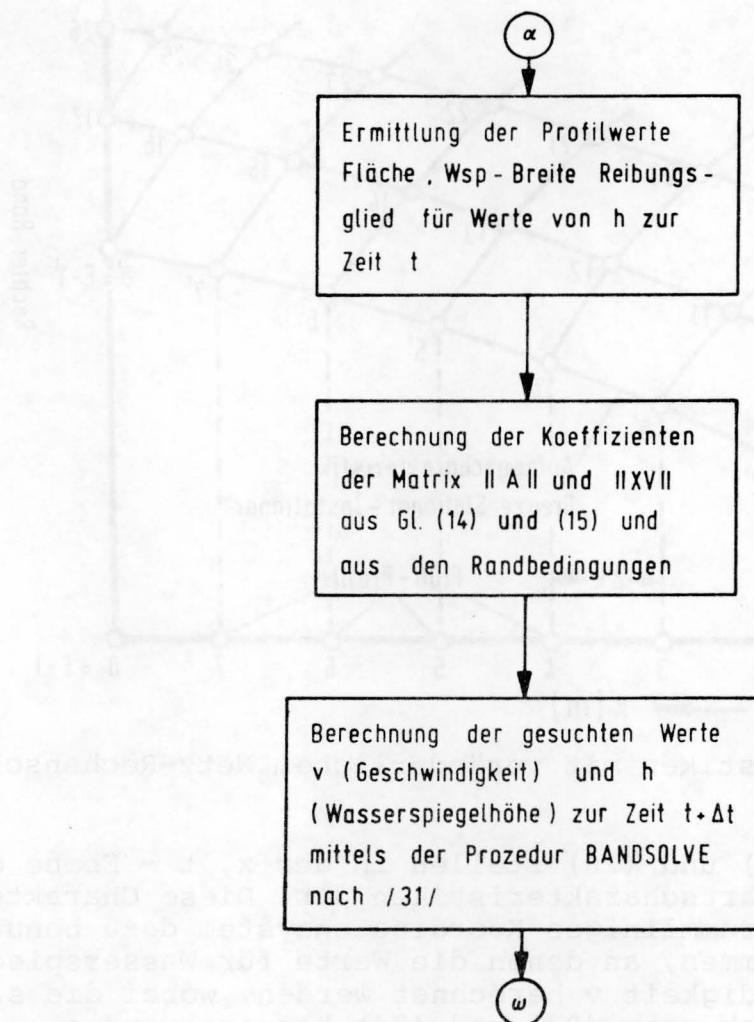


Abb. 7 Schematisches Ablaufdiagramm der Prozedur IMLINEAR

Für die Randbedingung rechts $h = \text{const}$ (Mündung des Gerinnes in einen See mit $F = \infty$) gilt:

$$\alpha(2\epsilon, 2) = 1$$

$$\alpha(2\epsilon, 3) = 0$$

$$XV(\epsilon) = \text{HRECHTS}$$

4. CHARAKTERISTIKENVERFAHREN - EXPLIZITE DIFFERENZENVERFAHREN

4.1 Charakteristikenverfahren

Für das Charakteristikenverfahren werden die SV-Gleichungen (1) und (2) in ein System von vier gewöhnlichen Differentialgleichungen umgeformt. Siehe Dorer /7/.

$$\sqrt{g \frac{F}{B}} \frac{dv}{dt} \pm g \frac{dh}{dt} \pm g \frac{v}{B} \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_h + \sqrt{g \frac{F}{B}} g \frac{v|v|}{k^2 R_a^{4/3}} = 0 \quad (23/24)$$

$$\frac{dx}{dt} = v \pm \sqrt{g \frac{F}{B}} \quad (25/26)$$

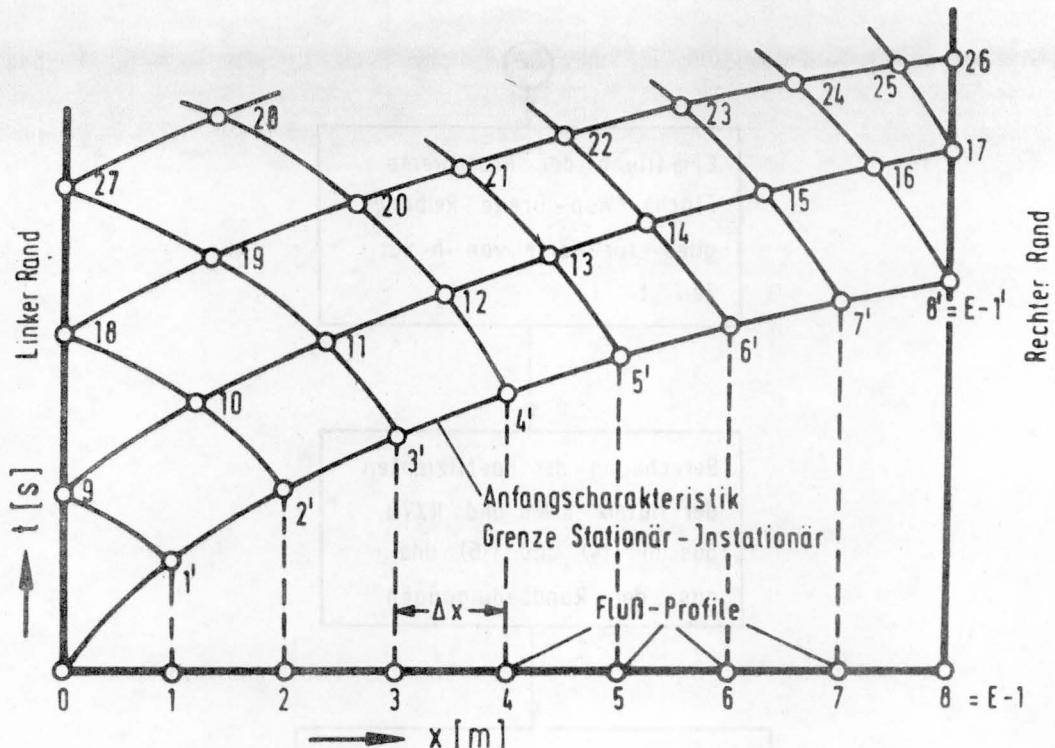


Abb. 8 Charakteristiken mit veränderlichem Netz-Rechenschema

Die Gleichungen (25) und (26) stellen in der x, t -Ebene die Vorwärts- und Rückwärtscharakteristiken dar. Diese Charakteristiken werden als krummliniges Koordinatensystem dazu benutzt, die Punkte zu bestimmen, an denen die Werte für Wasserspiegelhöhe h und Geschwindigkeit v berechnet werden, wobei die s.g. Kompatibilitätsgleichungen (23) und (24) benutzt werden, (siehe Abb. 8).

Die Charakteristiken beschreiben die Ausbreitung von Infinitesimalwellen entlang des Gerinnes. Instationäre Vorgänge lassen sich als Überlagerung dieser Infinitesimalwellen ansehen. Das Charakteristikenverfahren ist deshalb dasjenige Verfahren, das die physikalischen Vorgänge am besten beschreibt. Bei Fehlen von Natur- bzw. Modellmessungen wird es darum oft an deren Stelle dazu verwendet, die Güte anderer Verfahren zu beurteilen durch Feststellung der Abweichungen zum Charakteristikenverfahren.

Ein Nachteil des Charakteristikenverfahrens ist der große Rechenaufwand. Gegenüber den Verfahren mit festem Netz kommen noch die Unbekannten x (Weg) und t (Zeit) hinzu. An jedem Punkt des Charakteristikennetzes in der x, t -Ebene müssen vier nicht-lineare Gleichungen mit den Unbekannten h, v, x, t gelöst werden. Gerinneverzweigungen verursachen einen zusätzlichen Rechenaufwand. Gerinne mit Mehrfachverzweigungen sind mit diesem Verfahren praktisch nicht mehr zu behandeln.

Die Anwendung des Charakteristikenverfahrens beschränkt sich auf einfache Gerinne und hat vor allem für kurze steile Wellen Bedeutung, (z.B. Schwallvorgang bei Betrieb von Schleusen und Kraftwerken).

4.2 Explizite Differenzenverfahren

Die expliziten Verfahren arbeiten mit einem festen Rechtecknetz in der x, t -Ebene mit den Maschenweiten Δx (Weg) und Δt (Zeit). An jedem Netzpunkt werden die Unbekannten h und v explizit aus zwei Gleichungen berechnet, wobei Werte für h und v aus dem vorhergehenden Zeitschritt benutzt werden. Zur Aufstellung dieser Differenzengleichungen können im Feld sowohl die SV-Gleichungen (1) und (2) als auch die Charakteristikengleichungen (23) und (24) verwendet werden, an den Rändern sind immer die Charakteristikengleichungen (23) und (24) erforderlich.

Zur Gewährleistung der Stabilität muß bei den expliziten Verfahren die COURANT-Bedingung eingehalten werden:

$$\frac{\Delta t (|v| + c)}{\Delta x} = COU \leq 1 \quad (27)$$

mit

$$c = \sqrt{g \frac{F}{B}}$$

Bei vorgegebenen Profilabständen Δx , die bei einer ausreichend genauen Beschreibung der Flussgeometrie nicht übermäßig groß gewählt werden können, ergeben sich nach der COURANT-Bedingung entsprechend kleine Zeitschritte Δt . Dadurch steigt der Rechenaufwand bei langen Wellen (Tide, HW-Wellen) erheblich an.

Aufgrund dieser Gegebenheiten werden vor allem bei langen Wellen implizite Verfahren den Charakteristikenverfahren mit veränderlichem Netz sowie den expliziten Differenzenverfahren vorgezogen. Implizite Verfahren erfordern zwar einen größeren Programmieraufwand, kommen aber in der Regel durch die Möglichkeit der Wahl großer Zeitschritte Δt mit kleinerem Rechenaufwand aus.

5. TESTRECHNUNGEN

5.1 Rinne I

Um die verschiedenen Berechnungsverfahren (Charakteristikenverfahren mit veränderlichem Netz, explizite und implizite Differenzenverfahren) miteinander zu vergleichen, wurden in gedachten Rinnen mit verschiedenen instationären Abflußvorgängen Testrechnungen durchgeführt. Die angenommene Rinne I ist in Abb. 9 dargestellt.

Als Anfangsbedingung wurde ein Ruhezustand mit einer Wassertiefe von 4,00 m angenommen. Am linken Rand wurde die in Abb. 9 eingetragene zeitliche Änderung des Zuflusses Q (m^3/s) angenommen, am rechten Rand eine konstante Wasserspiegelhöhe wie beim Ruhezustand.

Folgende Rechenverfahren wurden miteinander verglichen:

- Charakteristikenverfahren mit veränderlichem Netz
- Explizit-verzahntes Differenzenverfahren
(siehe Dorer /7/) mit Courant-Zahl Cou = 0,9
- Implizites Differenzenverfahren.

Folgende Maschenweiten wurden bei den Untersuchungen gewählt:

- $\Delta x = 150, 100, 50, 25 \text{ m}$.

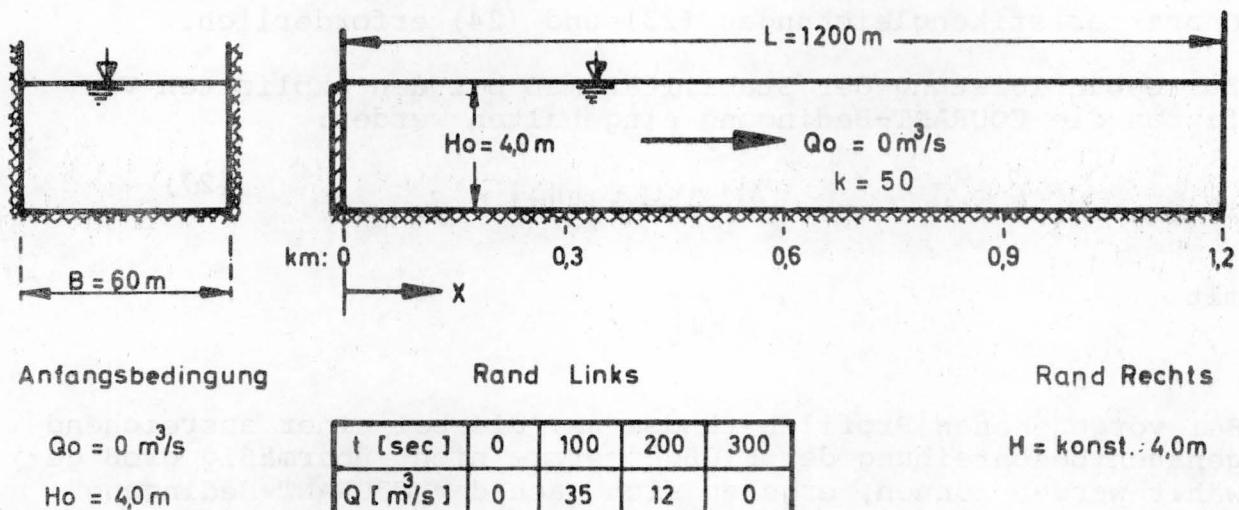


Abb. 9 Testrechnung Rinne I: Gerinneabmessungen, Rand- und Anfangsbedingungen

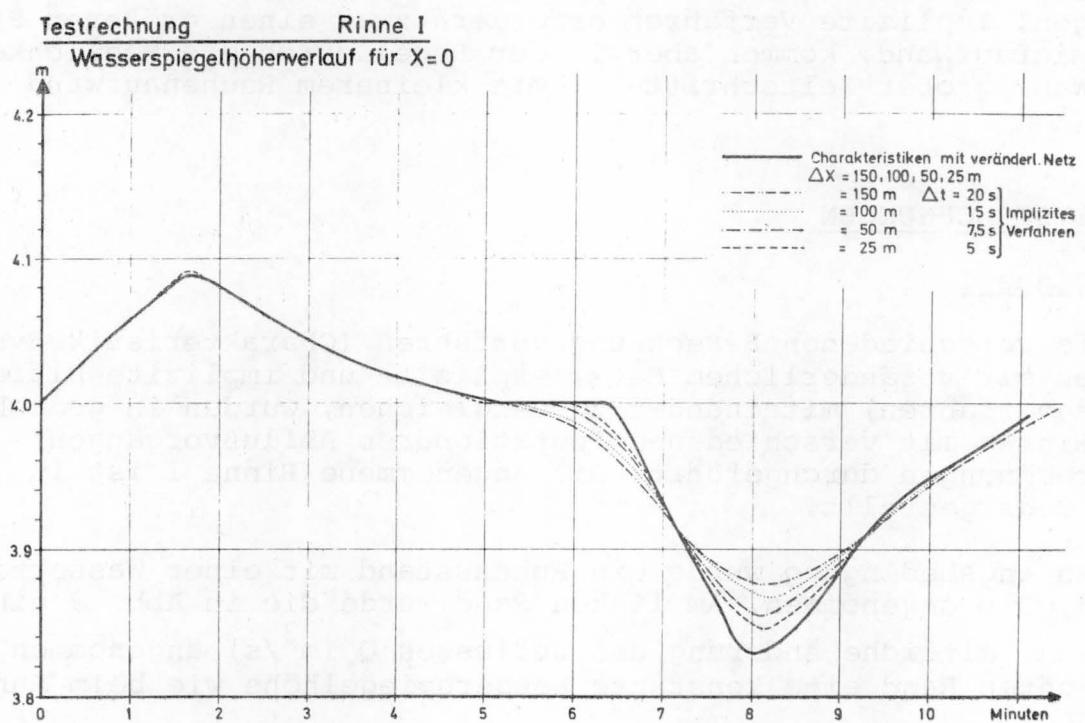


Abb. 10 Rinne I, zeitlicher Wasserspiegelverlauf am linken Rand, explizites Verfahren

Die Testrechnungen für die angenommene Rinne I mit Rechteckquerschnitt mit konstanter Breite ergaben für die in Abb. 9 angegebene zeitliche Zuflußänderung am linken Rand, die in etwa einer normalen Schleusung entspricht, für die einzelnen Verfahren folgende Ergebnisse:

- Bei dem Charakteristikenverfahren mit veränderlichem Netz hat die Maschenweite Δx keinen merkbaren Einfluß auf die Rechenergebnisse, sehr wahrscheinlich bedingt durch die gleichbleibende Gerinnebreite, im Gegensatz zu den früheren Untersuchungen mit Querschnittserweiterung (siehe Dorer /7/).

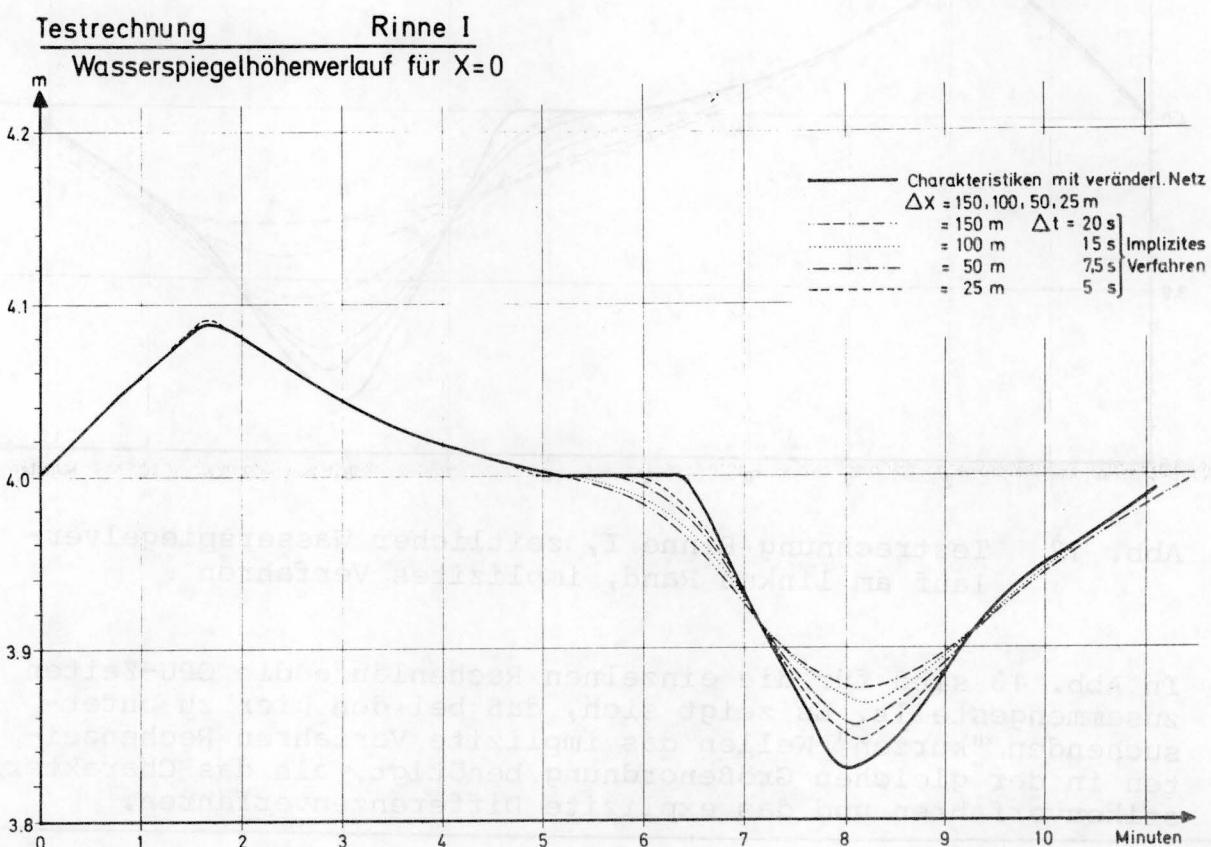


Abb. 11 Testrechnung Rinne I, zeitlicher Wasserspiegelverlauf am linken Rand, implizites Verfahren

- Bei dem gewählten expliziten Verfahren sind bei einer Courant-Zahl von 0,9 Maschenweiten von $\Delta x = 50$ m bzw. $\Delta x = 25$ m erforderlich, um die Ergebnisse des Charakteristikenverfahrens mit veränderlichem Netz einigermaßen zu erreichen.
- Bei dem impliziten Verfahren sind ebenfalls Maschenweiten von $\Delta x = 50$ m bzw. $\Delta x = 25$ m erforderlich bei Zeitschritten $\Delta t = 7,5$ s bzw. $\Delta t = 5$ s, um die Ergebnisse des Charakteristikenverfahrens mit veränderlichem Netz annähernd zu erreichen. (Siehe Abb. 10, 11 und 12).

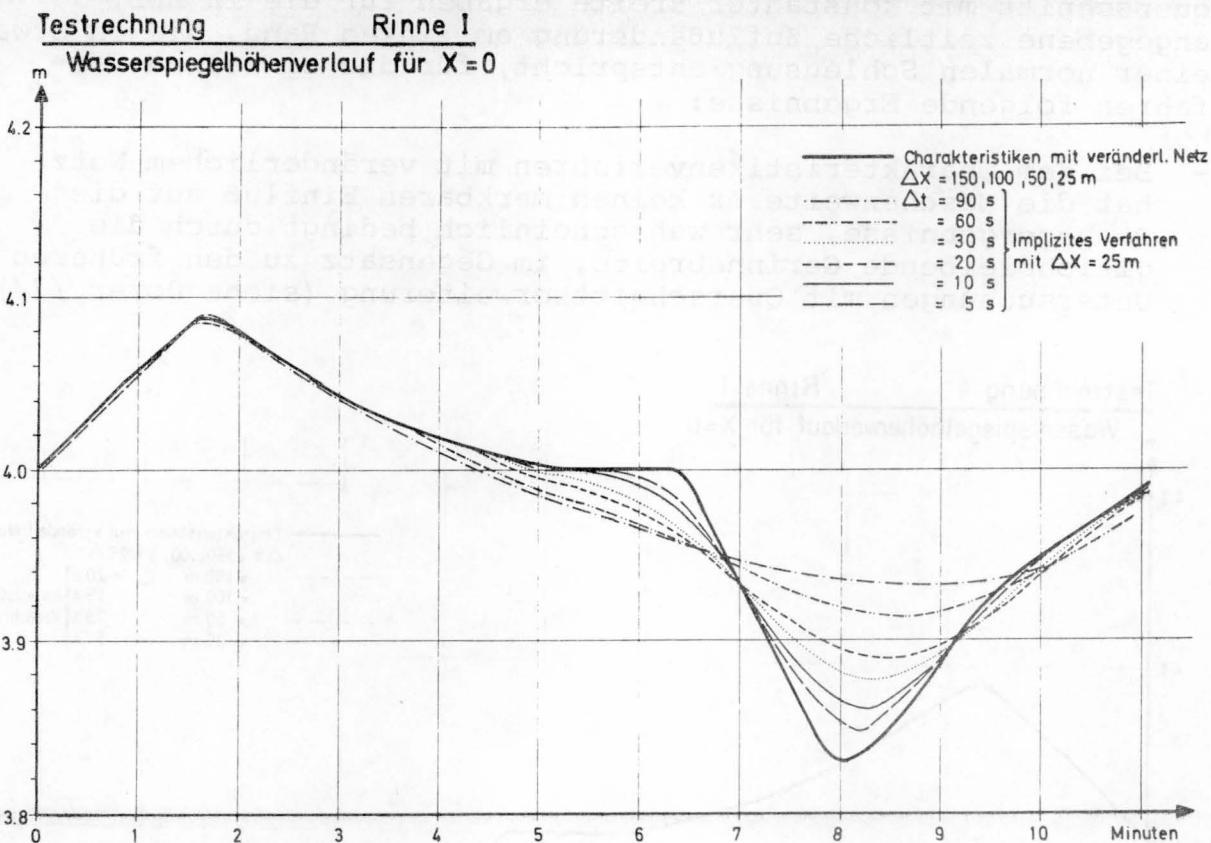


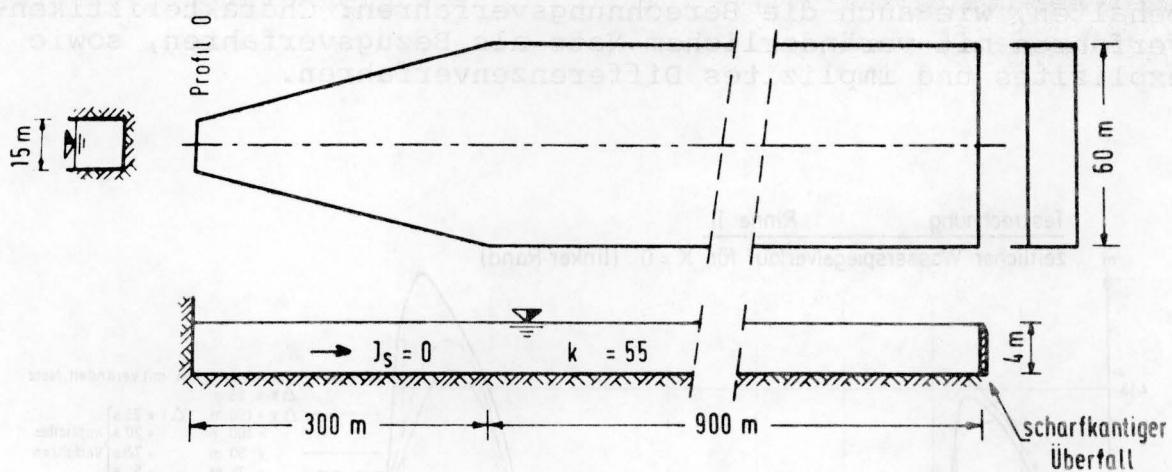
Abb. 12 Testrechnung Rinne I, zeitlicher Wasserspiegelverlauf am linken Rand, implizites Verfahren

In Abb. 13 sind für die einzelnen Rechenläufe die CPU-Zeiten zusammengestellt. Es zeigt sich, daß bei den hier zu untersuchenden "kurzen" Wellen das implizite Verfahren Rechenzeiten in der gleichen Größenordnung benötigt, als das Charakteristikenverfahren und das explizite Differenzenverfahren.

	$x = 150 \text{ m}$		$x = 100 \text{ m}$		$x = 50 \text{ m}$		$x = 25 \text{ m}$	
	$\Delta t \text{ (s)}$	CPU(s)						
Char. veränd. Netz	~45	4,41	~30	8,66	~15	30,74	~7,5	126,16
Explizit Cou=0,9	~20	4,31	~14	5,19	~7	13,11	~3,5	39,86
Implizit							5	108,03
						7,5	35,74	
						15	9,83	10
	20	5,93				45	18,35	27,87
				30	5,75	30	10,43	19,05
				45	4,42	45	7,39	
				60	3,31			60
				90	1,99			90
								9,61
								7,02

Abb. 13 Testrechnung Rinne I, Zusammenstellung von Maschenweite, Zeitschritt und CPU-Zeit für die einzelnen Rechenläufe

5.2 Rinne II und Rinne III



Anfangsbedingung:

Geschwindigkeit $v = 0$

Wassertiefe $H = 4 \text{ m}$

Rand links - (Profil 0):

$t [\text{sec}]$	0	100	200	300
------------------	---	-----	-----	-----

$Q [\text{m}^3/\text{s}]$	0	35	12	0
---------------------------	---	----	----	---

Rand rechts:

freier Überfall

$Q = 150 (\text{Wsp} - 4)^{\frac{3}{2}}$

Abb. 14 Testrechnung Rinne II: Gerinneabmessungen, Rand- und Anfangsbedingungen. (Siehe Dorer /7/)

Mit den gedachten Rinnen II und III wurden Testrechnungen durchgeführt bei veränderlichen Gerinnebreiten. Die Gerinneabmessungen sind in den Abb. 14 und 15 dargestellt, die Rinne II wurde aus früheren Untersuchungen (siehe Dorer /7/) übernommen.

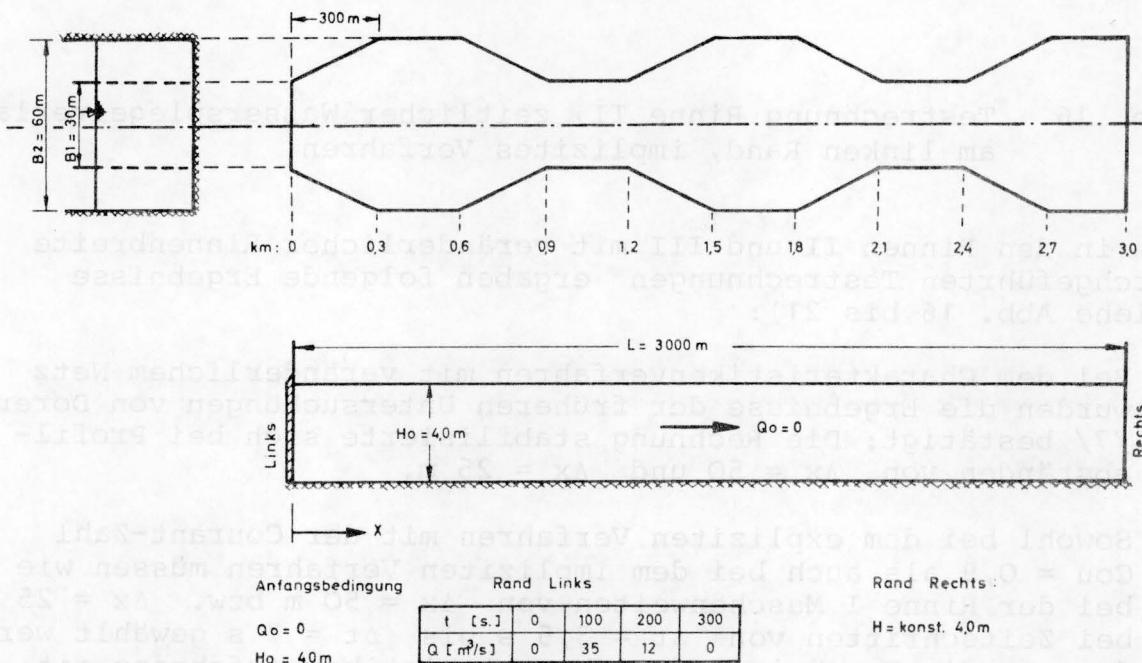


Abb. 15 Testrechnung Rinne III: Gerinneabmessungen, Rand- und Anfangsbedingungen

Die Maschenweiten Δx und Δt , die Randbedingung links und die Anfangsbedingung wurden von den Testrechnungen mit Rinne I beibehalten, wie auch die Berechnungsverfahren: Charakteristikenverfahren mit veränderlichem Netz als Bezugsverfahren, sowie explizites und implizites Differenzenverfahren.

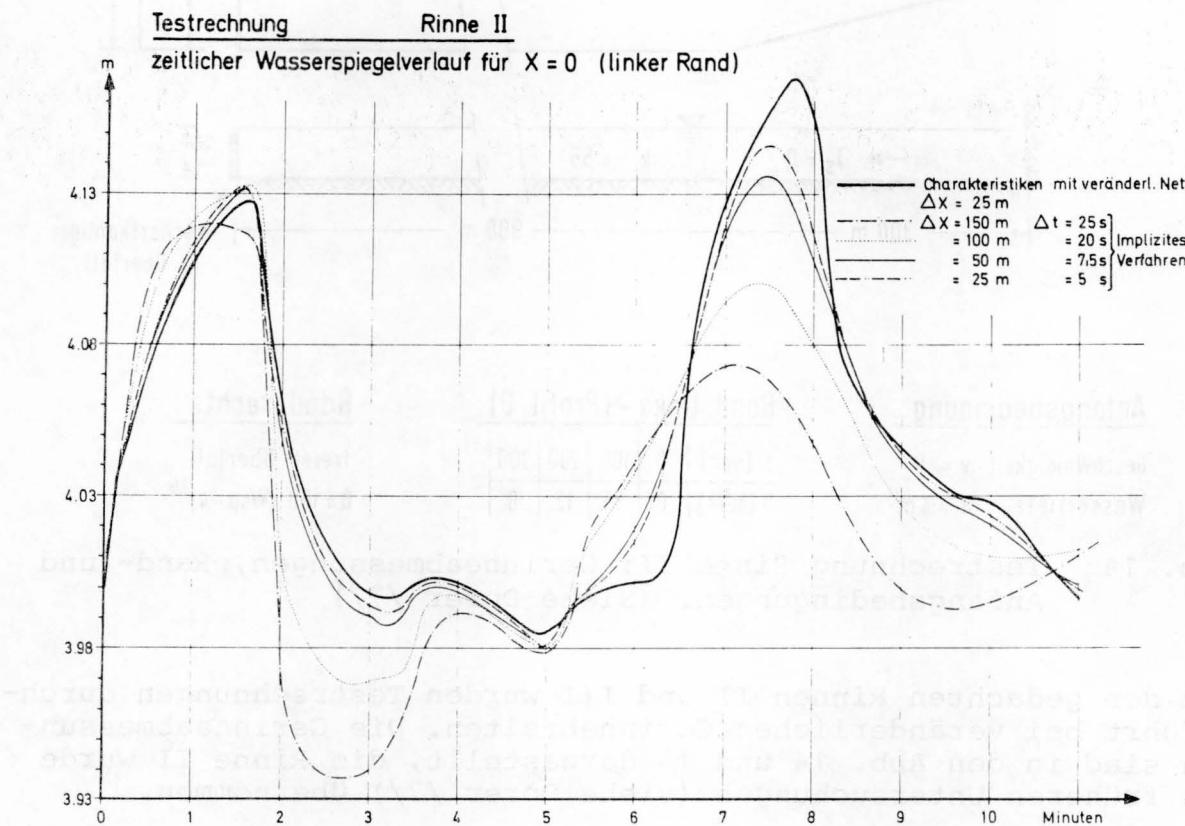


Abb. 16 Testrechnung Rinne II, zeitlicher Wasserspiegelverlauf am linken Rand, implizites Verfahren

Die in den Rinnen II und III mit veränderlicher Rinnenbreite durchgeführten Testrechnungen ergaben folgende Ergebnisse (siehe Abb. 16 bis 21):

- Bei dem Charakteristikenverfahren mit veränderlichem Netz wurden die Ergebnisse der früheren Untersuchungen von Dorer /7/ bestätigt: Die Rechnung stabilisierte sich bei Profilabständen von $\Delta x = 50$ und $\Delta x = 25$ m.
- Sowohl bei dem expliziten Verfahren mit der Courant-Zahl $Cou = 0,9$ als auch bei dem impliziten Verfahren müssen wie bei der Rinne I Maschenweiten von $\Delta x = 50$ m bzw. $\Delta x = 25$ m bei Zeitschritten von $\Delta t = 3,5$ s bis $\Delta t = 7$ s gewählt werden, um die Ergebnisse des Charakteristikenverfahrens mit beweglichem Netz einigermaßen zu erreichen. In den Abb. 22 und 23 sind für die einzelnen Rechenläufe die CPU-Zeiten und die Zeitschritte t zusammengestellt.

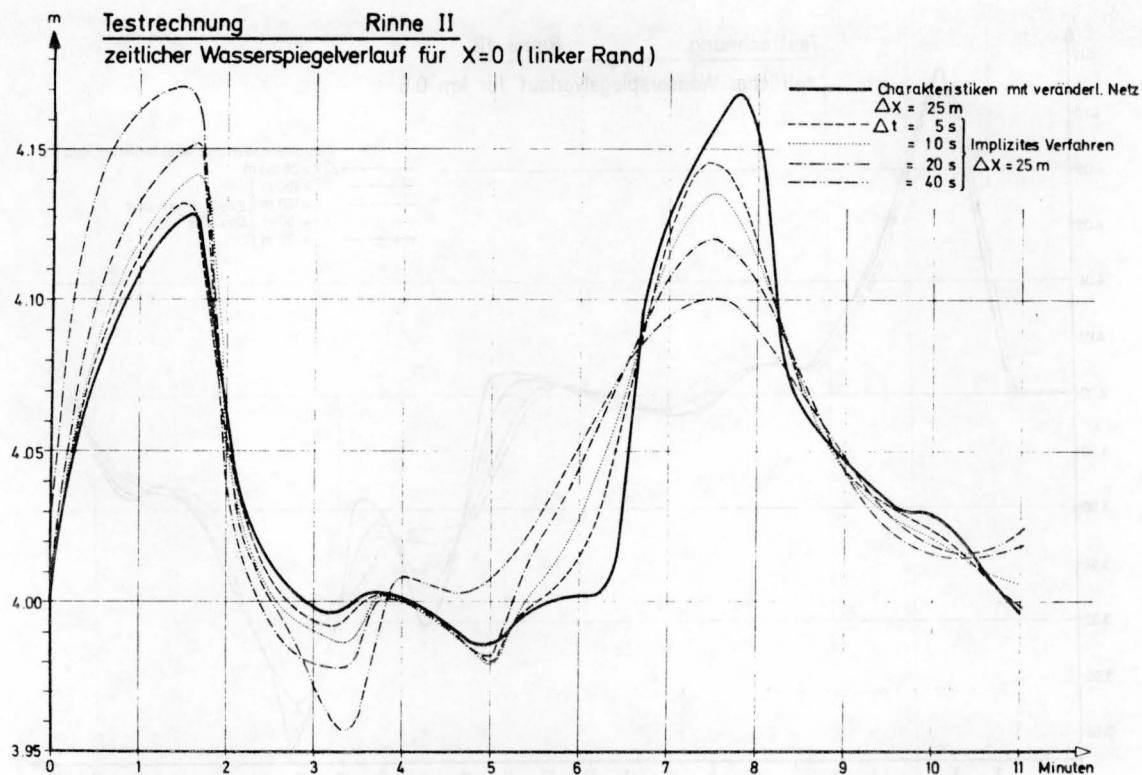


Abb. 17 Testrechnung Rinne II, zeitlicher Wasserspiegelverlauf am linken Rand, implizites Verfahren

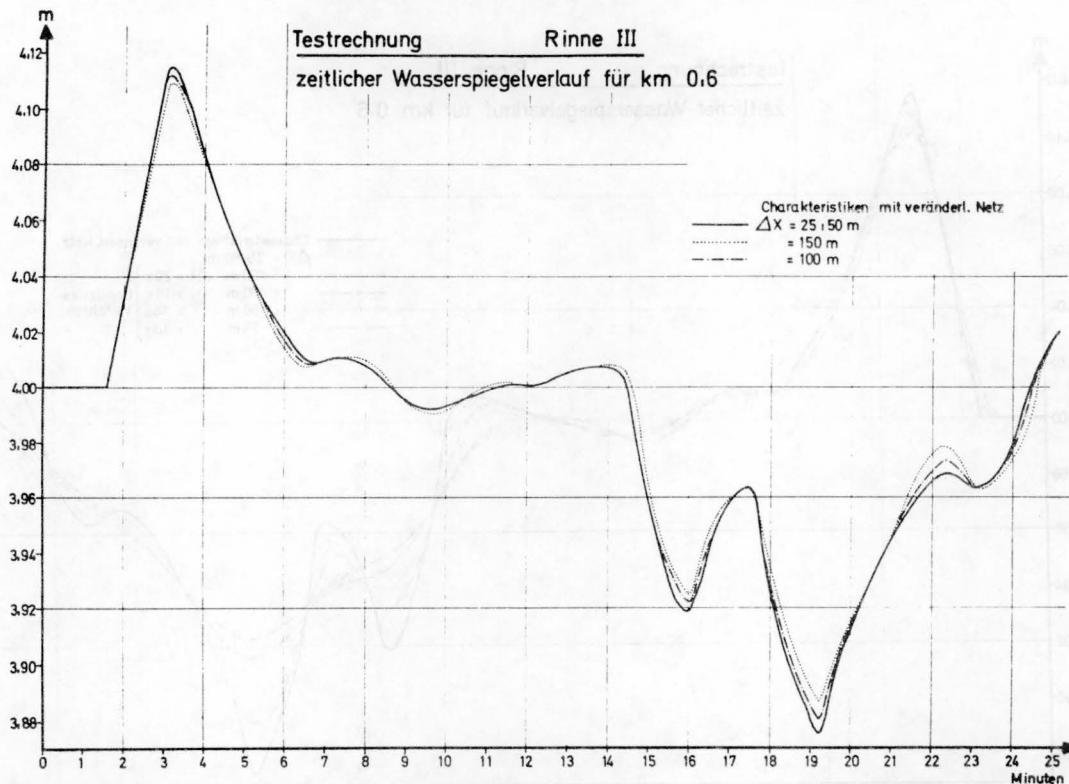


Abb. 18 Testrechnung Rinne III, zeitlicher Wasserspiegelverlauf bei km 0,6, Charakteristikenverfahren mit veränderlichem Netz

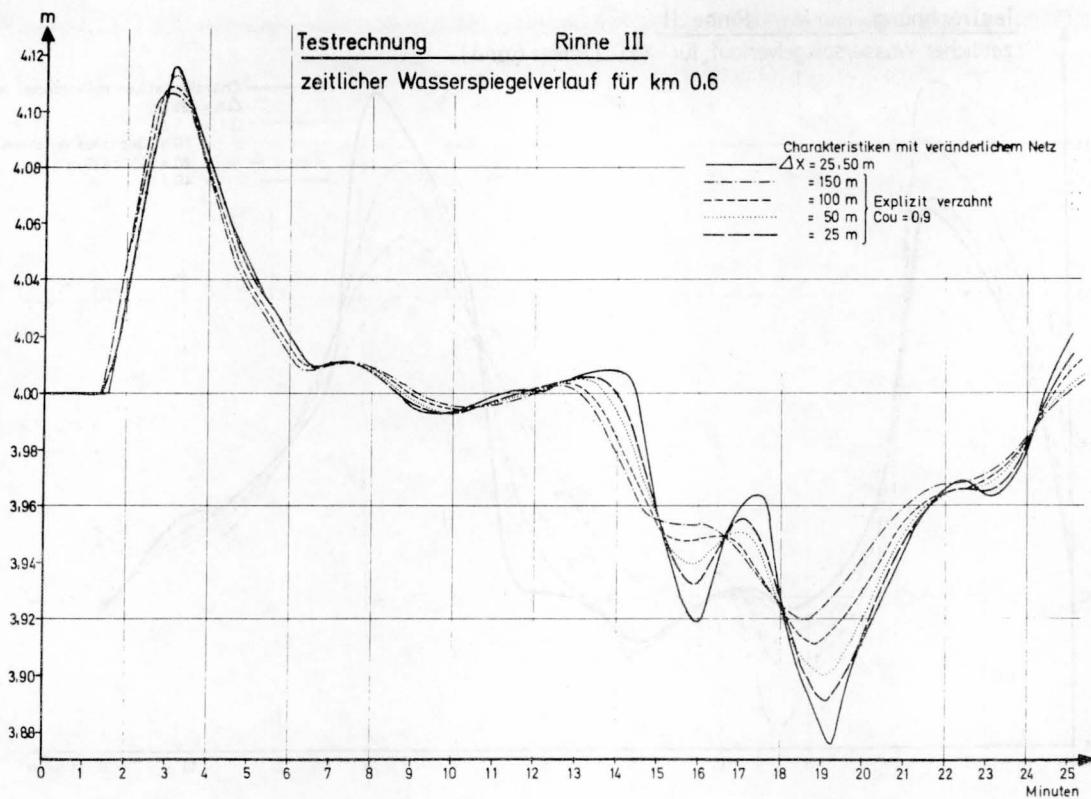


Abb. 19 Testrechnung Rinne III, zeitlicher Wasserspiegelverlauf bei km 0,6, explizites Verfahren

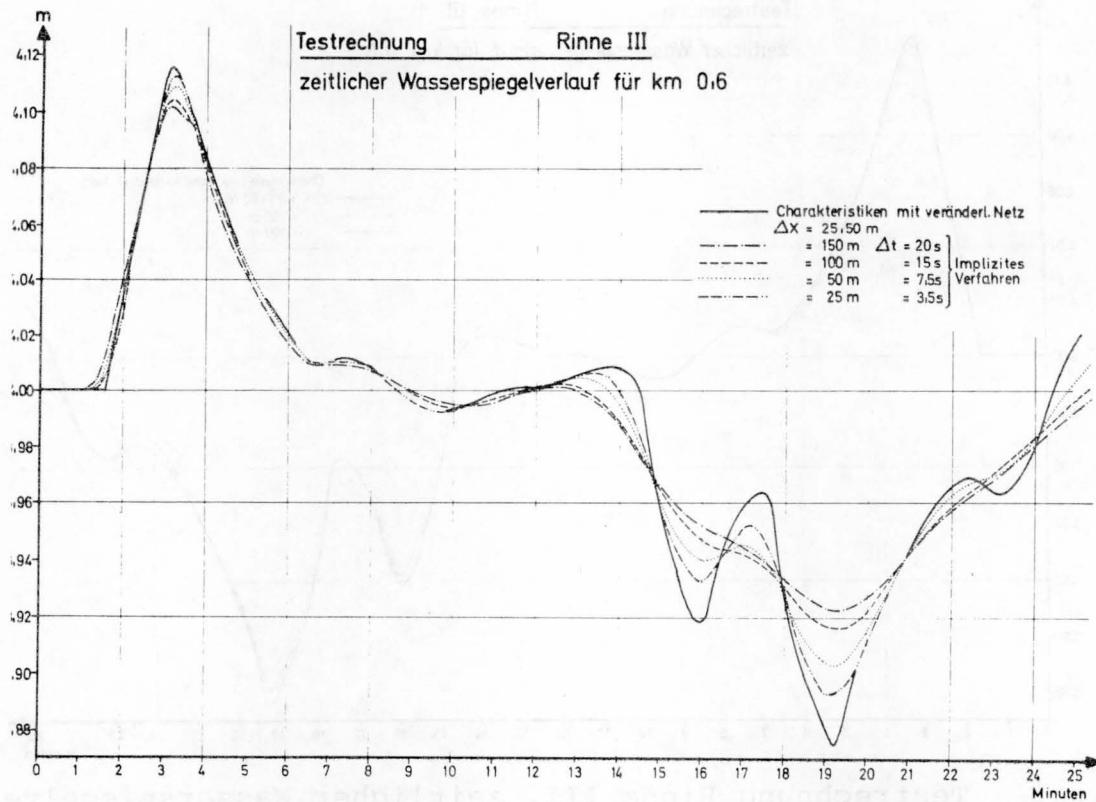


Abb. 20 Testrechnung Rinne III, zeitlicher Wasserspiegelverlauf bei km 0,6, implizites Verfahren

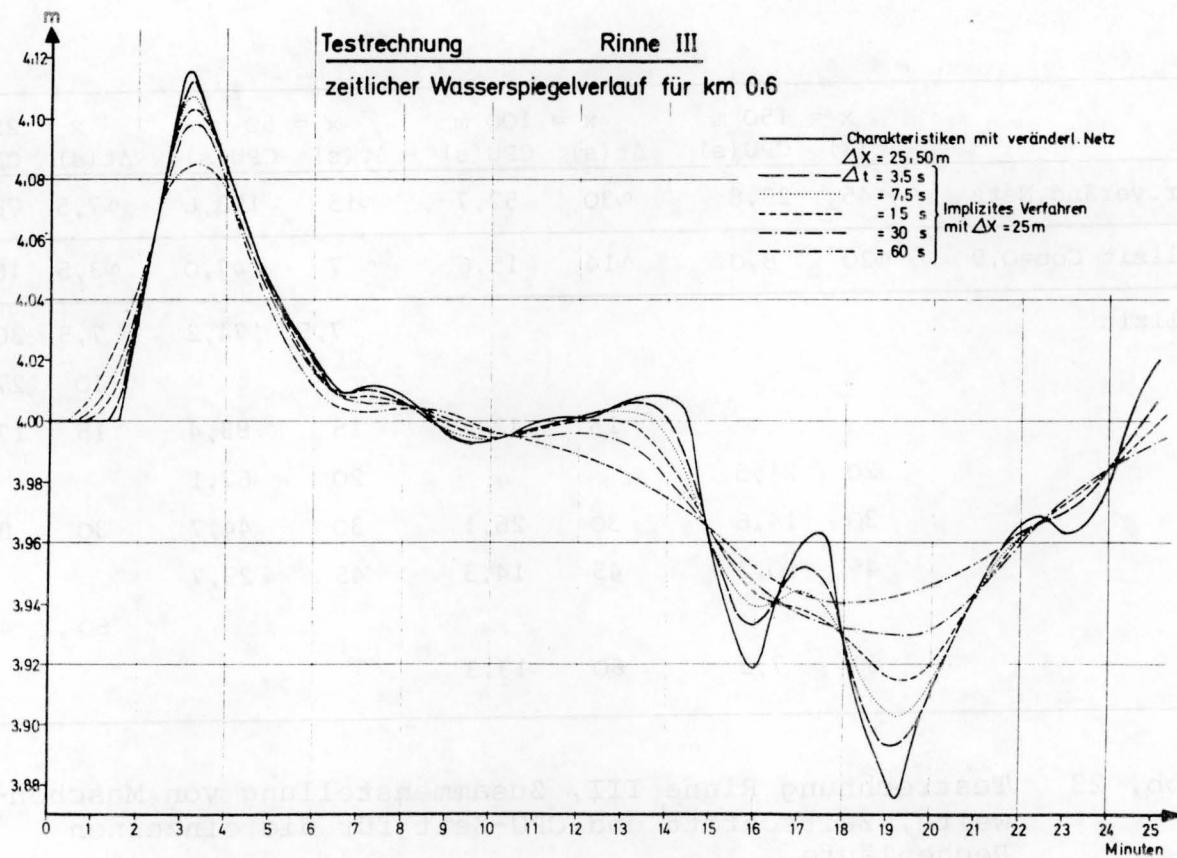


Abb. 21 Testrechnung Rinne III, zeitlicher Wasserspiegelverlauf bei km 0,6, implizites Verfahren

	$x = 150 \text{ m}$		$x = 100 \text{ m}$		$x = 50 \text{ m}$		$x = 25 \text{ m}$	
	$\Delta t(\text{s})$	CPU(s)						
Char.veränd.Netz	~45	5,59	~27,5	10,98	~13	44,44	~6	141,97
Explizit Cou=0,9	~20	4,01	~14	5,07	~7	11,52	~3,5	24,13
Implizit							5	99,05
							7,5	35,04
	10	9,87	10	15,81			10	52,11
					15	18,21		
			20	7,46			20	27,70
	25	4,89			30	9,87		
			35	4,71			40	16,35
		45	3,95					

Abb. 22 Testrechnung Rinne II, Zusammenstellung von Maschenweiten, Zeitschritt und CPU-Zeit für die einzelnen Rechenläufe

	$x = 150 \text{ m}$		$x = 100 \text{ m}$		$x = 50 \text{ m}$		$x = 25 \text{ m}$	
	$\Delta t \text{ (s)}$	CPU(s)						
Char.veränd.Netz	~45	25,8	~30	52,7	~15	193,6	~7,5	789,1
Explizit Cou=0,9	~20	8,0	~14	15,6	~7	47,0	~3,5	162,8
Implizit					7,5	174,2	7,5	365,0
							10	277,8
			15	42,4	15	83,4	15	179,2
	20	21,5			20	67,1		
	30	14,6	30	26,1	30	44,7	30	83,5
	45	10,3	45	14,3	45	29,7		
							60	46,5
	60	7,3	60	13,3				

Abb. 23 Testrechnung Rinne III, Zusammenstellung von Maschenweite, Zeitschritt und CPU-Zeit für die einzelnen Rechenläufe

5.3 Moselstauhaltung Koblenz

Um das Verhalten vor allem des impliziten Verfahrens bei der Anwendung in natürlichen Flüssen bei Ablauf von relativ kurzen Schwall- bzw. Sunkwellen zu überprüfen, wurden die bereits in den früheren Untersuchungen Dorer /7/ verwendeten Naturmessungen in der Moselstauhaltung Koblenz nachgerechnet. Diese Messungen wurden von der Elektrizitäts-Actien-Gesellschaft vorm. W. Lahmeyer & Co., Frankfurt, im Auftrag der RWE im Oktober 1957 durchgeführt, siehe /28/.

Nachgerechnet wurde der Versuch 2 vom 11. Oktober 1957: Bei $Q = 124 \text{ m}^3/\text{s}$ als Beharrungszustand (Anfangsbedingung) wurde durch Zuschalten weiterer Turbinen im Kraftwerk Koblenz/Mosel der Abfluß innerhalb 20 min. auf $Q = 425 \text{ m}^3/\text{s}$ erhöht, weitere 30 min. auf dieser Höhe belassen und dann durch Abschalten aller Maschinen in 30 min. auf Null gedrosselt. Der an verschiedenen Stellen in der Mosel gemessene Sunkverlauf infolge dieser Abflußänderung ist in den Abb. 24 bis 31 aufgetragen.

Das mathematische Modell erstreckte sich vom Oberwasser der Staustufe Koblenz bei Mosel-km 2,4 bis Mosel-km 19,8 und enthielt bei einer Länge von 16,8 km 57 Querprofile mit einem Profilabstand $\Delta x = 300 \text{ m}$.

Als Querprofilwerte wurden bei den Verfahren mit festem Netz (Charakteristiken, explizites und implizites Verfahren) Tabellen für die Flächen, die Wasserspiegelbreite und das Reibungsglied bei verschiedenen Wasserständen verwendet. Die auf der Grundlage der Anfangsbedingung rückgerechneten k-Werte (siehe Dorer /7/) wurden für die Berechnungen beibehalten.

Für die einzelnen Verfahren wurden folgende CPU-Zeiten benötigt:

Verfahren	Zeitschritt Δt (s)	CPU - Zeit (s)
Charakteristiken mit veränderlichem Netz (Querprofile digitalisiert)	100	447
Explizit-Charakteristiken m. festem Netz (Querprofile in Tabellenform)	40 ($Cou=0,9$)	126
Explizit verzahnt (Querprofile in Tabellenform)	40 ($Cou=0,9$)	121
implizit	150	113
(Querprofile in Tabellenform)	200	75
	350	54
	500	39
	750	32
	1000	24
	1500	22
	2000	20

Die Berechnungen zeigten im einzelnen folgende Ergebnisse:

- Mit dem impliziten Verfahren lassen sich bei einem Zeitschritt $\Delta t = 150$ s entsprechend einer Courant-Zahl $Cou=3,5-4,0$ Ergebnisse in vergleichbarer Qualität erzielen, wie mit dem Charakteristikenverfahren mit veränderlichem Netz, das die Naturmessungen gut simuliert, wobei nur etwa 1/4 der Rechenzeit benötigt wird.
- Die expliziten Verfahren sind deutlich schlechter als das implizite Verfahren, unter den expliziten Verfahren ist das Charakteristikenverfahren mit festem Netz vorzuziehen.
(Siehe Abb. 24 bis 27).

Dorer: Schwall- und Sunkberechnungen

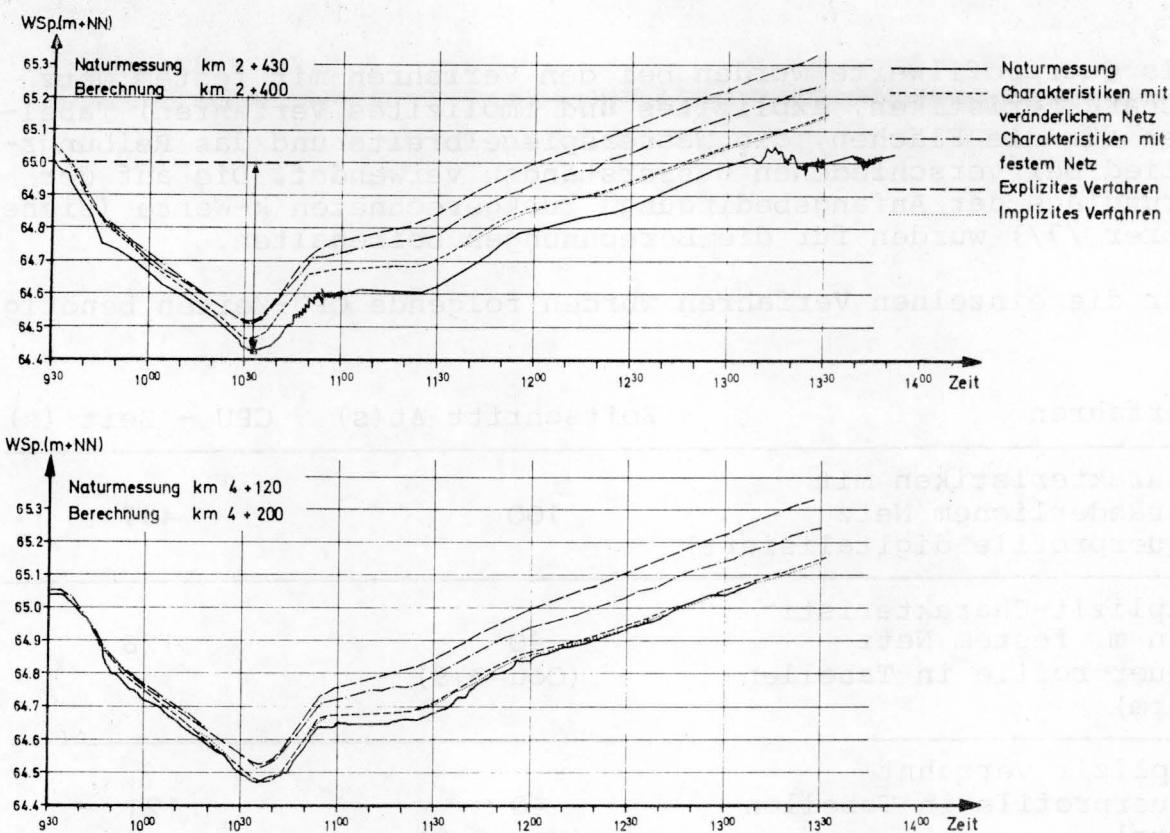


Abb. 24 Testrechnung Moselstauhaltung Koblenz, Vergleich verschiedener Verfahren, Wsp-Verlauf bei Mosel-km 2.40 und 4.20

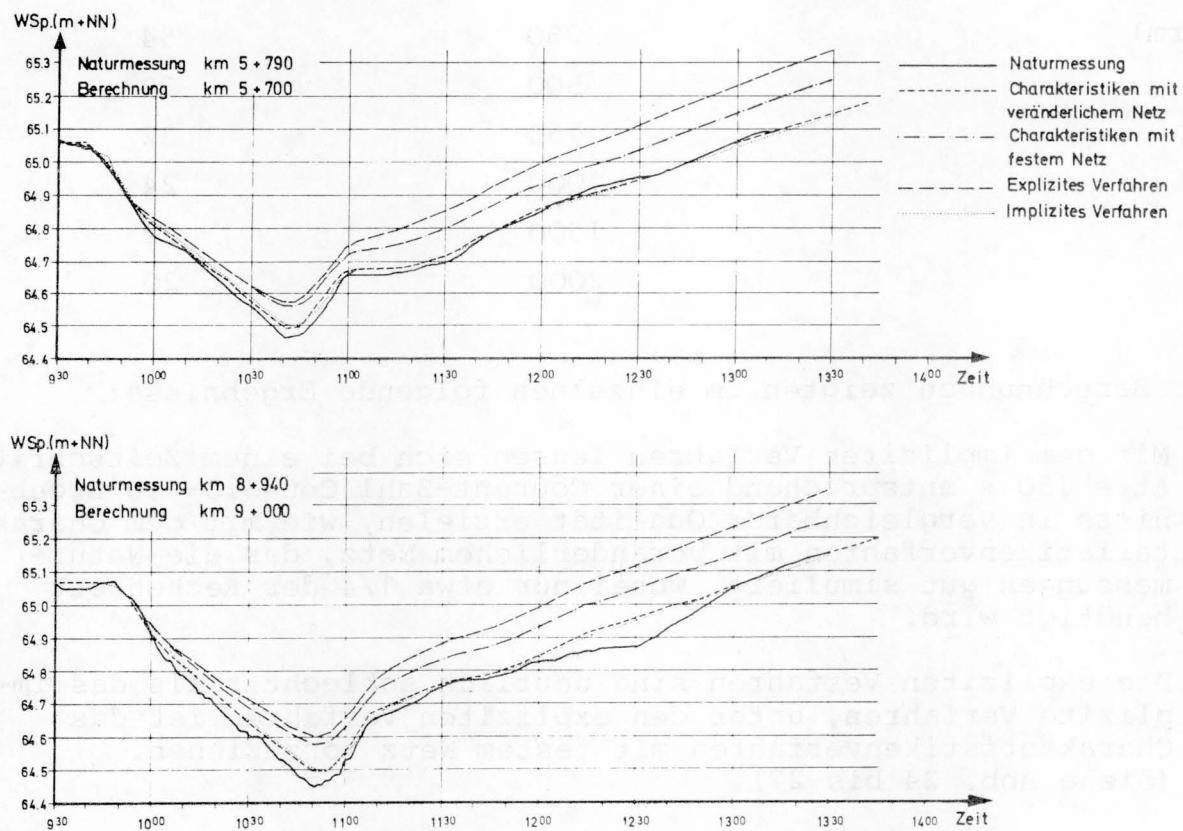


Abb. 25 Testrechnung Moselstauhaltung Koblenz, Vergleich verschiedener Verfahren, Esp-Verlauf bei Mosel-km 5.70 und 9.00

Dorer: Schwall- und Sunkberechnungen

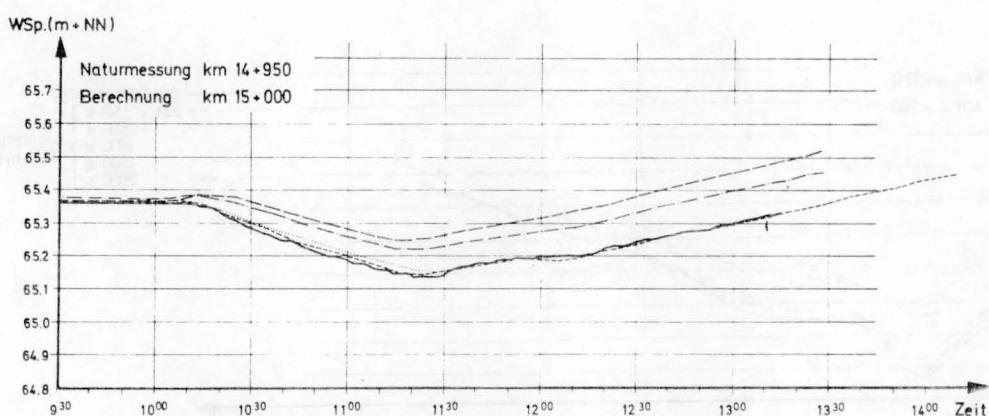
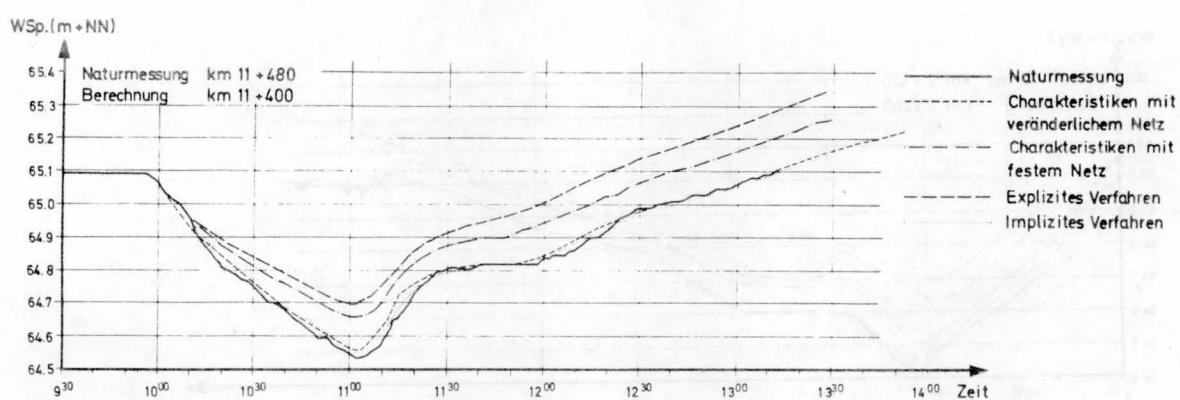


Abb. 26 Testrechnung Moselstauhaltung Koblenz, Vergleich verschiedener Verfahren, Wsp-Verlauf bei Mosel-km 11.40 und 15.00

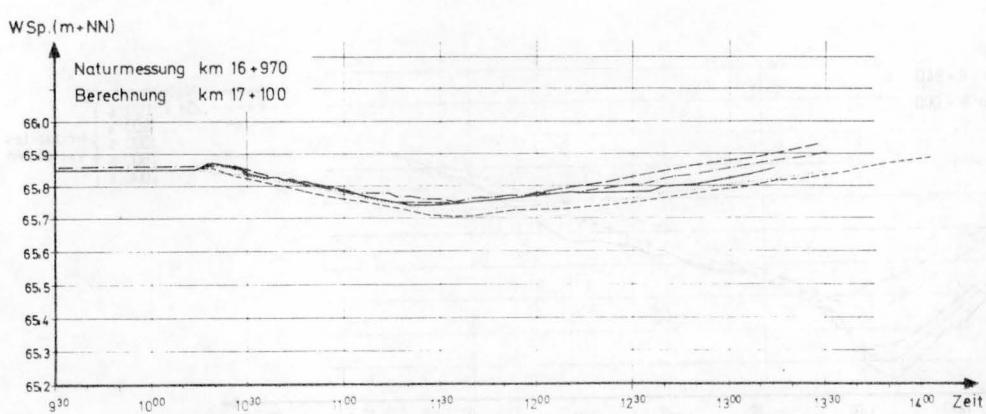
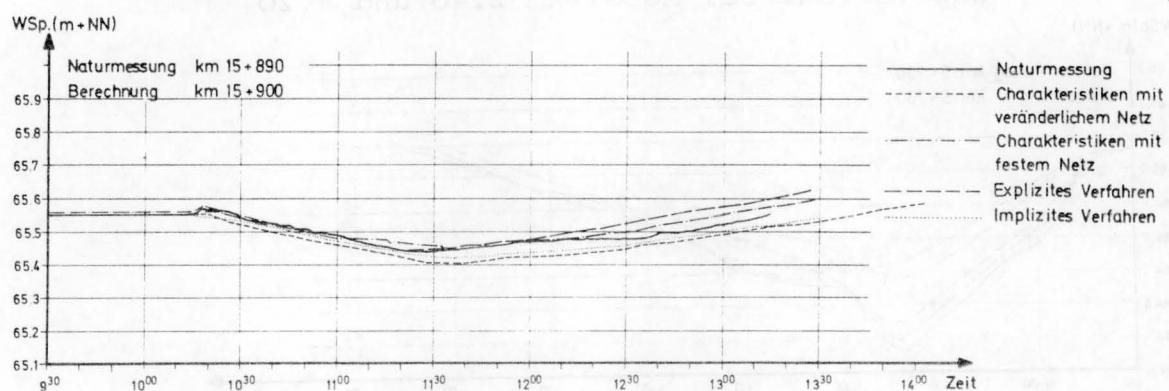


Abb. 27 Testrechnung Moselstauhaltung Koblenz, Vergleich verschiedener Verfahren, Wsp-Verlauf bei Mosel-km 15.90 und 17.10

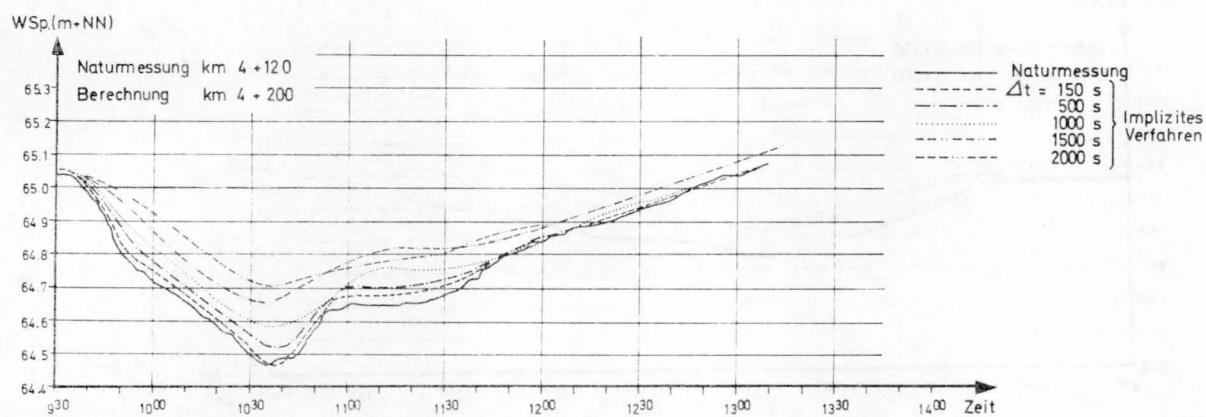
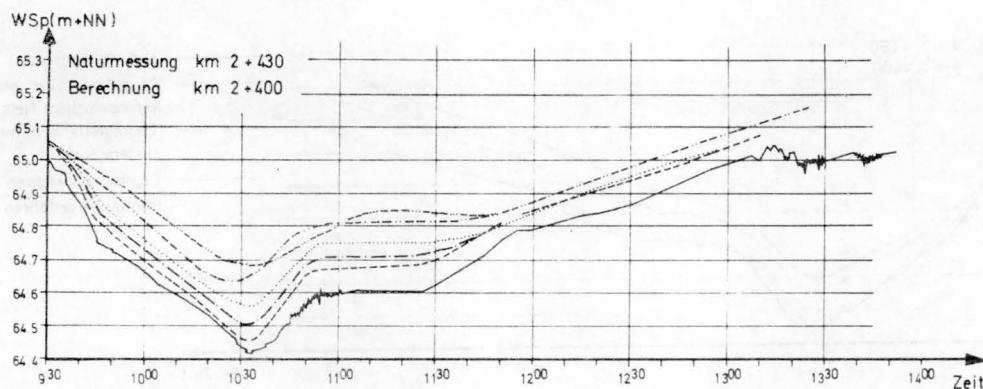


Abb. 28 Testrechnung Moselstauhaltung Koblenz, implizites Verfahren mit verschiedenen Zeitschritten, Wsp-Verlauf bei Mosel-km 2.40 und 4.20

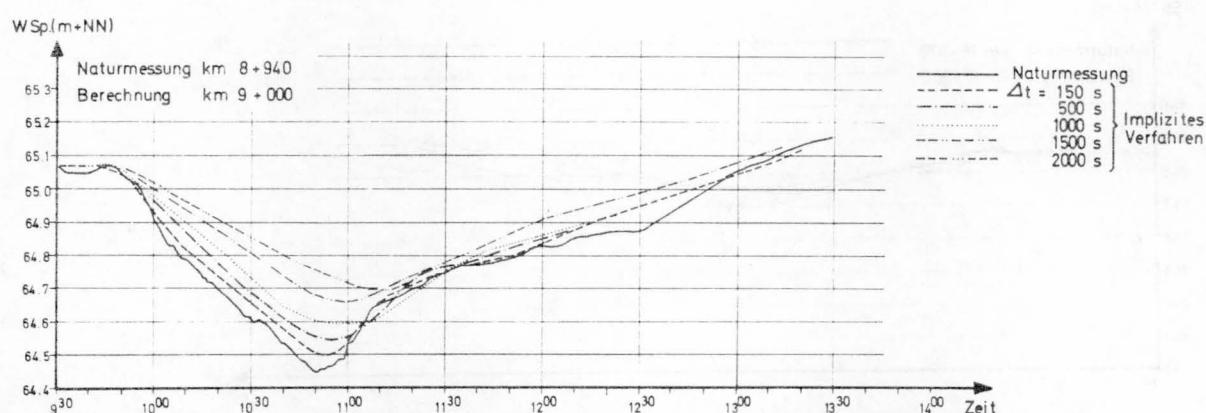
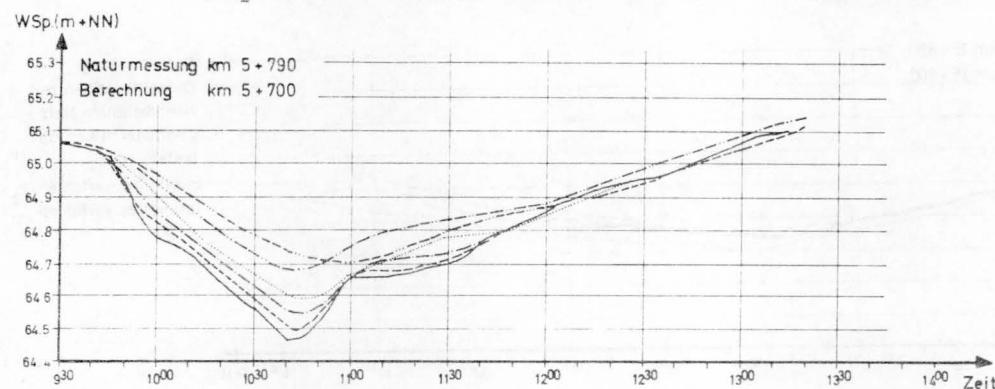


Abb. 29 Testrechnung Moselstauhaltung Koblenz, implizites Verfahren mit verschiedenen Zeitschritten, Wsp-Verlauf bei Mosel-km 5.70 und 9.00

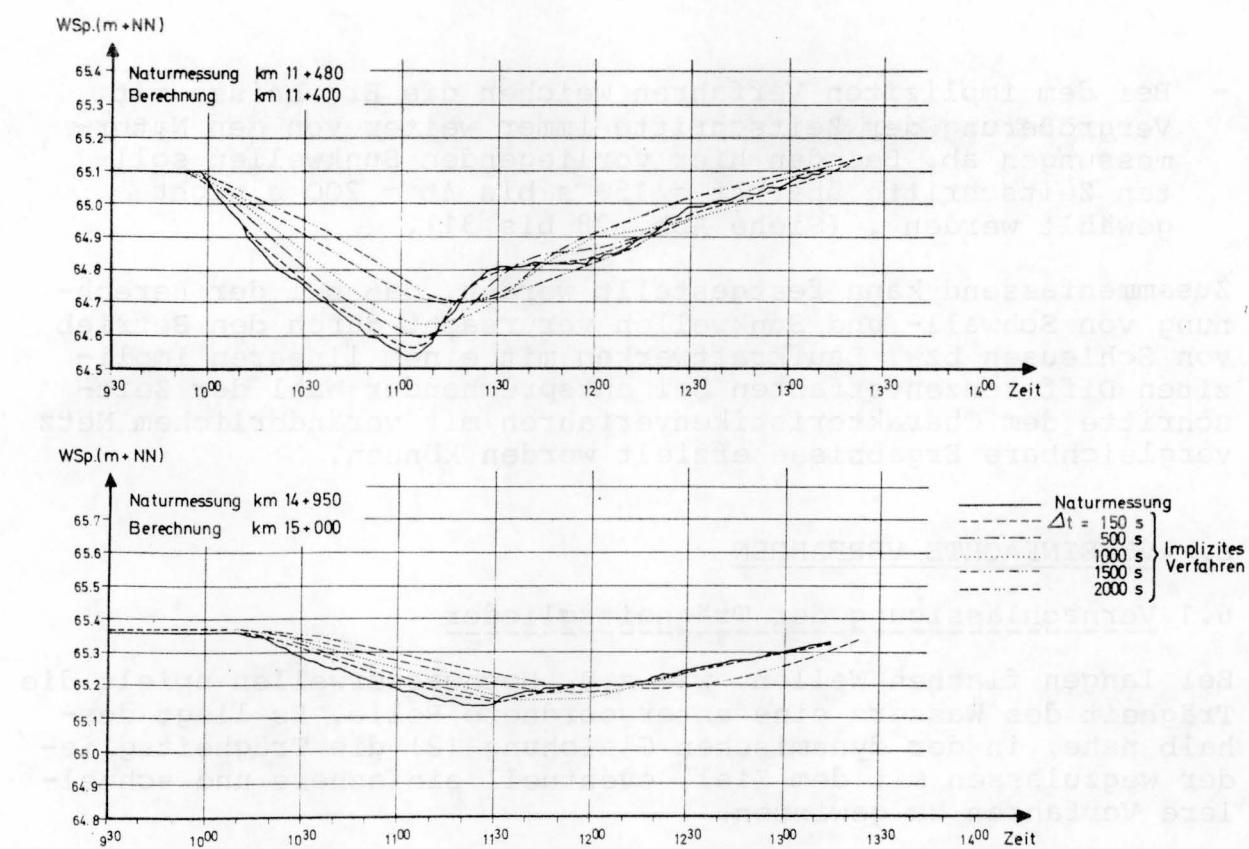


Abb. 30 Testrechnung Moselstauhaltung Koblenz, implizites Verfahren mit verschiedenen Zeitschritten, Wsp-Verlauf bei Mosel-km 11.40 und 15.00

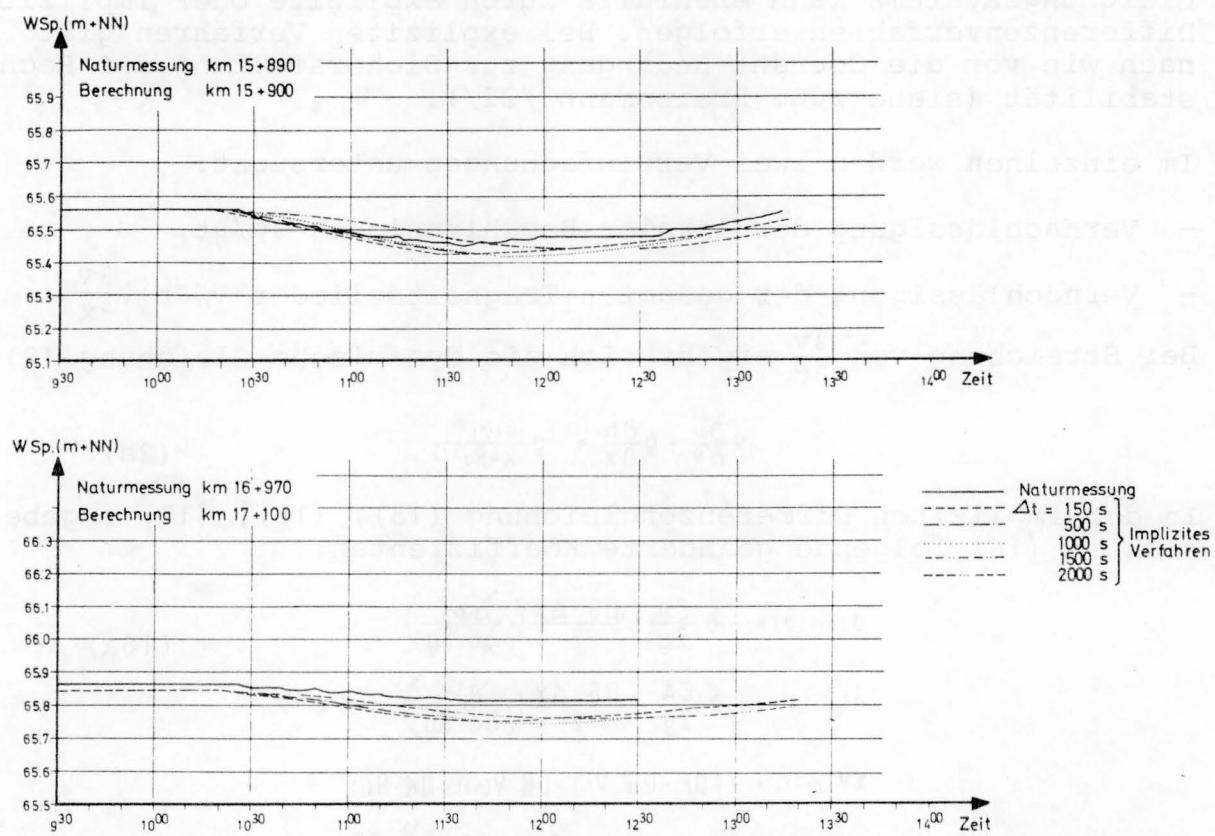


Abb. 31 Testrechnung Moselstauhaltung Koblenz, implizites Verfahren mit verschiedenen Zeitschritten, Wsp-Verlauf bei Mosel-km 15.90 und 17.10

- Bei dem impliziten Verfahren weichen die Ergebnisse mit Vergrößerung der Zeitschritte immer weiter von den Naturmessungen ab. Bei den hier vorliegenden Sunkwellen sollten Zeitschritte über $\Delta t = 150$ s bis $\Delta t = 200$ s nicht gewählt werden. (Siehe Abb. 28 bis 31).

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß bei der Berechnung von Schwall- und Sunkwellen verursacht durch den Betrieb von Schleusen bzw. Laufkraftwerken mit einem linearen impliziten Differenzenverfahren bei entsprechender Wahl der Zeitschritte dem Charakteristikenverfahren mit veränderlichem Netz vergleichbare Ergebnisse erzielt werden können.

6. VEREINFACHTE VERFAHREN

6.1 Vernachlässigung der Trägheitsglieder

Bei langen flachen Wellen, wie z.B. Hochwasserwellen spielt die Trägheit des Wassers eine untergeordnete Rolle. Es liegt deshalb nahe, in der dynamischen Gleichung (2) die Trägheitsglieder wegzulassen mit dem Ziel, eventuell einfachere und schnellere Verfahren zu gewinnen.

Durch das Streichen der Trägheitsglieder verändert sich der Charakter des Differentialgleichungssystems (1) und (2), das System wird parabolisch. Die numerische Integration des vereinfachten Gleichungssystems kann ebenfalls durch explizite oder implizite Differenzenverfahren erfolgen. Bei expliziten Verfahren gilt nach wie vor die Courant-Bedingung zur Sicherstellung der Rechenstabilität (siehe z.B. Preissmann /22/).

Im einzelnen werden zwei Vereinfachungen untersucht:

- Vernachlässigung der lokaler Beschleunigung $\partial v / \partial t$,

- Vernachlässigung der gesamten Trägheitsglieder $\partial v / \partial t + v \frac{\partial v}{\partial x}$

Bei Streichung von $\frac{\partial v}{\partial t}$ ergibt sich die dynamische Gleichung (2) zu:

$$v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = -g \frac{v|v|}{k^2 R_a^{4/3}} \quad (2a)$$

In der impliziten Differenzengleichung (15), (16), (17) ergeben sich in (16) folgende geänderte Koeffizienten:

$$\alpha_{(2i+1,2)} = -\vartheta \frac{CA}{2g} + \frac{DG \cdot \Delta x}{2} \left(\frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta t} \cdot \cancel{2g}} \right) \quad (16a)$$

$$\alpha_{(2i+1,4)} = \vartheta \frac{CA}{2g} + \frac{DG \cdot \Delta x}{2} \left(\frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta t} \cdot \cancel{2g}} \right)$$

$$XV_{(2i+1)} = -[DF - DG \cdot V(i) - DH \cdot V(i+1) + DK \cdot H(i)]$$

$$+ DL \cdot H(i+1) \frac{\Delta x}{2} - CB - \frac{CA \cdot CE}{2g}$$

$$\left(\frac{\cancel{CA} \cdot \cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta t} \cdot \cancel{2g}} \right)$$

Bei Streichung der gesamten Trägheitsglieder ergibt sich die dynamische Gleichung (2) zu

$$\frac{\partial h}{\partial x} = - \frac{v|v|}{k^2 R_a^{4/3}} \quad (2b)$$

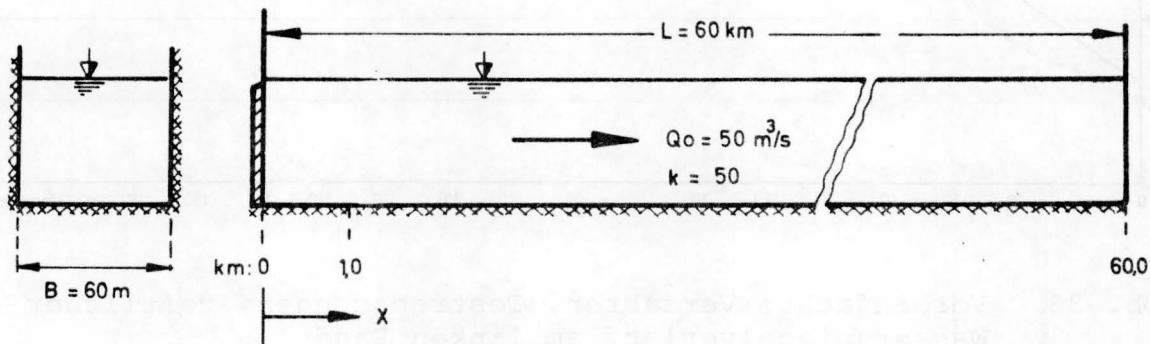
In der impliziten Differenzengleichung (15), (16), (17) ergeben sich dabei geänderte Koeffizienten:

$$\begin{aligned} a_{(2i+1,2)} &= \frac{DG \cdot \Delta x}{2} \left(- \cancel{\frac{CA}{2q}} + \cancel{\frac{\Delta x}{\Delta t \cdot 2g}} \right) & X V_{(2i+1)} &= - [DF - DG \cdot V(i) - DH \cdot V(i+1) + DK \cdot H(i) \\ &&& + DL \cdot H(i+1)] \frac{\Delta x}{2} - CB \\ a_{(2i+1,4)} &= \frac{DH \cdot \Delta x}{2} \left(+ \cancel{\frac{CA}{2q}} + \cancel{\frac{\Delta x}{\Delta t \cdot 2g}} \right) & & \left(+ \cancel{\frac{CA \cdot \Delta x}{\Delta t \cdot 2g}} - \cancel{\frac{CA \cdot CE}{2g}} \right) \end{aligned} \quad (16b)$$

Die Kontinuitätsgleichung (1) sowie die implizite Differenzengleichung (14), (16), (17) bleiben in beiden Fällen unverändert.

6.2 Testrechnungen

Für das in Abb. 32 dargestellte gedachte Gerinne wurden mit den angegebenen Rand- und Anfangsbedingungen Testrechnungen durchgeführt mit dem vollständigen impliziten Verfahren und mit den beiden oben beschriebenen vereinfachten Verfahren. Als Maschenweite wurde $\Delta x = 500 \text{ m}$ und $\Delta t = 100 \text{ s}$ gewählt.



Anfangsbedingung

$Q_0 = 50 \text{ m}^3/\text{s}$
$H_{Rechts} = 4.0 \text{ m}$

Rand Links

$t [\text{sec}]$	0	1200	1800	2200	2800	3600	7200
$Q [\text{m}^3/\text{s}]$	50	60	75	75	80	90	50

Rand Rechts: $H_{Rechts} = \text{konst.} = 4.0 \text{ m}$

Abb. 32 Vereinfachte Verfahren, Gerinne für die Testrechnungen

Bei den verschiedenen Rechenläufen wurden folgende CPU-Zeiten benötigt:

- vollständiges implizites Verfahren 186,7 s
- Vernachlässigung von $\frac{\partial v}{\partial t}$ 185,5 s
- Vernachlässigung von $\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x}$ 190,0 s

Testrechnung "Flood Routing"

Zeitlicher Wasserspiegelverlauf für $x=0$ (linker Rand)

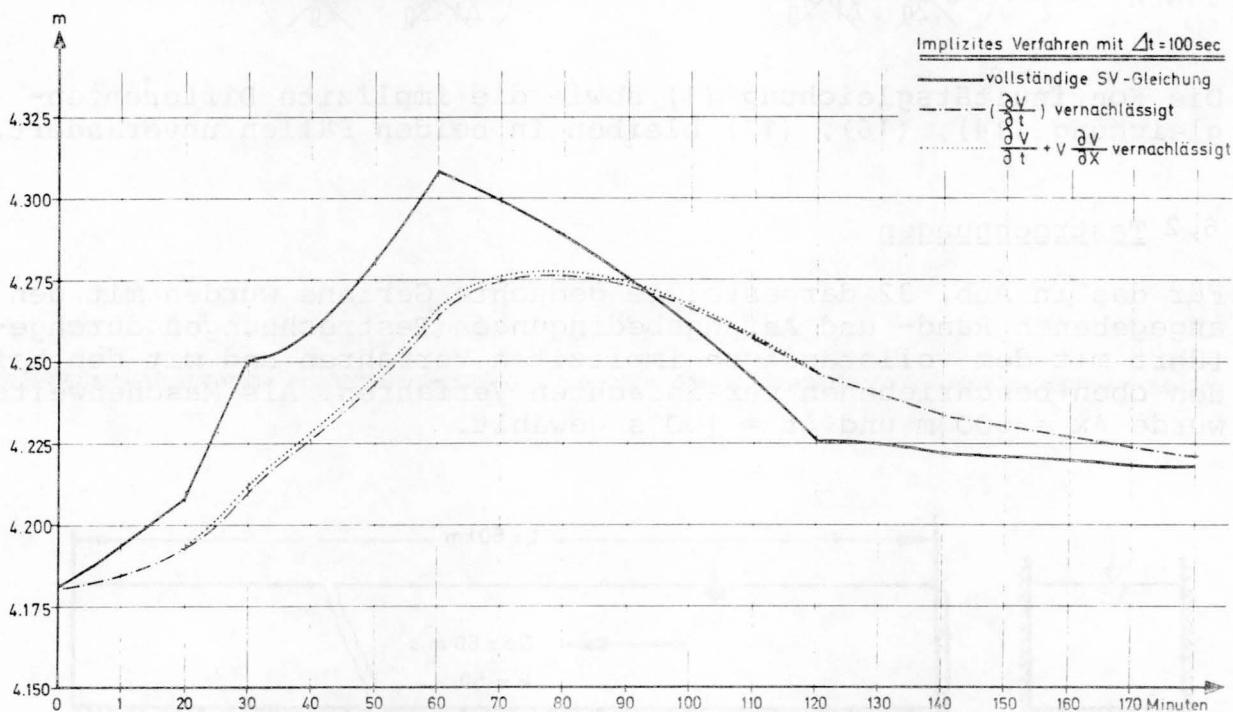


Abb. 33 Vereinfachte Verfahren, Testrechnungen, zeitlicher Wasserspiegelverlauf am linken Rand

Die Testrechnungen mit den vereinfachten impliziten Berechnungsverfahren erbrachten folgende Ergebnisse:

- Der Programmieraufwand ist bei den vereinfachten Gleichungen etwa gleich groß wie bei den Verfahren mit vollständigen Gleichungen,
- die erforderlichen CPU-Zeiten sind ebenfalls bei den vereinfachten Verfahren praktisch nicht kleiner wie bei den vollständigen Verfahren,
- die Rechenergebnisse weichen merklich von den mit den vollständigen Verfahren erzielten Ergebnissen ab.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß bei Verwendung von linearisierten impliziten Differenzenverfahren die Anwendung vereinfachter Verfahren, die durch Vernachlässigung der Trägheitsglieder in der dynamischen Gleichung gewonnen werden, gegenüber den vollständigen Verfahren keine Vorteile bringt. Siehe hierzu z.B. Preissmann /22/.

7. INSTATIONÄRE ABFLÜSSE MIT "MITTENSTÖRUNG"

7.1 Charakteristikenverfahren

Als "Mittenstörung" wird bei einfachen Gerinnen ohne Verzweigung ein örtlich begrenzter seitlicher Zufluß oder Abfluß bezeichnet, hervorgerufen z.B. durch ein Kraftwerk, eine Schleuse, einen Nebenfluß etc.. Für die Berechnung einer solchen "Mittenstörung" wird der Impulssatz für instationären Abfluß zusammen mit der Kontinuitätsgleichung verwendet. Siehe hierzu McLaughlin u.a. /21/.

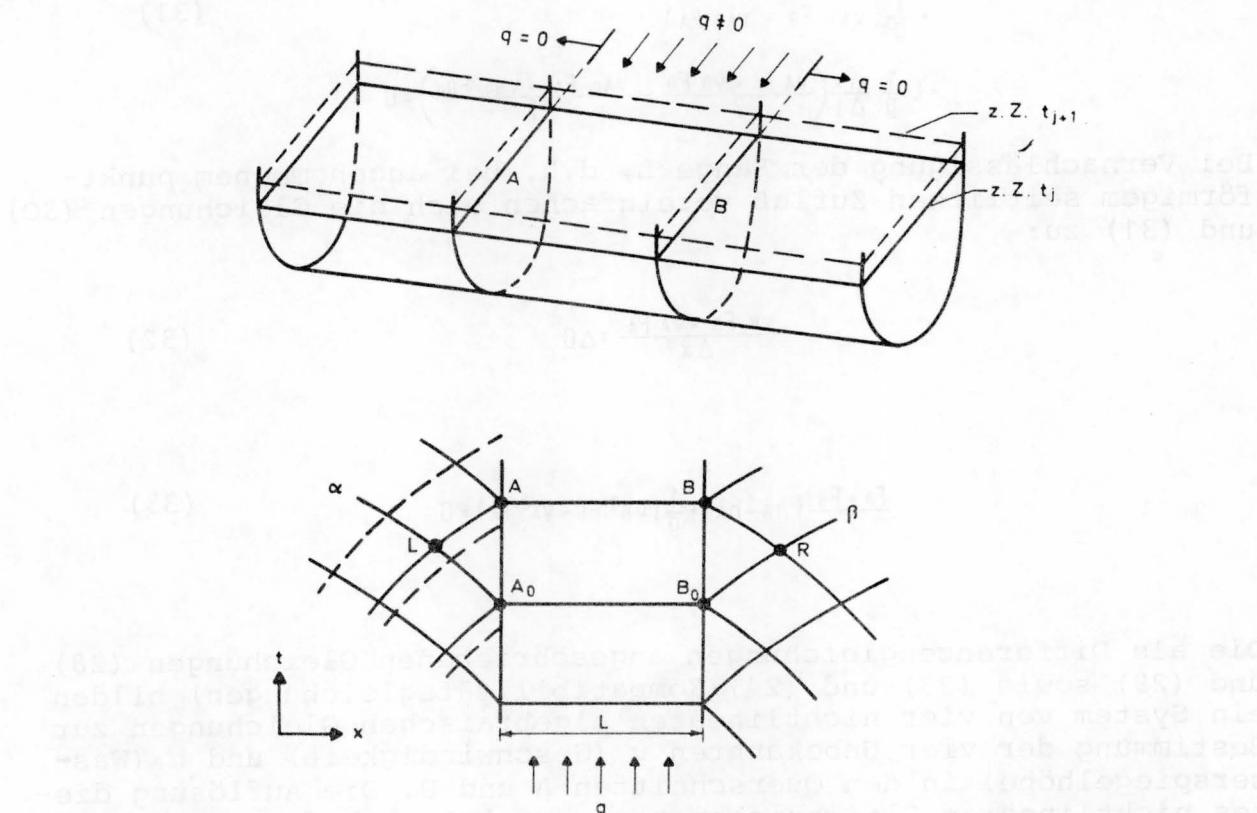


Abb. 34 Abfluß mit "Mittenstörung", Bezeichnungen, Verlauf der Charakteristiken

Für das Kontrollvolumen A - B in Abb. 34 wird die Kontinuitätsgleichung und der Impulssatz für instationären Abfluß angewendet:

Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + B \frac{\partial h}{\partial t} = q = \frac{\Delta Q}{L} \quad (28)$$

Impulssatz:

$$-\gamma F dh - \gamma F \frac{v_A | v_A |}{k^2 R_0^{4/3}} dx = \rho d(Fv^2) + \rho \frac{d}{dt}(v \cdot F \cdot dx) \quad (29)$$

Daraus ergeben sich folgende Differenzengleichungen:

$$\frac{v_B \cdot F_B - v_A \cdot F_A}{\Delta x} + L \frac{B_B + B_A}{2} \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{h_B + h_A}{2} - \frac{h_{B0} + h_{A0}}{2} \right) = \Delta Q \quad (30)$$

$$\begin{aligned} & \frac{F_A + F_B}{2} (h_B - h_A) \\ & + L \frac{F_A + F_B}{2} \frac{1}{2} \left(\frac{v_A | v_A |}{k^2 R_0 A^{4/3}} + \frac{v_B | v_B |}{k^2 R_0 B^{4/3}} \right) \\ & + \frac{1}{g} (v_B^2 F_B - v_A^2 F_A) \\ & + L \frac{1}{g} \frac{\Delta x}{\Delta t} \left(\frac{v_A F_A + v_B F_B}{2} - \frac{v_{A0} F_{A0} + v_{B0} F_{B0}}{2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

Bei Vernachlässigung der Länge L, d.h. bei angenommenem punktförmigem seitlichen Zufluß vereinfachen sich die Gleichungen (30) und (31) zu:

$$\frac{v_B F_B - v_A F_A}{\Delta x} = \Delta Q \quad (32)$$

$$\frac{F_A + F_B}{2} (h_B - h_A) + \frac{1}{g} (v_B^2 F_B - v_A^2 F_A) = 0 \quad (33)$$

Die als Differenzengleichungen angeschriebenen Gleichungen (28) und (29) sowie (23) und (24) (Kompatibilitätsgleichungen) bilden ein System von vier nichtlinearen algebraischen Gleichungen zur Bestimmung der vier Unbekannten v (Geschwindigkeit) und h (Wasserspiegelhöhe) in den Querschnitten A und B. Die Auflösung dieses nichtlinearen Gleichungssystems erfolgt nach der Methode von Newton-Raphson. Das innerhalb dieses Verfahrens zu lösende lineare Gleichungssystem wird nach Gauß-Jacobi gelöst. Siehe hierzu Carnahan u.a. /6/.

Bei der Berechnung wird im einzelnen wie folgt vorgegangen:

- Es wird angenommen, daß die Zeit für die beiden Punkte A und B gleich ist: $t_A = t_B$.
- Wenn z.B. aus dem vorhergehenden Rechenschritt die Charakteristik β (durch die Punkte A_0, B_0, R) bekannt ist, wird mittels

der Gleichung für die Rückwärtscharakteristik (26) die Zeit $t_B = t_A$ berechnet.

- Mittels der Gleichung für die Vorwärtscharakteristik (25) werden solange die in Abb. 34 gestrichelt eingezeichneten Charakteristiken berechnet, bis die zwei dem Punkt A benachbarten Charakteristiken gefunden sind.
- Die Lage des Punktes L (in Abb. 34) wird sodann durch Interpolation auf der Charakteristik α zwischen den beiden benachbarten Punkten 1 und 2 ermittelt.
- Mit dem Verfahren nach Newton-Raphson werden die Unbekannten v_A, h_A, v_B, h_B aus den Gleichungen (23), (24), (28), (29) berechnet.
- Mit den nun bekannten Werten in A und B werden die Zeit $t_A = t_B$ sowie die Lage von L überprüft. Bei zu großen Abweichungen zu den vorherigen Ergebnissen wird das Verfahren gegebenenfalls wiederholt, bis die Werte $t_A = t_B, x_L, v_A, h_A, v_B, h_B$ mit der gewünschten Genauigkeit berechnet sind.

Bei Vernachlässigung der Länge L, d.h. bei der Annahme, daß die Profile A und B zusammenfallen ergibt sich mit den entsprechenden vereinfachten Gleichungen (28) und (29) ein analoges Verfahren.

Rechts und links der "Mittenstörung" wird das bereits beschriebene Charakteristikenverfahren mit veränderlichem Netz verwendet.

7.2 Implizites Differenzenverfahren

Bei dem impliziten Differenzenverfahren wurden zwei Methoden zur Berücksichtigung der Mittenstörung verwendet:

- Ein Verfahren analog demjenigen mit Charakteristiken mit veränderlichem Netz, mit dem Unterschied, daß hier geradlinige Charakteristiken in einem festen Netz verwendet werden. Dieses Verfahren hat den Nachteil, daß die COURANT-Bedingung eingehalten werden muß und somit der Vorteil des impliziten Verfahrens, nämlich Wahl großer Zeitschritte Δt wegfällt.
- Berücksichtigung des seitlichen Zuflusses in den SV-Gleichungen (4) und (5).

Die SV-Gleichungen mit seitlichem Zufluß q (m^3/s) lauten:

$$v \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial v}{\partial t} + F \frac{\partial v}{\partial x} = -v \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_h + \frac{q}{B} \quad (4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = -g \frac{v|v|}{k^2 R_a^{4/3}} - \frac{qv}{F} \quad (5)$$

In den Differenzengleichungen (14), (15), (16), (17) ändern sich folgende Koeffizienten:

$$X V_{(2i)} \leftarrow X V_{(2i)} + \frac{4q \Delta x}{B_{(i)} + B_{(i+1)}}$$

$$\alpha_{(2i+1,2)} \leftarrow \alpha_{(2i+1,2)} + \frac{q \Delta x}{g(F_{(i)} + F_{(i+1)})} \quad (34)$$

$$\alpha_{(2i+1,4)} \leftarrow \alpha_{(2i+1,4)} + \frac{q \Delta x}{g(F_{(i)} + F_{(i+1)})}$$

Für $q \cdot \Delta x$ ergibt sich:

$$q \Delta x = \int_{x_i}^{x_{i+1}} q(x) dx \quad (35)$$

Die Form des Gleichungssystems (18) wird dabei nicht verändert. Es kann nach wie vor mit der Prozedur BANDSOLVE gelöst werden.

7.3 Testrechnungen "Feudenheim"

Bei der Vorbereitung des Baus der Ersatzschleuse Feudenheim im Zuge der Neckarkanalisierung wurden im Seitenkanal Ladenburg (siehe Abb. 35) Schwall- und Sunkmessungen durchgeführt (siehe /27/). Diese Messungen wurden mit den verschiedenen Verfahren nachgerechnet um die mathematischen Modelle zu verifizieren und die Rechenverfahren untereinander zu vergleichen, (siehe Dorer und Lie /9/).

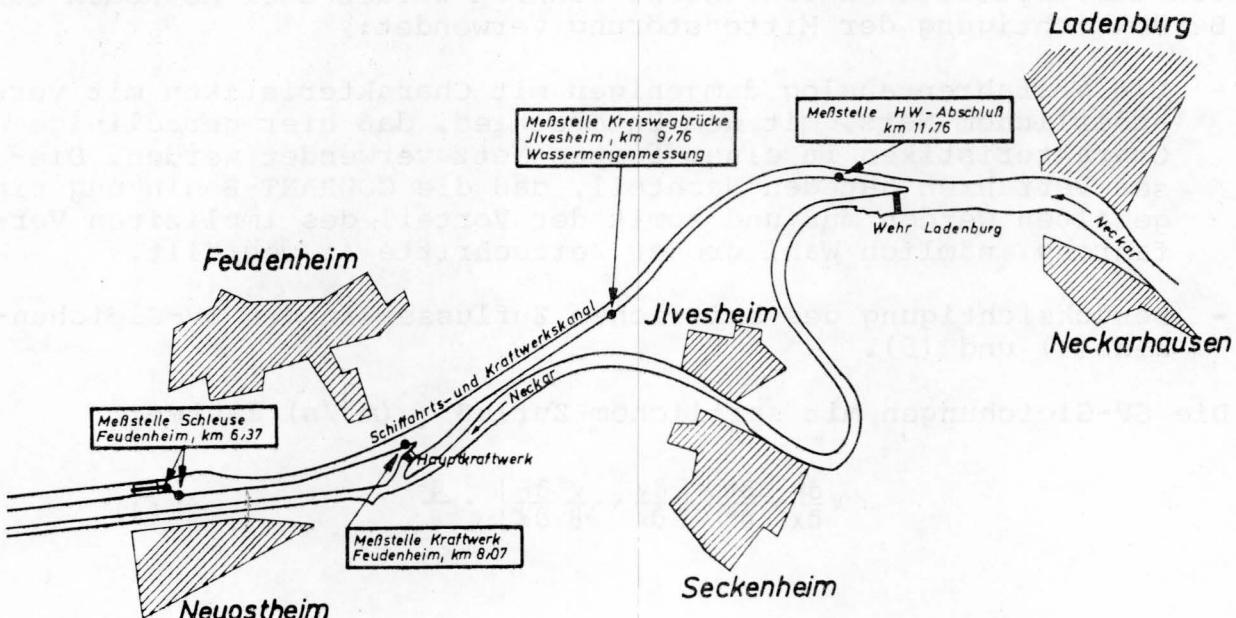


Abb. 35 Übersichtslageplan mit Lage der Meßstellen für die Schwallmessungen im Seitenkanal Ladenburg/Neckar

Bei den am 07.06.1970 durchgeführten Schwallmessungen wurden mit den bestehenden Doppelschleusen sowie mit dem Kraftwerk die in Abb. 36 angegebenen Abflußänderungen durchgeführt. Die an den einzelnen Meßpunkten festgestellten Wasserspiegellagen sind in Abb. 37 dargestellt.

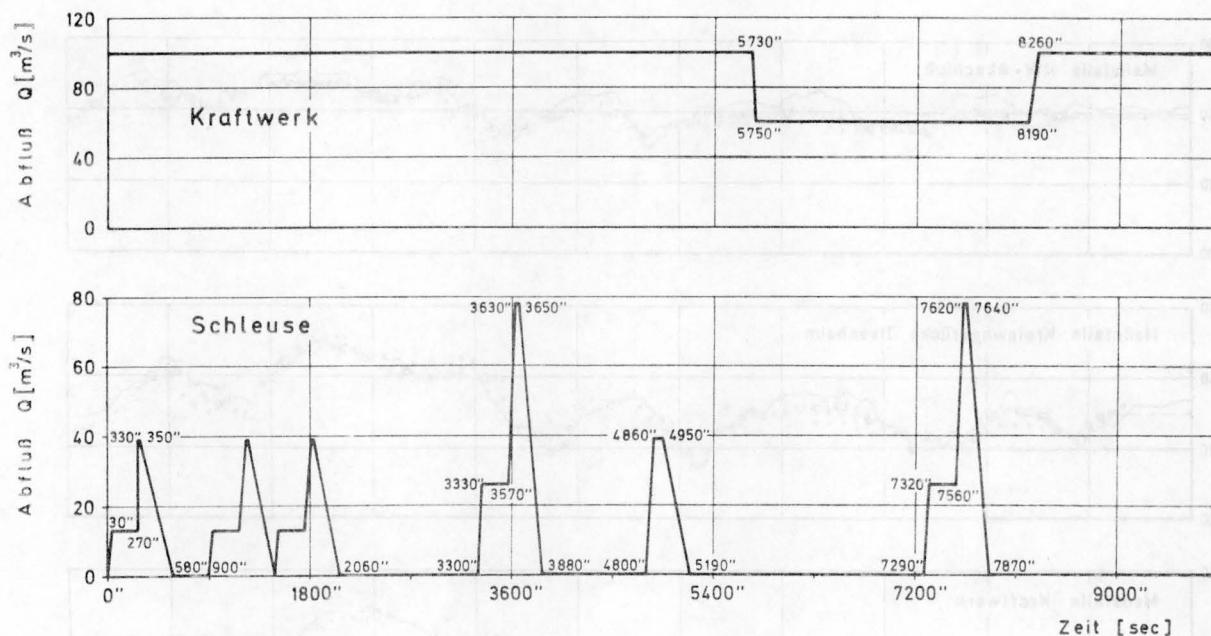


Abb. 36 Betriebsdiagramm für Kraftwerk und Schleusen bei den Schwallmessungen am 07.06.1970

Das mathematische Modell erstreckte sich von der Einmündung des Seitenkanals in den Neckar beim Wehr Ladenburg bis zu den Schleusen bei Feudenheim über eine Länge von 5900 m. Als Maschenweite Δx wurden 50 m gewählt.

Der für das ganze Modell einheitlich angenommene k -Wert wurde aufgrund von Rückrechnungen bei stationärem Kraftwerksbetrieb zu $k = 45$ festgelegt.

Als Randbedingungen wurden an den Schleusen Feudenheim sowie am Kraftwerk Ladenburg die in Abb. 36 angegebenen Abflüsse verwendet, am Wehr Ladenburg wurde konstante Wasserspiegelhöhe angenommen.

Für die Nachrechnung der Naturmessungen wurden vier verschiedene Rechenschemata verwendet:

- Rechenschema 1 : Charakteristikenverfahren mit veränderlichem Netz, "Mittenstörung" nach Gleichungen (30) und (31) berücksichtigt.
- Rechenschema 2 : Wie Schema 1, aber mit den vereinfachten Gleichungen (32) und (33). ($L = 0$ in Abb. 34).

- Rechenschema 3 : Implizites Differenzenverfahren, "Mittenstörung" durch Charakteristiken mit festem Netz berücksichtigt.
- Rechenschema 4 : Implizites Differenzenverfahren, "Mittenstörung" in den Grundgleichungen (4) und (5).

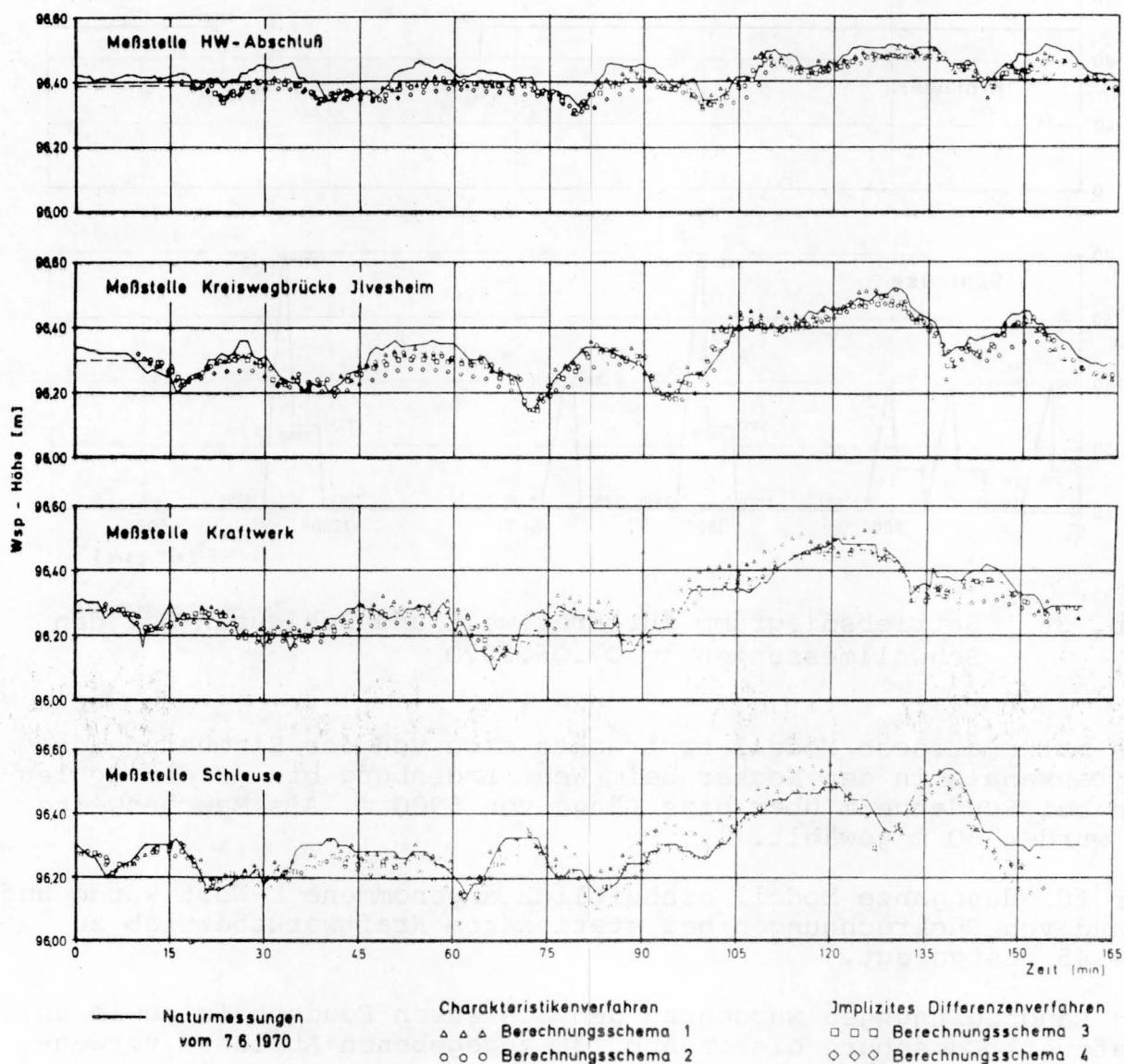


Abb. 37 Gemessener und berechneter zeitlicher Wasserspiegelverlauf

Die in Abb. 37 dargestellten mit den verschiedenen Rechenschemata gewonnenen Wasserspiegelhöhen zeigen, daß mit dem Rechenschema 4 (reines implizites Differenzenverfahren) im Vergleich zum Rechenschema 1 (Charakteristiken mit veränderlichem Netz) durchaus befriedigende Ergebnisse erzielt werden können.

Zur Ermittlung des Einflusses der geplanten Ersatzschleuse Feudenheim auf die Abflußverhältnisse im Seitenkanal Ladenburg, vor allem aber zur Überprüfung, ob Kraftwerk und Schleusen auch wei-

terhin ihren Betrieb unabhängig voneinander gestalten können, wurden mit dem mathematischen Modell und den Rechenschemata 1 und 4 eine Reihe möglicher Betriebsfälle durchgerechnet.

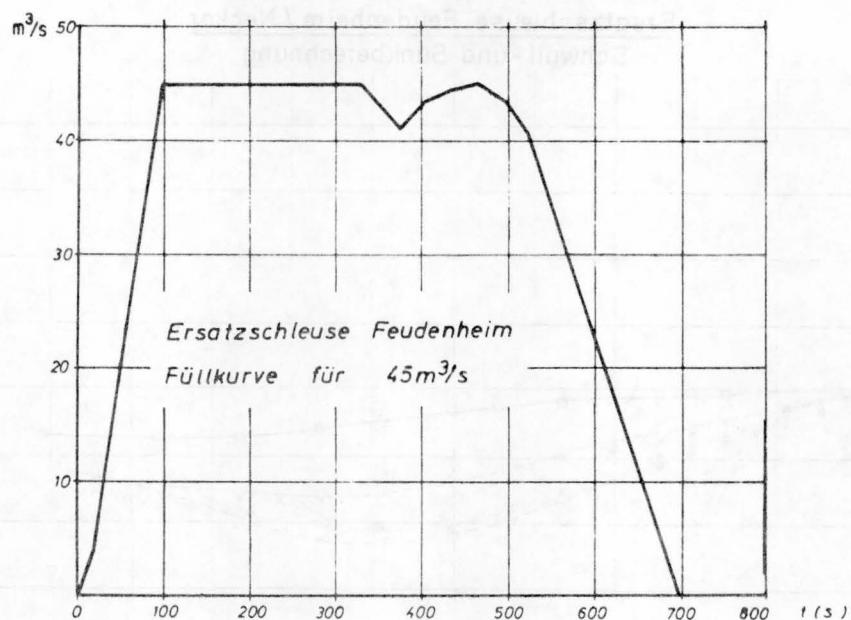


Abb. 38 Füllkurve für die Ersatzschleuse Feudenheim, max. Fülldurchfluß $Q = 45 \text{ m}^3/\text{s}$

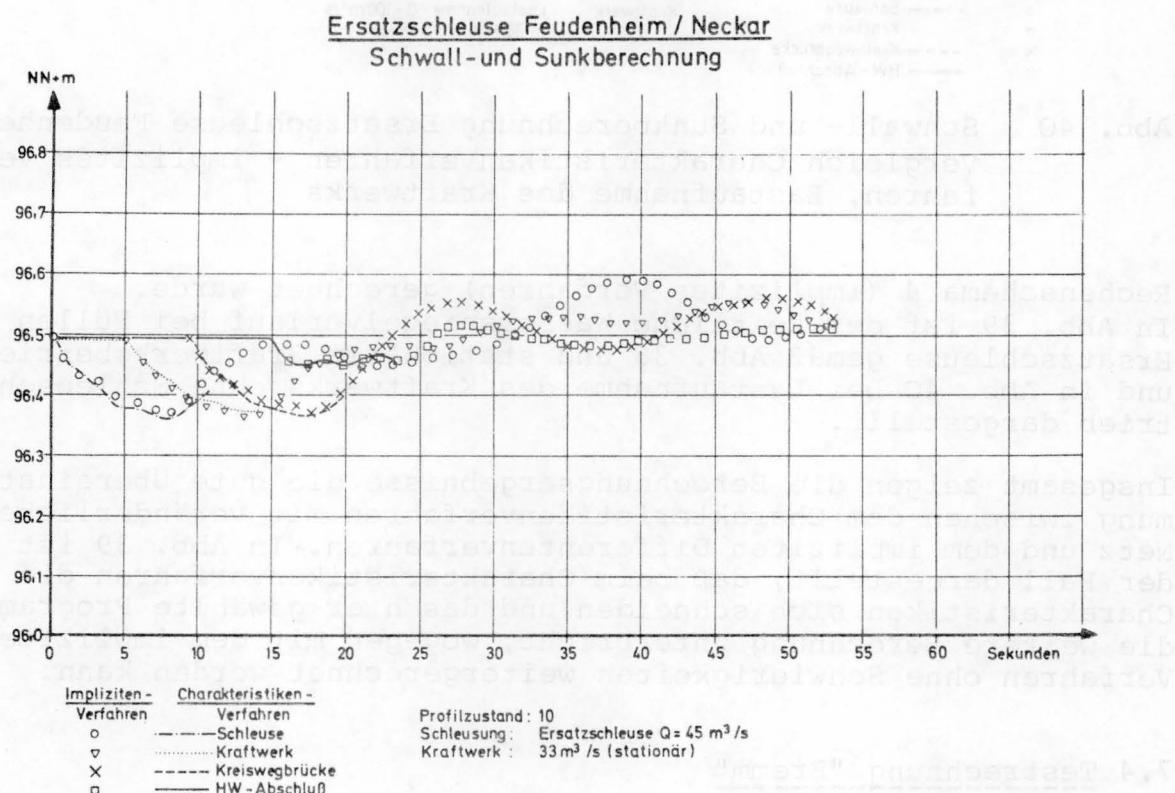


Abb. 39 Schwall- und Sunkberechnung Ersatzschleuse Feudenheim, Vergleich Charakteristikenverfahren - implizites Verfahren, Füllen der Ersatzschleuse

Als Beispiel sind in den Abb. 39 und 40 die Ergebnisse zweier Rechenläufe dargestellt, wobei jeweils sowohl mit Rechenschema 1 (Charakteristiken mit veränderlichem Netz) als auch mit dem

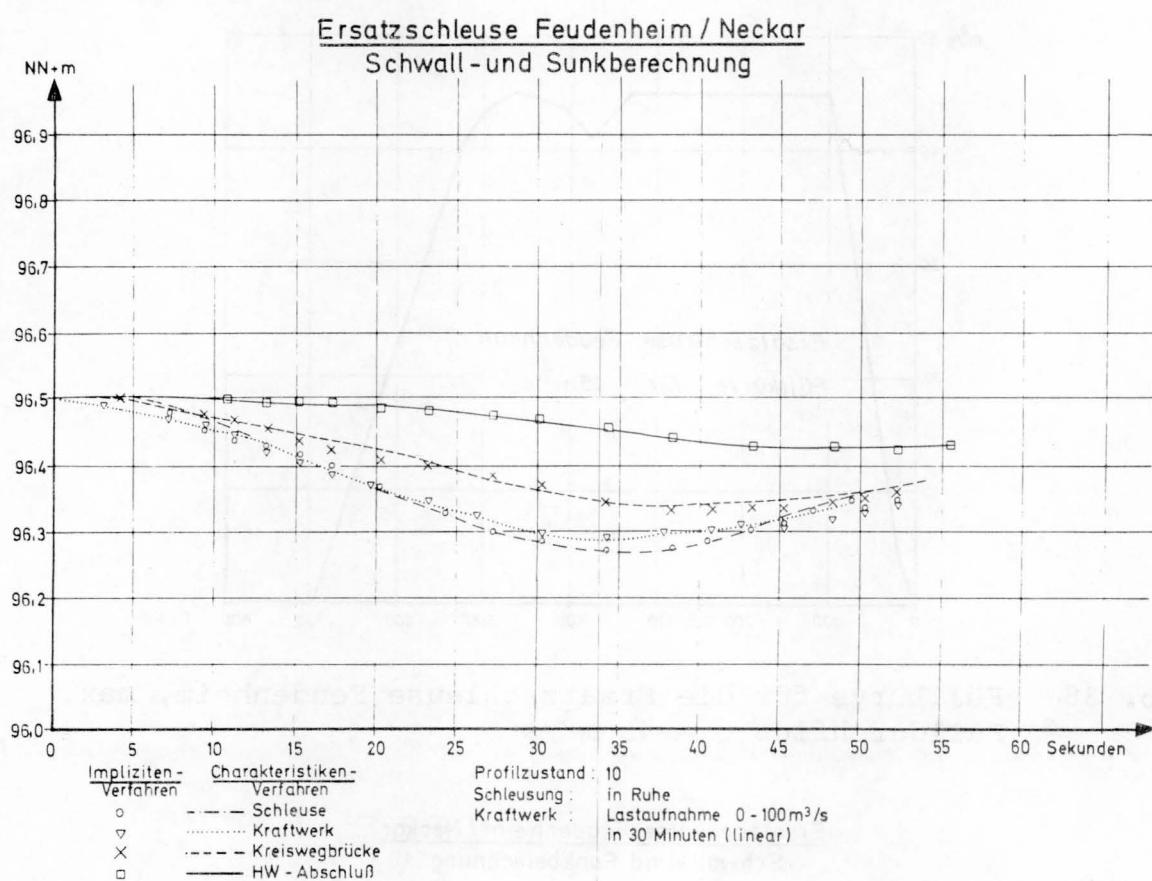


Abb. 40 Schwall- und Sunkberechnung Ersatzschleuse Feudenheim, Vergleich Charakteristikenverfahren - implizites Verfahren, Lastaufnahme des Kraftwerks

Rechenschema 4 (implizites Verfahren) gerechnet wurde. In Abb. 39 ist der zeitliche Wasserspiegelverlauf bei Füllen der Ersatzschleuse gemäß Abb. 38 und stationärem Kraftwerksbetrieb und in Abb. 40 bei Lastaufnahme des Kraftwerks ohne Schleusenbetrieb dargestellt.

Insgesamt zeigen die Berechnungsergebnisse die gute Übereinstimmung zwischen dem Charakteristikenverfahren mit veränderlichem Netz und dem impliziten Differenzenverfahren. In Abb. 39 ist der Fall dargestellt, daß beim Charakteristikenverfahren die Charakteristiken sich schneiden und das hier gewählte Programm die weitere Berechnung unterbricht, wogegen mit dem impliziten Verfahren ohne Schwierigkeiten weitergerechnet werden kann.

7.4 Testrechnung "Bremm"

Im Zuge der Planung eines bei Bremm an der Mosel vorgesehenen Langzeitpumpspeicherwerks wurden Untersuchungen durchgeführt sowohl im physikalischen als auch im mathematischen Modell:

- Im physikalischen Modell im Maßstab 1:66 2/3, das sich von der Staustufe St. Aldegund bis etwa Mosel-km 72,0 erstreckte, wurde das Entnahme-Rückgabebauwerk untersucht, (siehe Abb. 42).

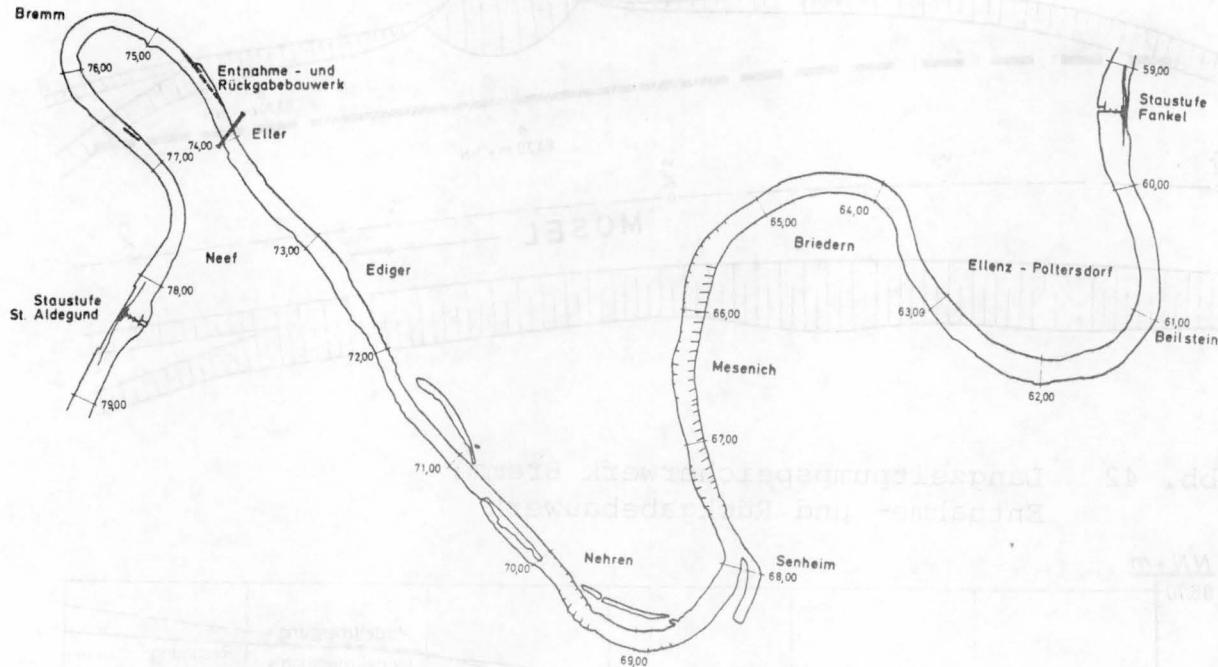


Abb. 41 Langzeitpumpspeicherwerk Bremm:
Übersichtslageplan Stauhaltung Fankel/Mosel

Gleichzeitig wurden in diesem Modell auch verschiedene instationäre Abflußvorgänge gefahren, die zur Verifizierung des mathematischen Modells herangezogen wurden.

- Im mathematischen Modell, das sich über die gesamte Haltung Fankel erstreckte, wurde der zeitliche Verlauf von Wasserspiegelhöhe und Geschwindigkeit in der Stauhaltung sowie der zeitliche Verlauf des Abflusses am Wehr Fankel ermittelt, bei Betrieb des Pumpspeicherwerks (Anfahren Turbinen, Anfahren Pumpen, Übergang Pumpen-Turbinen etc.), um Unterlagen zu erhalten zur Beurteilung des Einflusses des Pumpspeicherwerks auf die Schiffahrt.

Das mathematische Modell erstreckte sich von Mosel-km 59.7 bis 78.0. Zwischen Mosel-km 59.7 und 69.9 wurden Profilabstände von $\Delta x = 200$ m gewählt, oberhalb Mosel-km 69.9 von $\Delta x = 100$ m.

Die Rückrechnung der k -Werte erfolgte zwischen der Staustufe Fankel und Mosel-km 73.0 aufgrund einer Wasserspiegelfixierung in der Natur bei einem Beharrungsabfluß von $Q = 83 \text{ m}^3/\text{s}$. Im Bereich des physikalischen Modells wurde eine Wasserspiegelmesung im Modell bei $Q = 145 \text{ m}^3/\text{s}$ verwendet.

Folgende Randbedingungen wurden angenommen:

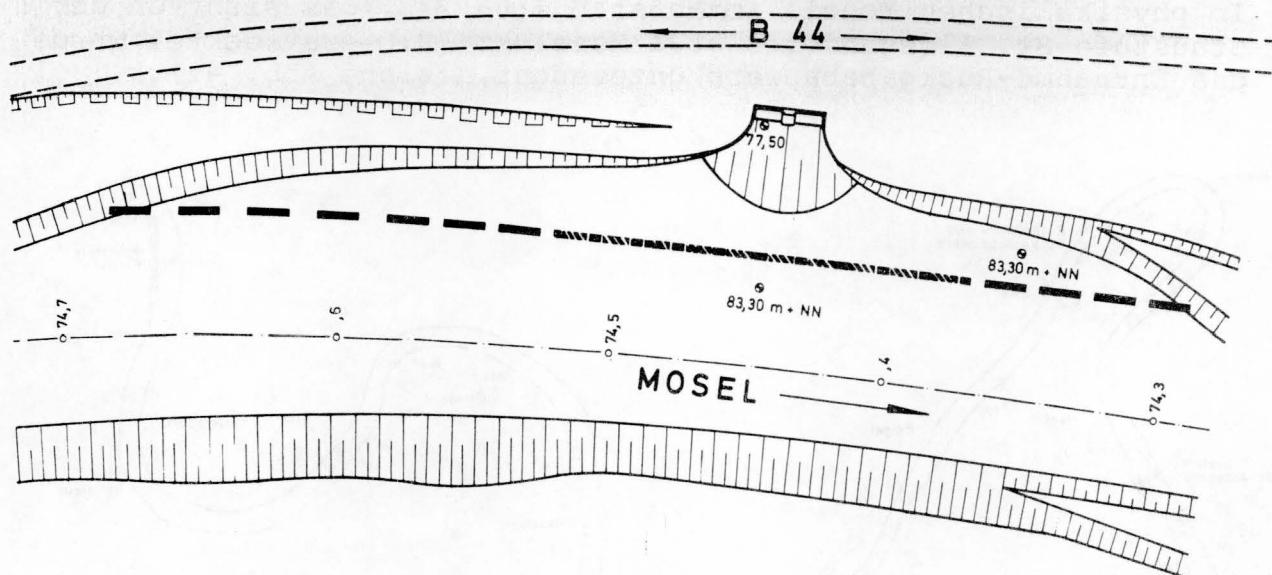


Abb. 42 Langzeitpumpspeicherwerk Bremm:
Entnahmee- und Rückgabebauwerk

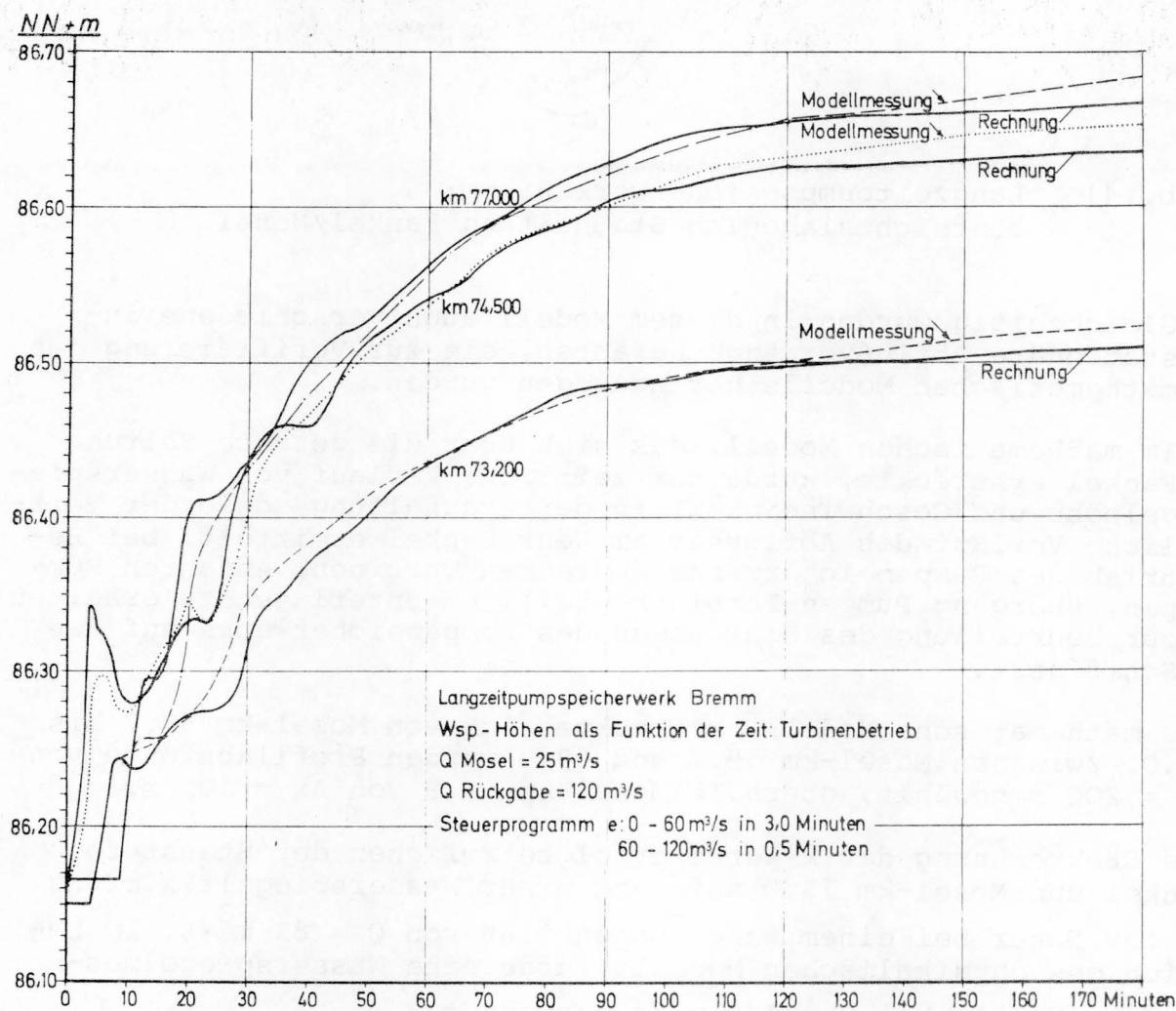


Abb. 43 Langzeitpumpspeicherwerk Bremm: Verifizierung des
mathematischen Modells, Vergleich der Wasserspiegel-
höhen

- An der Staustufe Fankel konstante Wasserspiegelhöhe auf Stauziel,
- an der Staustufe St. Aldegund betriebsbedingter Zufluß von oben bzw. $v = 0$,
- am Entnahmee- und Rückgabebauwerk die sich bei den einzelnen Betriebsfällen ergebenden Abflüsse.

Als Berechnungsverfahren wurde ein implizites Differenzenverfahren verwendet. Die "Mittenstörung" wurde nach dem Rechenschema 4 (s.o.) berücksichtigt. Die Zeitschritte Δt wurden zwischen 30 s und 360 s angenommen und innerhalb eines Rechenlaufs zur Einsparung von Rechenzeit jeweils den Abflußbedingungen angepaßt.

Die Ergebnisse der Nachrechnung eines im physikalischen Modell gefahrenen Betriebsfalls sind in den Abb. 43 und 44 dargestellt. Es ergab sich eine zufriedenstellende Übereinstimmung zwischen Rechnung und Messung.

Modellversuche Langzeitpumpspeicherwerk Bremm M.1:66,66

Geschwindigkeiten in der Fahrinnenachse bei Fluß-km 74,1 und 75,0 als Funktion der Zeit
gesteuertes Öffnen beim Turbinenbetrieb

$$Q \text{ Mosel} = 25 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$Q \text{ Rückgabe} = 120 \text{ m}^3/\text{s}$$

Steuerprogramm e

Bauwerksform 3

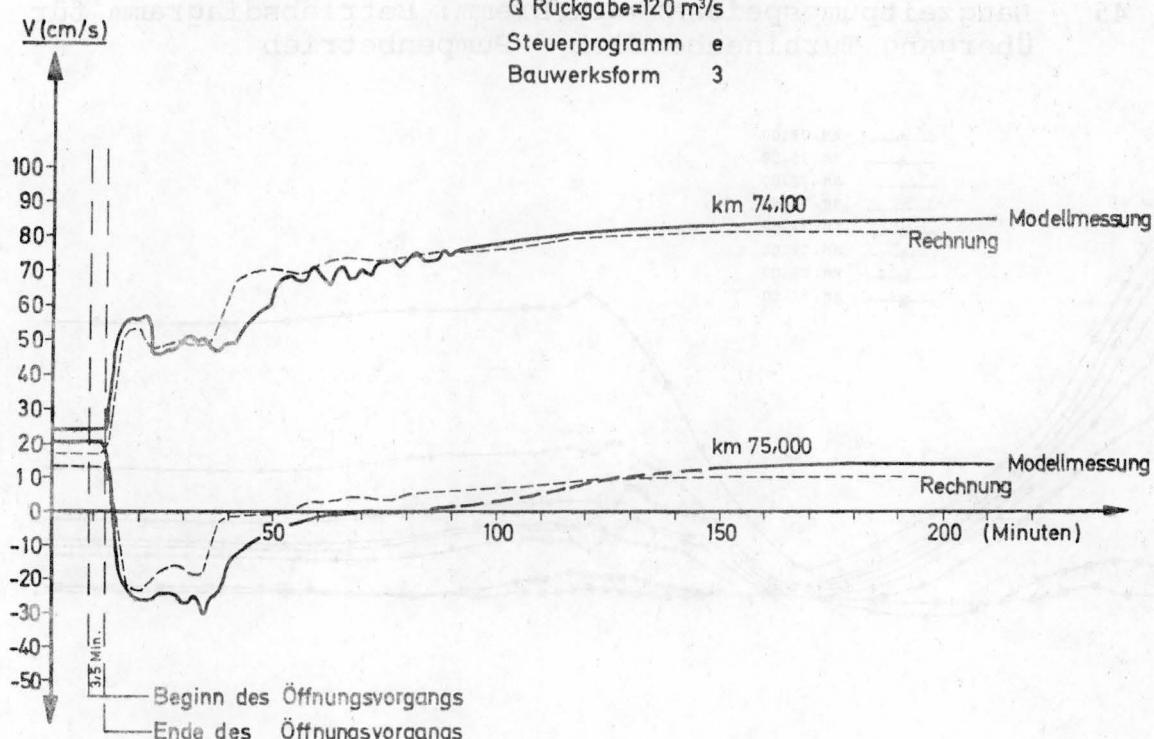


Abb. 44 Langzeitpumpspeicherwerk Bremm: Verifizierung des mathematischen Modells, Vergleich der Fließgeschwindigkeiten

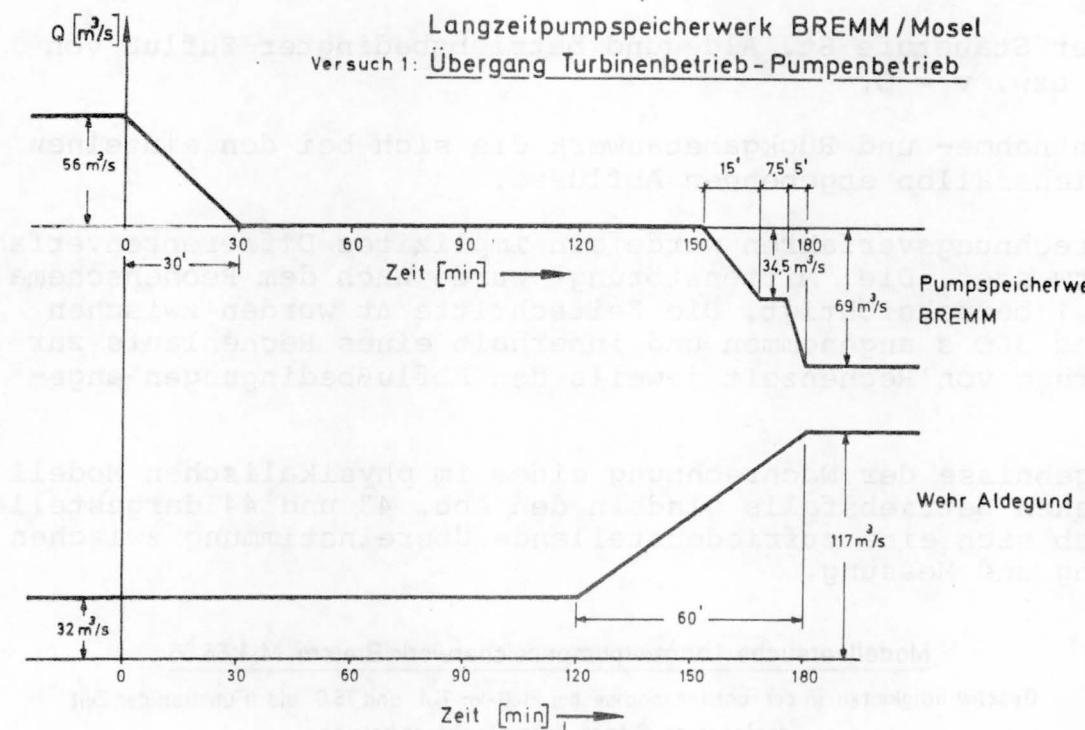


Abb. 45 Langzeitpumpspeicherwerk Bremm: Betriebsdiagramm für Übergang Turbinenbetrieb - Pumpenbetrieb

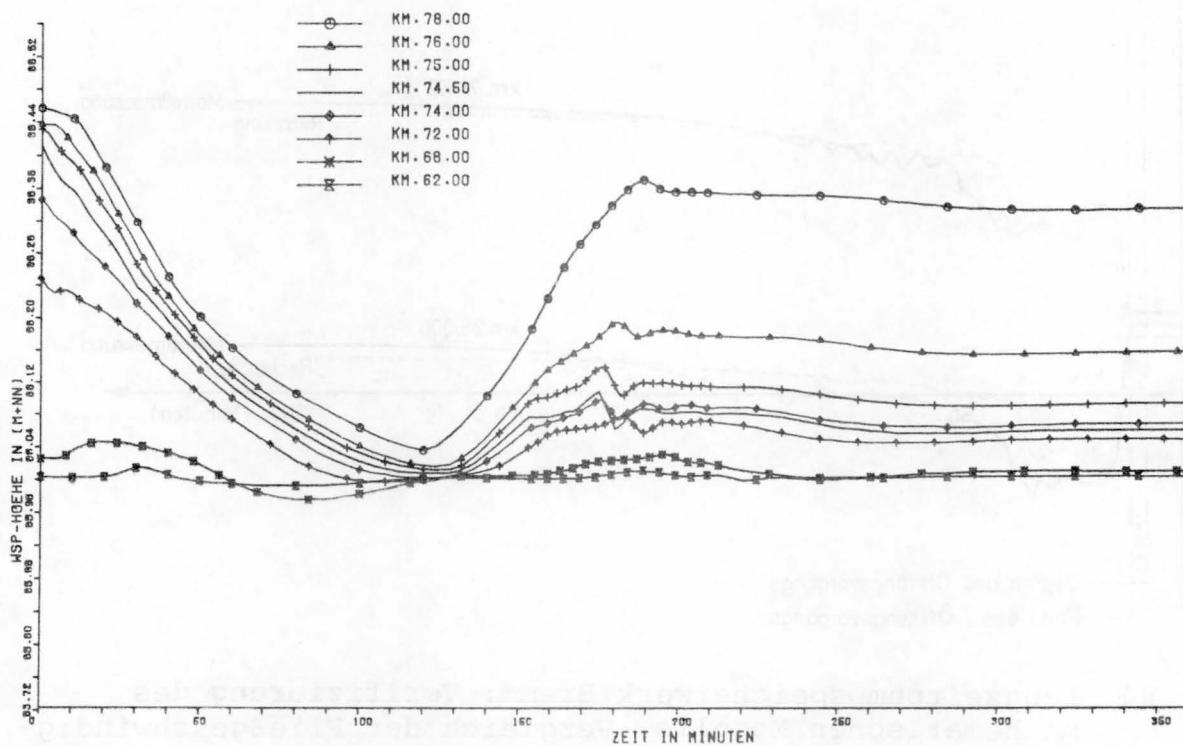


Abb. 46 Langzeitpumpspeicherwerk Bremm: Übergang Turbinenbetrieb - Pumpenbetrieb, zeitlicher Wasserspiegelverlauf

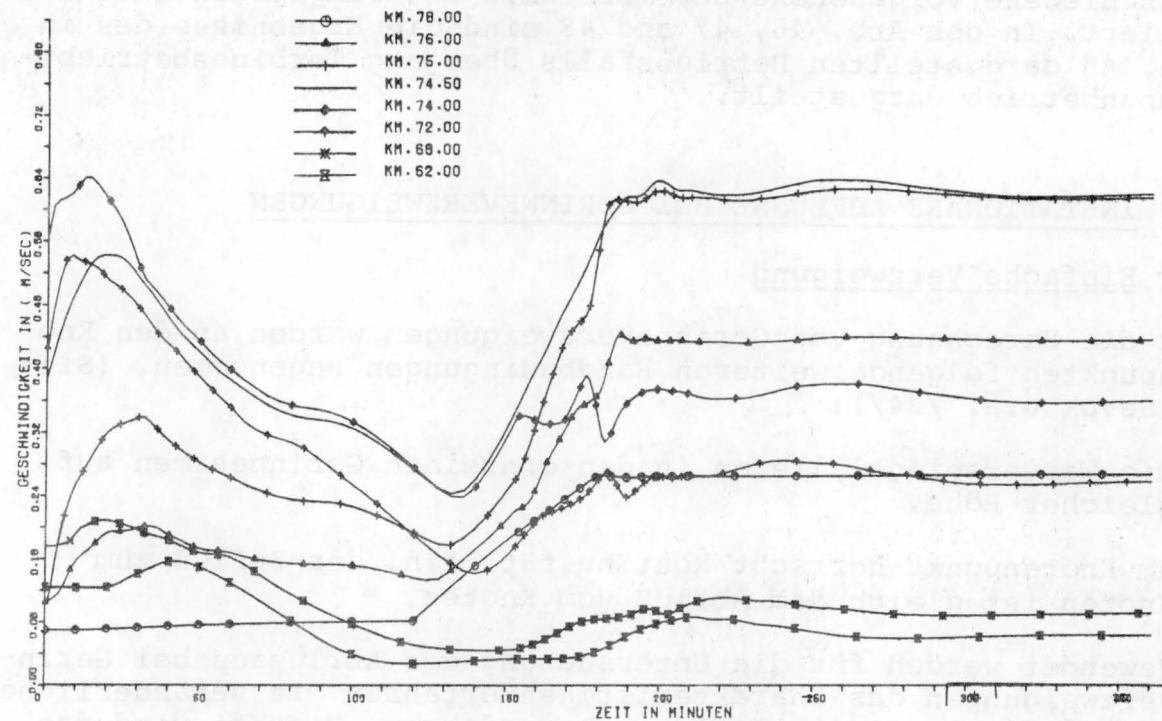


Abb. 47 Langzeitpumpspeicherwerk Bremm: Übergang Turbinenbetrieb - Pumpenbetrieb, zeitlicher Geschwindigkeitsverlauf

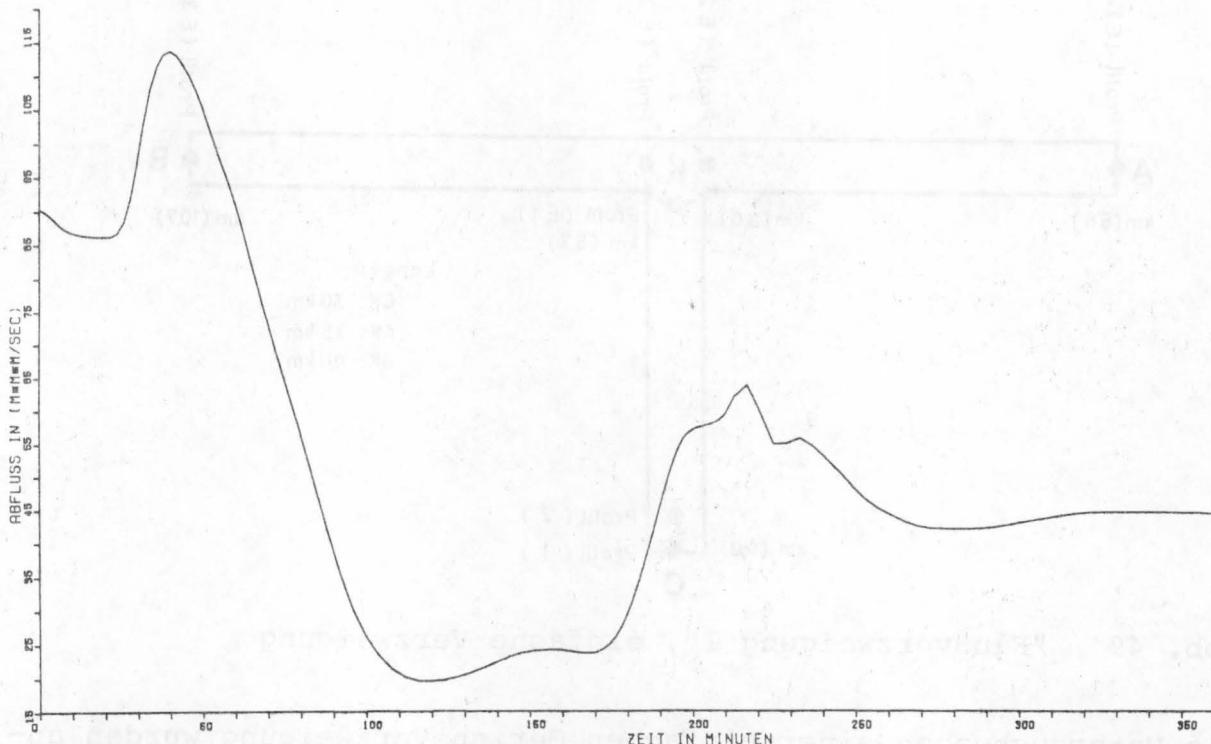


Abb. 48 Langzeitpumpspeicherwerk Bremm: Übergang Turbinenbetrieb - Pumpenbetrieb, zeitlicher Abflußverlauf an der Staustufe Fankel

Um den Einfluß des Betriebs des Pumpspeicherwerks auf die Schiffsfahrt beurteilen zu können, wurden mit dem mathematischen Modell verschiedene vorgesehene Betriebsfälle des Pumpspeicherwerks simuliert. In den Abb. 46, 47 und 48 sind die Ergebnisse des in Abb. 45 dargestellten Betriebsfalls Übergang Turbinenbetrieb - Pumpenbetrieb dargestellt.

8. INSTATIONÄRE ABFLÜSSE BEI GERINNEVERZWEIGUNGEN

8.1 Einfache Verzweigung

Für die Berechnung von Gerinneverzweigungen werden an den Knotenpunkten folgende weiteren Randbedingungen angenommen. (Siehe Sevuk u.a. /24/):

- Die Wasserspiegel liegen in den einzelnen Gerinnearmen auf gleicher Höhe,
- am Knotenpunkt herrscht Kontinuität, d.h. der Zufluß zum Knoten ist gleich dem Abfluß vom Knoten.

Angewendet werden für die Untersuchung des Abflusses bei Gerinneverzweigungen das Charakteristikenverfahren mit veränderlichem Netz und das implizite Differenzenverfahren. Hierbei wird das Charakteristikenverfahren wie bereits früher erwähnt als sog. "Referenzverfahren" benötigt zur Beurteilung der Güte des impliziten Verfahrens.

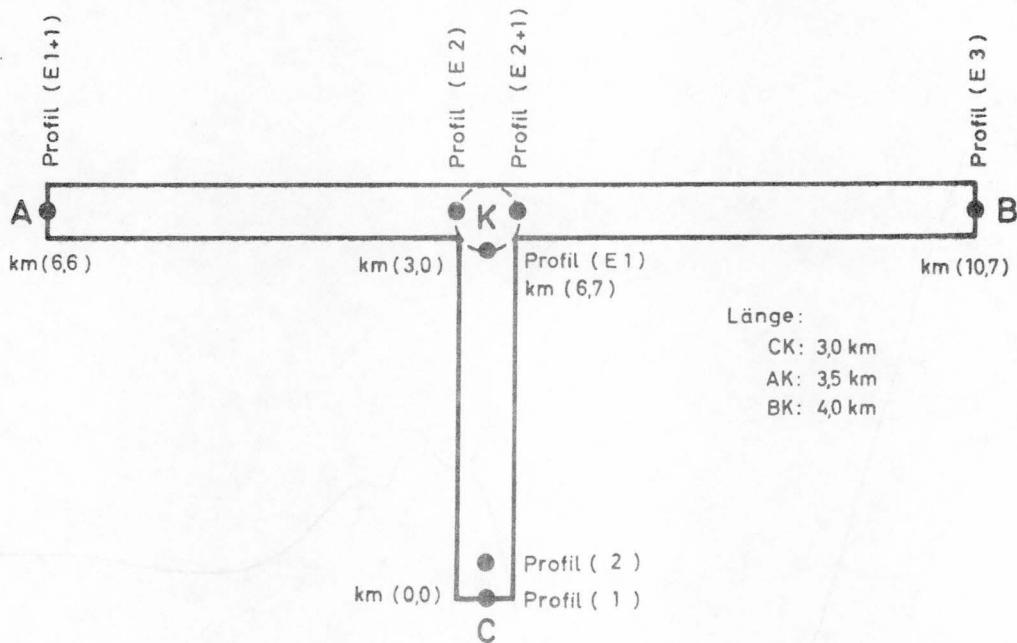


Abb. 49 "Flußverzweigung I", einfache Verzweigung

Die Untersuchungen einer einfachen Gerinneverzweigung wurden anhand des in Abb. 49 dargestellten Beispiels durchgeführt, das aus horizontalen Gerinneabschnitten mit Rechteckquerschnitt besteht.

Als Randbedingungen werden angenommen:

$$\text{Rand A : } h = \text{const.}$$

$$\text{Rand B : } \text{Störung } h = h(t)$$

$$\text{Rand C : } Q = \text{const.}$$

Im Verzweigungspunkt K gilt weiterhin:

$$h(E1) = h(E2 + 1) \quad (36)$$

$$h(E2) = h(E2 + 1) \quad (37)$$

$$Q(E1) + Q(E2) - Q(E2 + 1) = 0 \quad (38)$$

8.1.1 Charakteristikenverfahren mit veränderlichem Netz

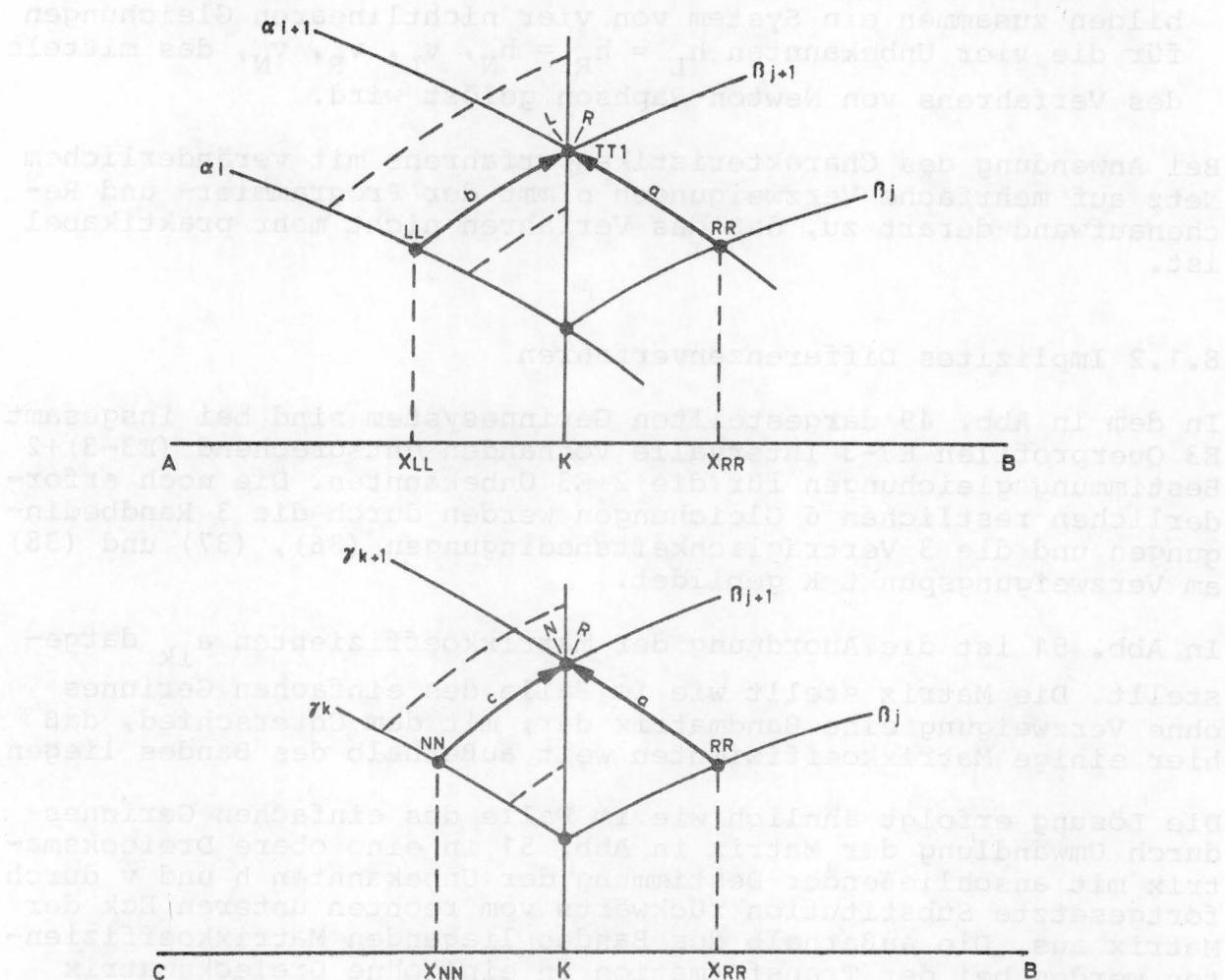


Abb. 50 Charakteristiken im Verzweigungspunkt K (siehe Abb. 49)

Ausgangsgleichungen für das Charakteristikenverfahren sind die Gleichungen (23) bis (26), die für die einzelnen Gerinneabschnitte AK, BK und CK gelten. Die Unbekannten v und h im Knotenpunkt K werden unter Verwendung der Knotengleichungen (36) bis (38) in

ähnlicher Weise ermittelt, wie bereits früher bei der "Mittenstörung" beschrieben:

- Ausgehend von den bekannten Charakteristiken $\alpha_i, \beta_j, \gamma_k$ wird vom bekannten Punkt RR auf β_j aus zunächst die Zeit TT1 im Punkt L=R=N berechnet mittels der Rückwärtscharakteristik α_{i+1} (siehe Abb. 50).
- Nachdem die in Abb. 50 gestrichelt eingezeichneten dem Punkt L=R=N jeweils benachbarten Charakteristiken bestimmt sind, werden die Punkte LL und NN auf den bekannten Charakteristiken α_i und γ_k durch Interpolation bestimmt.
- Die Gleichungen (23/24) für die Charakteristiken $\alpha_{i+1}, \beta_{j+1}, \gamma_{k+1}$ sowie die Kontinuitätsbedingung (38) für den Knoten K bilden zusammen ein System von vier nichtlinearen Gleichungen für die vier Unbekannten $h_L = h_R = h_N, v_L, v_R, v_N$, das mittels des Verfahrens von Newton-Raphson gelöst wird.

Bei Anwendung des Charakteristikenverfahrens mit veränderlichem Netz auf mehrfache Verzweigungen nimmt der Programmier- und Rechenaufwand derart zu, daß das Verfahren nicht mehr praktikabel ist.

8.1.2 Implizites Differenzenverfahren

In dem in Abb. 49 dargestellten Gerinnesystem sind bei insgesamt E3 Querprofilen E3-3 Intervalle vorhanden entsprechend $(E3-3)+2$ Bestimmungsgleichungen für die $2+E3$ Unbekannten. Die noch erforderlichen restlichen 6 Gleichungen werden durch die 3 Randbedingungen und die 3 Verträglichkeitsbedingungen (36), (37) und (38) am Verzweigungspunkt K gebildet.

In Abb. 51 ist die Anordnung der Matrixkoeffizienten a_{ik} dargestellt. Die Matrix stellt wie im Falle des einfachen Gerinnes ohne Verzweigung eine Bandmatrix dar, mit dem Unterschied, daß hier einige Matrixkoeffizienten weit außerhalb des Bandes liegen.

Die Lösung erfolgt ähnlich wie im Falle des einfachen Gerinnes durch Umwandlung der Matrix in Abb. 51 in eine obere Dreiecksmatrix mit anschließender Bestimmung der Unbekannten h und v durch fortgesetzte Substitution rückwärts vom rechten unteren Eck der Matrix aus. Die außerhalb des Bandes liegenden Matrixkoeffizienten werden bei der Transformation in eine ohne Dreiecksmatrix nach den von Kamphuis /14/ und /15/ angegebenen Methode berücksichtigt.

Abb. 51 Matrix für das Gerinnesystem in Abb. 49 ("Flußverzweigung I")

8.2 Mehrfachverzweigungen

Als Beispiel für eine Mehrfachverzweigung wurde für die in Abb. 52 dargestellte "Flußverzweigung II" ein Rechenprogramm aufgestellt. Die schematische Darstellung der Anordnung der Matrixkoeffizienten gibt Abb. 53. Diese Matrix wird nach dem gleichen Verfahren wie bei der einfachen Gerinneverzweigung in die in Abb. 54 dargestellte ohne Dreiecksmatrix umgeformt und dann durch fortgesetzte Substitution rückwärts gelöst.

Bei dem hier angewendeten Verfahren zur Behandlung von Gerinneverzweigungen mit Verwendung einer Gesamtmatrix für das System und deren Transformation in eine obere Dreiecksmatrix nach Kamphuis /14/ und /15/ werden für spezielle Gerinnesysteme jeweils gesonderte Einzelprogramme erstellt. Nach Kamphuis /15/ ist es jedoch möglich, ein Universalprogramm für beliebige Gerinnesysteme aufzustellen.

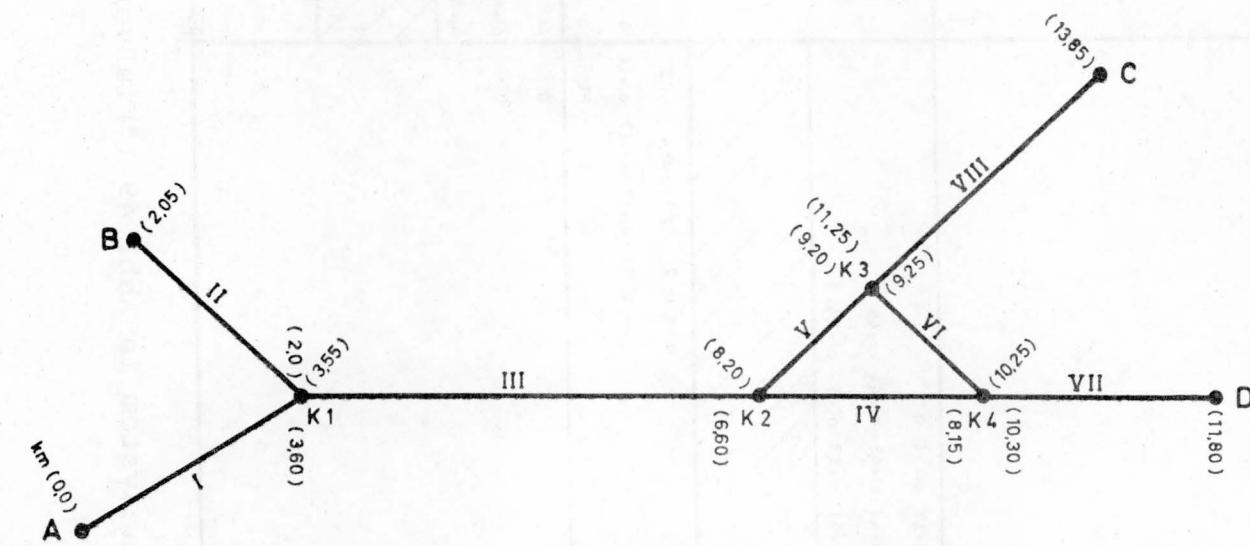


Abb. 52 "Flußverzweigung II" - Mehrfachverzweigung

Einen anderen Weg zur Behandlung von Gerinnesystemen schlägt Schulze /23/ vor. Hier wird sofort ein generelles Programm für Gerinnesysteme aufgestellt. Für jeden Gerinnezweig werden durch ein Eliminationsverfahren alle Unbekannten bis auf diejenigen an den Zweigenden eliminiert. Zusammen mit den Knotengleichungen und Randbedingungen ergibt sich ein Gleichungssystem für die Unbekannten h und v bzw. Q an den Verzweigungspunkten. Nach Ermittlung dieser Werte können dann für jeden Zweig selbst die Unbekannten an den Intervallgrenzen durch fortgesetzte Substitution berechnet werden.

Dorer: Schwall- und Sunkberechnungen

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
cc cccc cccc cccc o o			0(1) -10				
cc cccc cccc					0		
ox U(1)	oc 10 -10					0	
		10 10 oc oc		0(2) ox			
			-10 U(2)	10 -10 oc oc		0(3) -10	
					0(4) ox		
0				ox U(3)			
					-10 U(4)		10 cc
							cc

Abb. 53 Matrix für die "Flußverzweigung II" in Abb. 52

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
xxxx 1xxxx 1xxxx 1xxxx		xA xA xA				0	
1xxxx 1xxxx							
		1xxxx 1xxxx		xB xB xB			
			1xxxx 1xxxx			xc xc xc	
				1xxxx			xd xd
					1xxxx 1xxxx		
0							
							1xxxx 1xxxx 1xx 1x 1

Abb. 54 "Flußverzweigung II", obere Dreiecksmatrix

8.3 Testrechnungen

8.3.1 "Flußverzweigung I"

Für das in Abb. 49 dargestellte Gerinnesystem ("Flußverzweigung I") werden folgende Abmessungen angenommen:

Länge A-K :	3,5 km
B-K :	4,0 km
C-K :	3,0 km
Breite :	60 m (Rechteckquerschnitt)
Gefälle :	0 %
k-Wert :	50 $m^{1/3}/s$
Maschenweite Δx :	100 m

Als Anfangsbedingung wurde $Q_0 = 50 \text{ m}^3/\text{s}$ von A nach C fließend gewählt bei einer Wassertiefe in A von 4,0 m.

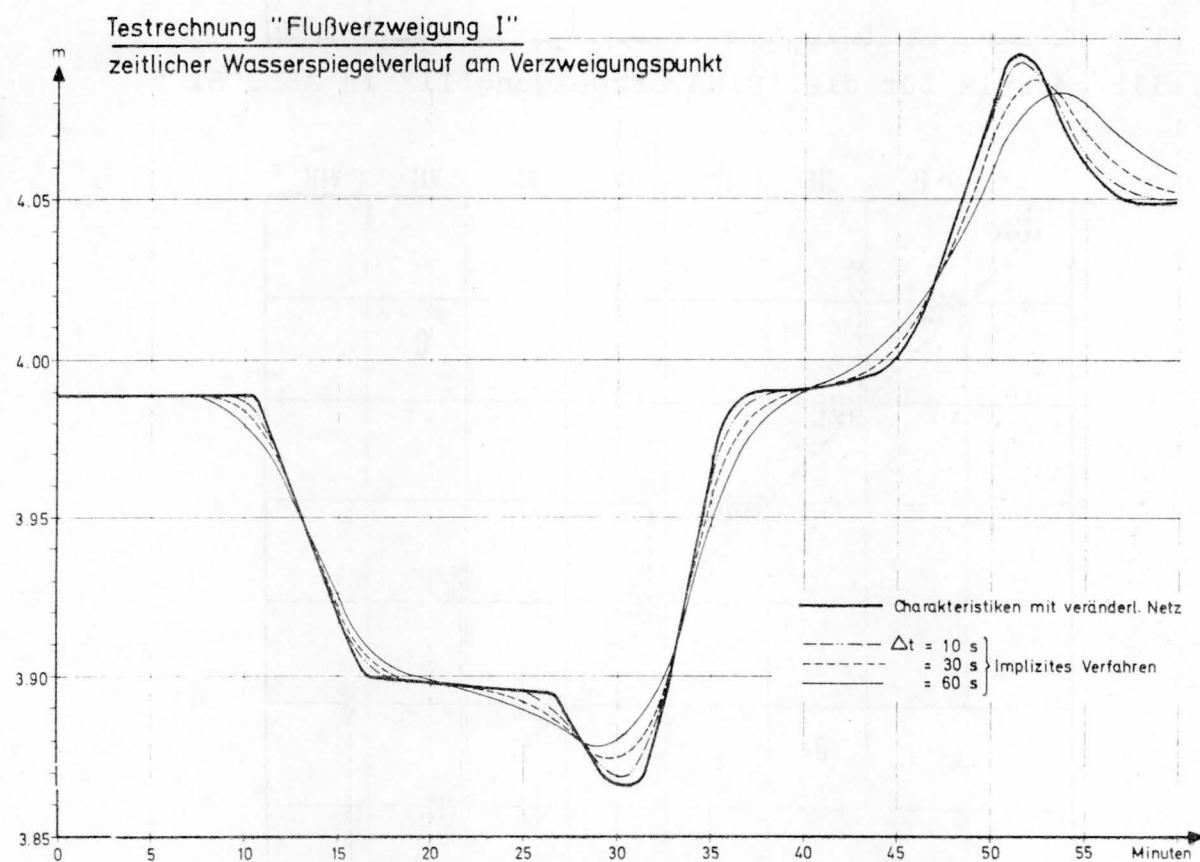


Abb. 55 Testrechnung "Flußverzweigung I", zeitlicher Wasserspiegelverlauf am Verzweigungspunkt, Vergleich Charakteristikenverfahren - implizites Differenzenverfahren

Folgende Randbedingungen werden angenommen:

Rand A : $h = \text{const} = 4,00 \text{ m}$

Rand B :	$Q (\text{m}^3/\text{s})$	0	50	50	0
	$t (\text{s})$	0	300	1200	1500

Rand C : $Q = \text{const} = 50 \text{ m}^3/\text{s}$

Die Berechnungen wurden durchgeführt mit dem Charakteristikenverfahren mit veränderlichem Netz und mit dem impliziten Differenzenverfahren mit Zeitschritten $\Delta t = 10, 30$ und 60 Sekunden.

Der in Abb. 55 dargestellte zeitliche Verlauf der Wasserspiegelhöhen zeigt, daß das implizite Differenzenverfahren bei entsprechend klein gewählten Zeitschritten im Vergleich zum Charakteristikenverfahren durchaus brauchbare Ergebnisse liefert. In den Abb. 56 und 57 sind der zeitliche Verlauf von Wasserspiegelhöhe und Geschwindigkeit an verschiedenen Stellen des Gerinnes aufgetragen bei $\Delta t = 10 \text{ s}$ im impliziten Differenzenverfahren.

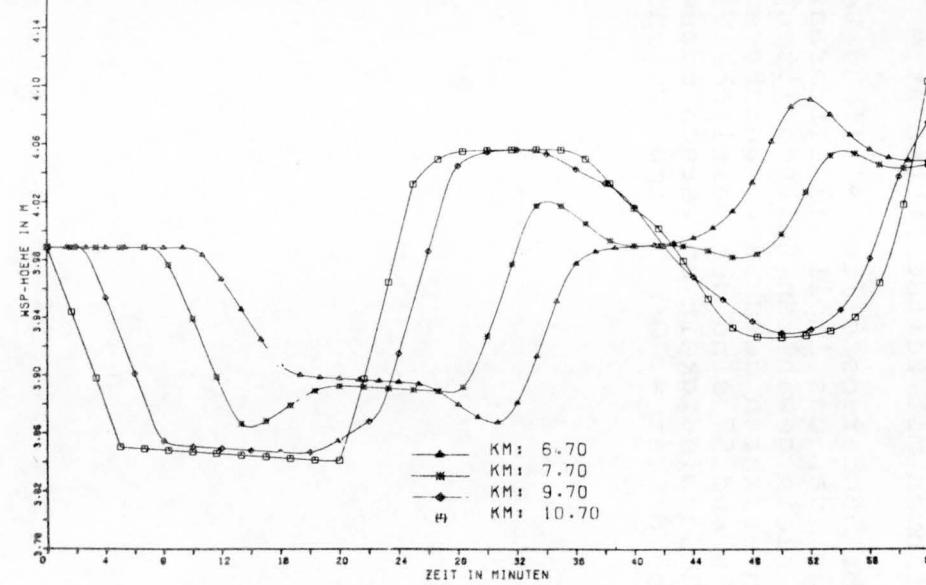
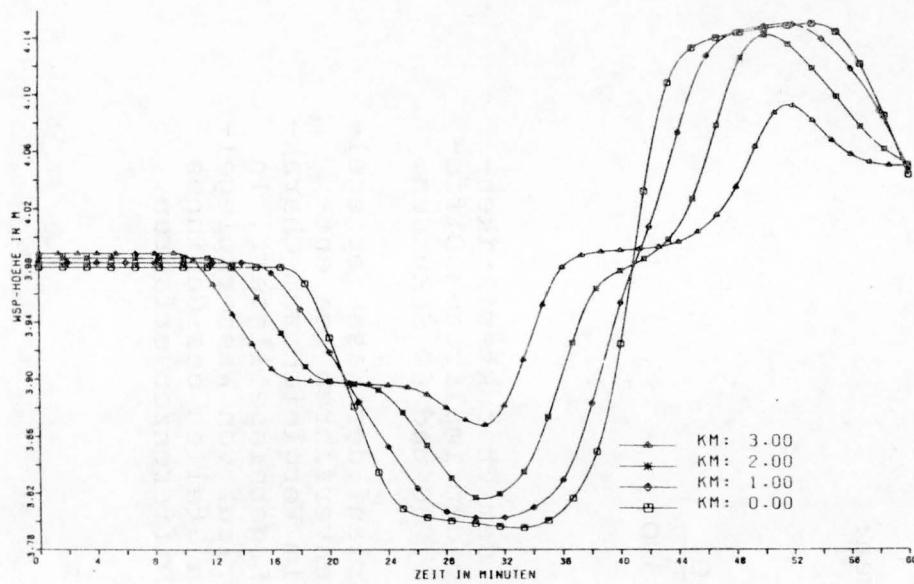
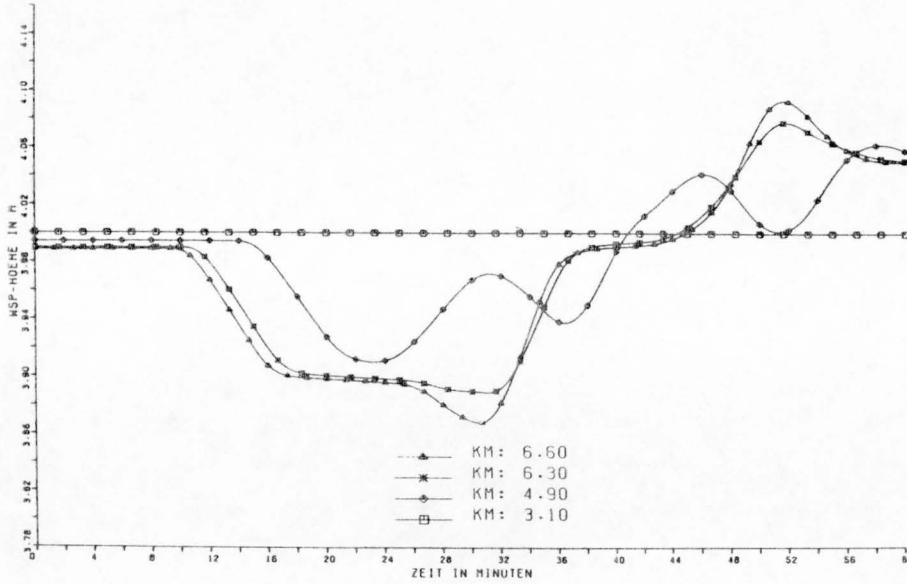


Abb. 56 Testrechnung "Flußverzweigung I", zeitlicher Wasserspiegelverlauf für $\Delta t = 10$ s (implizites Differenzenverfahren)

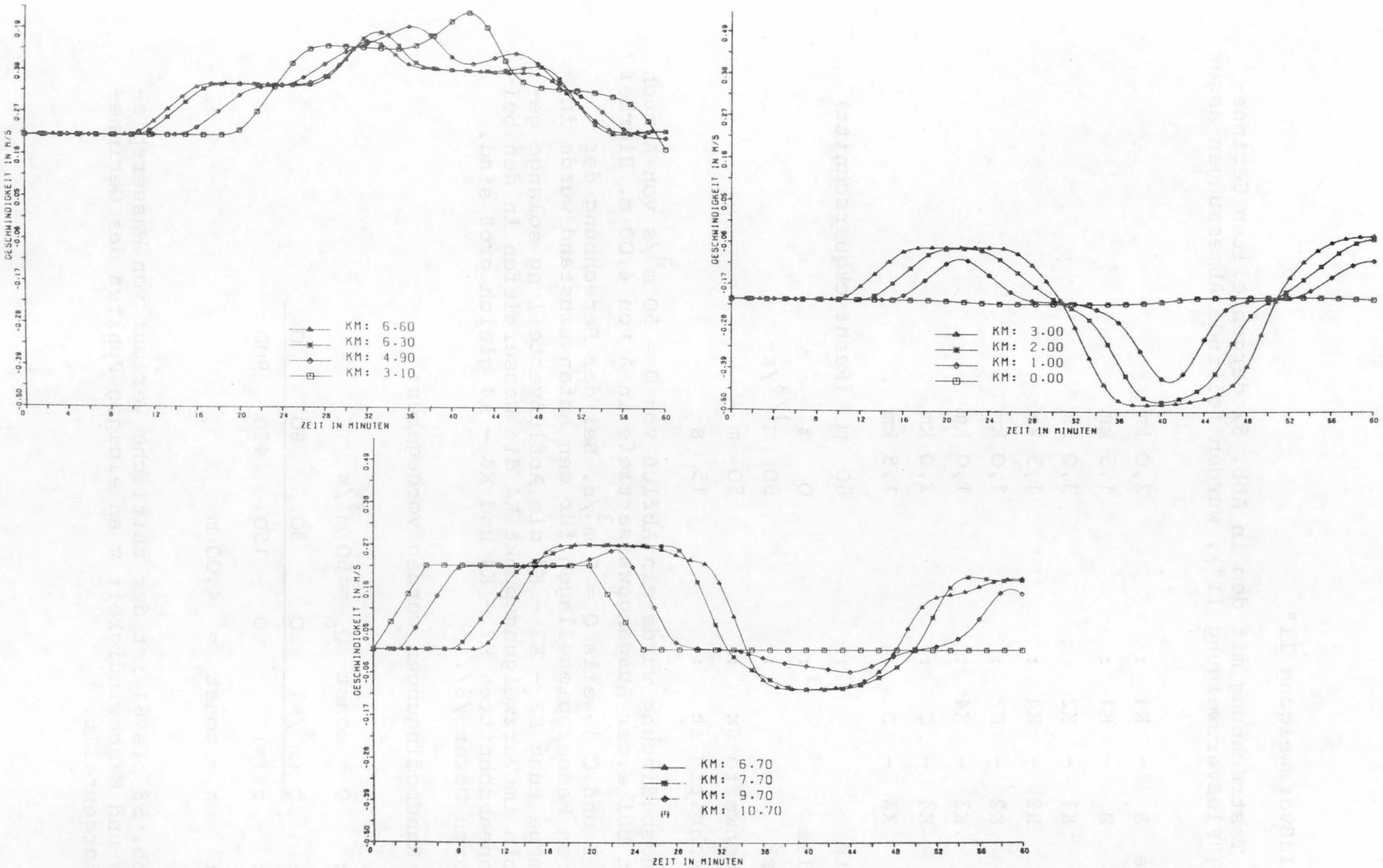


Abb. 57 Testrechnung "Flußverzweigung I", zeitlicher Geschwindigkeitsverlauf für $\Delta t = 10$ s (implizites Differenzenverfahren)

8.3.2 "Flußverzweigung II"

Für eine Testrechnung mit dem in Abb. 52 dargestellten Gerinne-
system, ("Flußverzweigung II"), wurden folgende Abmessungen ange-
nommen:

Länge A - K1 :	2,0 km
B - K1 :	1,5 km
K1 - K2	3,0 km
K2 - K4 :	1,5 km
K2 - K3 :	1,0 km
K3 - K4 :	1,0 km
K4 - C :	2,0 km
K4 - D :	1,5 km
Breite :	60 m (Rechteckquerschnitt)
Gefälle :	0 %
k-Wert :	50 $m^{1/3}/s$
Maschenweite Δx :	50 m
Zeitschritt Δt :	15 s

Als Anfangsbedingung wurde ein Abfluß von $Q = 50 m^3/s$ von A nach D gewählt bei einer Ausgangswassertiefe in A von 4,00 m. Hierbei gilt für B und C jeweils $Q = 0 m^3/s$. Bei der Berechnung der stationären Wasserspiegellagen für den Anfangszustand wurde in der Stromspaltung K2 - K3 - K4 die Abflußverteilung solange geändert, bis im Verzweigungspunkt K4 die Wassertiefen in den beiden Gerinneabschnitten K2 - K4 und K3 - K4 gleich groß sind. Siehe hierzu Dorer /8/.

Folgende Randbedingungen wurden vorgegeben:

Rand A :	$Q = \text{const}$	$Q_0 = 50 m^3/s$
Rand B :	$Q (m^3/s)$	0 30 60 0
Rand C :	$t (s)$	0 150 450 900
Rand D :	$h = \text{const}$	= 4,00 m

In den Abb. 58 bis 61 ist der zeitliche Verlauf von Wasserspiegelhöhe h und Geschwindigkeit v an einigen Punkten des Gerinne-
systems dargestellt.

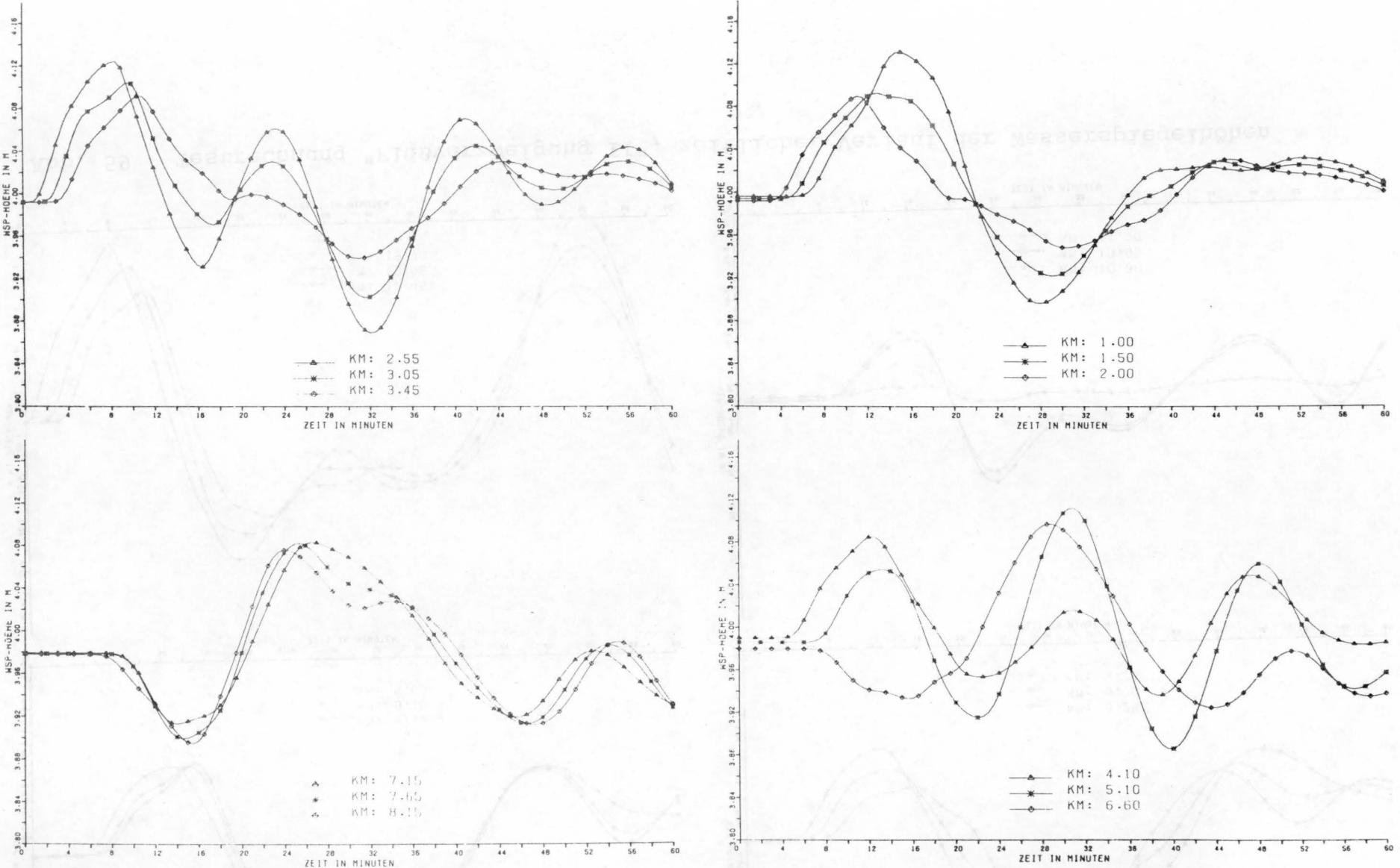


Abb. 58 Testrechnung "Flussverzweigung II", zeitlicher Verlauf der Wasserspiegelhöhen

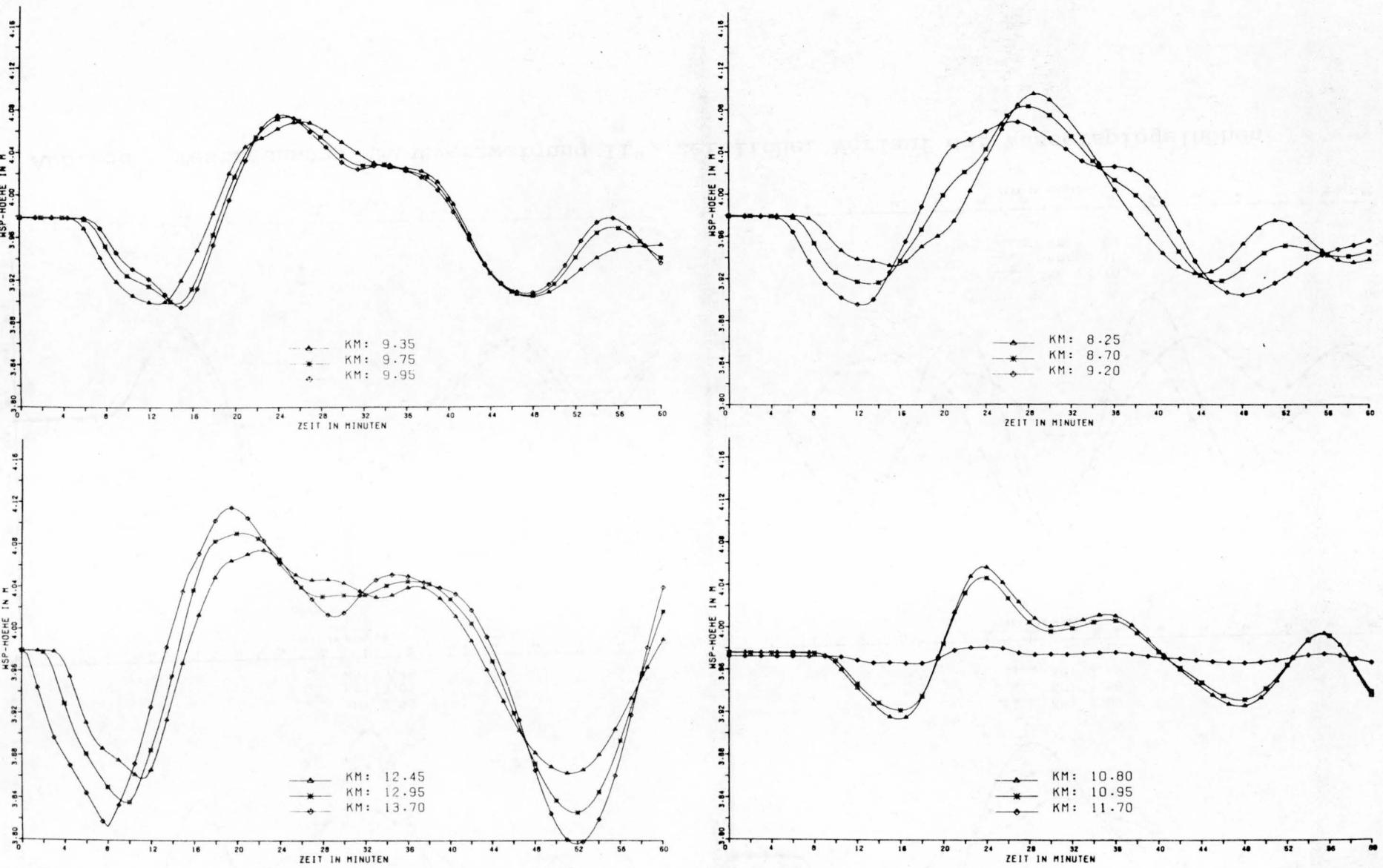


Abb. 59 Testrechnung "Flußverzweigung II", zeitlicher Verlauf der Wasserspiegelhöhen

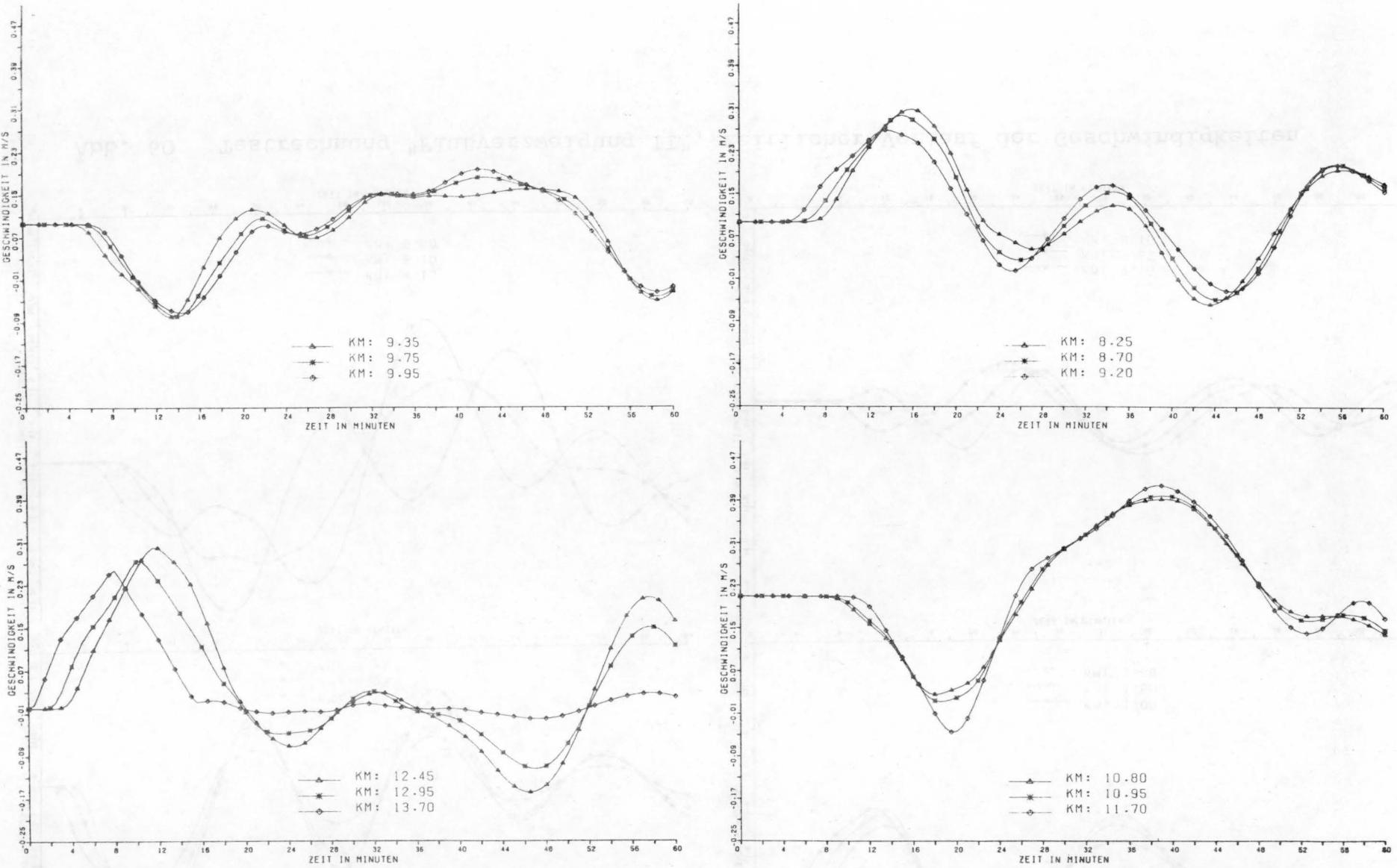


Abb. 61 Testrechnung "Flußverzweigung II", zeitlicher Verlauf der Geschwindigkeiten

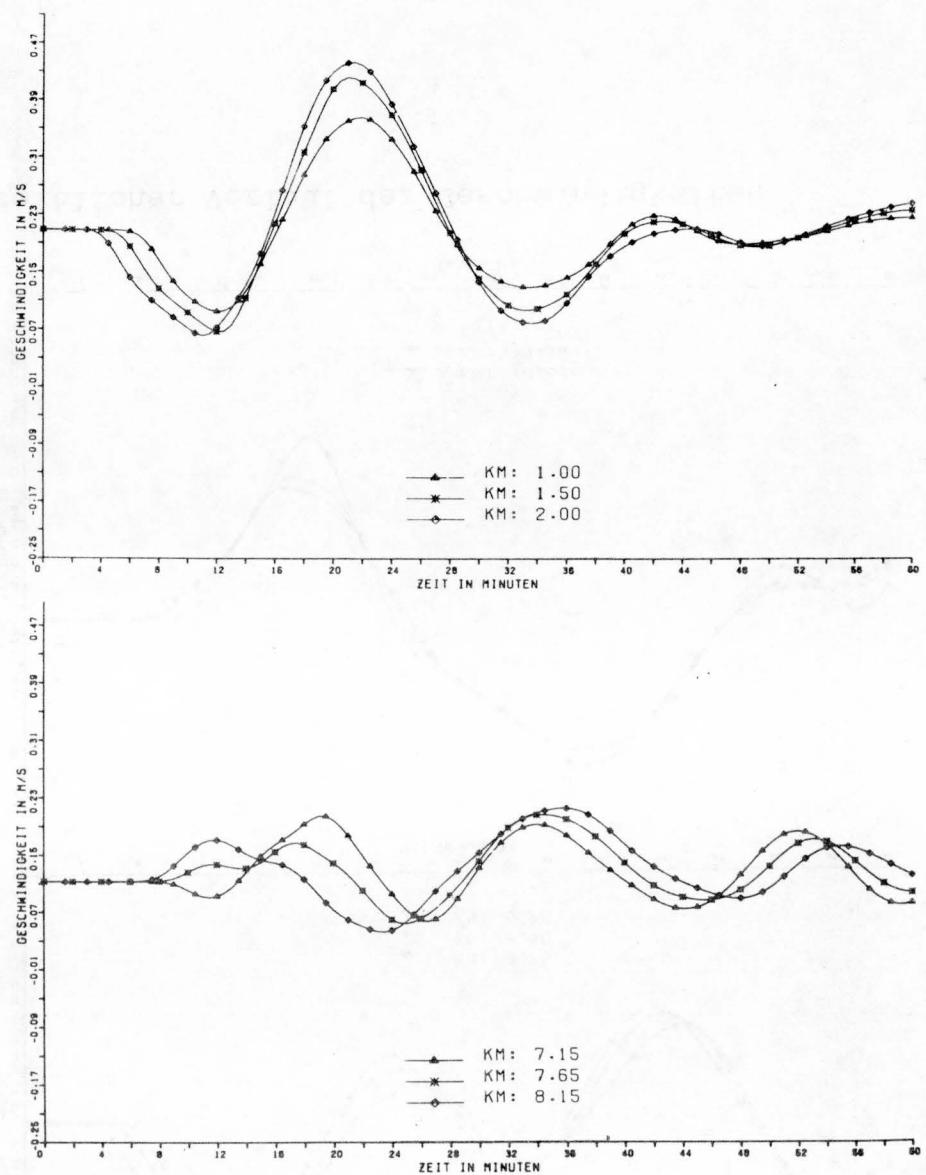
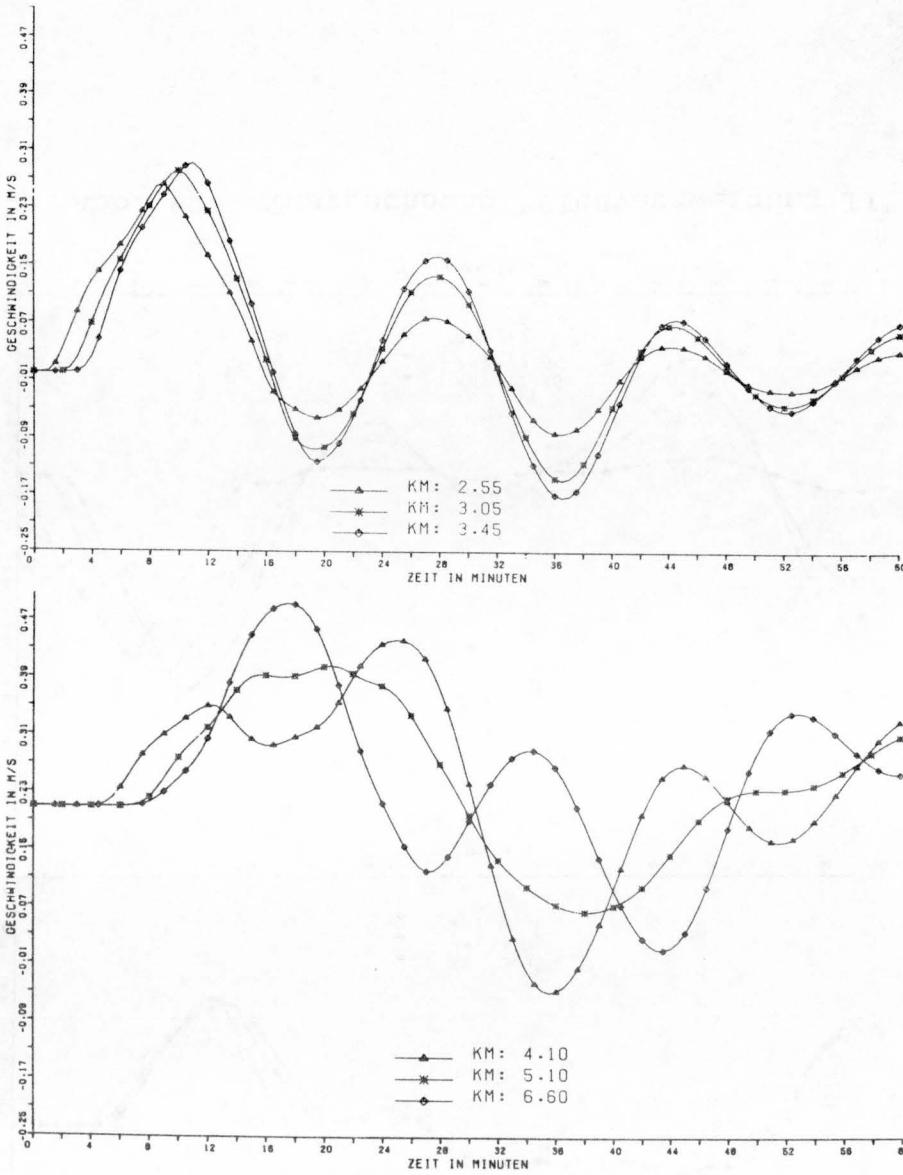


Abb. 60 Testrechnung "Flußverzweigung II", zeitlicher Verlauf der Geschwindigkeiten

9. Schrifttum

- /1/ Amein, M. : An Implicit Method for Numerical Flood Routing.
Water Resources Research, 4 (1968) 4, S. 719-726, 18 Qu.
- /2/ Amein, M. : Some Recent Studies on Numerical Flood Routing.
Proc. 3rd Annual Conference of the American Water Resources Assoc. 1967, S. 274-278, 11 Qu.
- /3/ Amein, M.
Fang, Ching Seng : Implicit Flood Routing in Natural Channels.
Proc. ASCE, 96 (1970) HY 12.
- /4/ Fread, D.L. : Diskussion zu /3/.
Proc. ASCE, 97(1971), HY 7.
- /5/ Baltzer, R.H.,
Lai, Ch. : Computer Simulation of Unsteady Flows in Waterways.
Proc. ASCE, 94(1968) HY 4, 19 Qu.
- /6/ Carnahan, B.
Luther, H.A.,
Wilkes, J.O. : Applied Numerical Methods.
Wiley & Sons, 1969
- /7/ Dorer, H. : Berechnung des nichtstationären Abflusses in nichtprismatischen offenen Gerinnen.
Mitteilungsblatt der BAW Nr. 31, Karlsruhe 1972
- /8/ Dorer, H. : Combination of a Physical and a Mathematical River Model with Fixed Bed.
IAHR Int. Symp. o. River Mechanics, Bangkok 1973
- /9/ Dorer, H.
Lie, S.H. : Surge Computation in a Navigation Canal with Lateral Offtake-Comparison to Field Measurements.
IAHR, 15th. Congress, Istanbul 1973
- /10/ Dronkers, J.J. : Tidal Computation for Rivers, Coastal Areas and Seas.
Proc. ASCE, 95 (1969) HY 1, S. 29-77, 27 Qu.
- /11/ Fang, Ch. S. : Mathematical Solution of the Complete Equations of Unsteady Flow in Open Channels.
Diss. Ph. D. North Carolina State University, Raleigh, N.Car., 1968, 103 S.

- /12/ Gunaratnam, D.J., : Numerical Solution of Unsteady
Perkins, F.E. : Flow in Open Channels.
MIT, Cambridge, Mass. Hydrodynamics Laboratory, Rep. Nr. 127, 1970
- /13/ Halliwell, A.R., : Flood Routing in Nonprismatic
Ahmed, M. : Channels, using an Implicit Method of Solution.
IAHR, Int. Symp. o. River Mechanics, Bangkok 1973
- /14/ Kamphuis, J.W. : Mathematical Tidal Study of St. Lawrence River.
Proc. ASCE, 96 (1970) HY 3, S. 643-664, 8 Qu.
- /15/ Kamphuis, J.W. : Mathematical Model Study of the Propagation of Tides in the St. Lawrence River and Estuary.
National Research Council, Rep. DME MH 105 Ottawa, Canada, 1968
- /16/ Liggert, J.A., : Difference Solution of the Shallow Water Equation.
Woolhiser, D.A. : Proc. ASCE, 93 (1967) EM 2, S.39-71, 22 Qu, 95 (1969) EM 1, S. 303-311, 6 Qu.
- /17/ Harbough, T.E. : Diskussion zu /16/
Proc. ASCE, 93 (1967) EM 5, S. 186-190
- /18/ Prasat, L., : Diskussion zu /16/
Vreugdenhil, C.B., : Proc. ASCE, 95 (1968) EM 1, S. 332-342, 7 Qu
- /19/ Ligget, J.A. : Mathematical Flow Determination in Open Channels.
Proc. ASCE, 94 (1968) EM 4, S. 947-963, 10 Qu
- /20/ Miller, W.A. : Numerical Solution of the Equations for Unsteady Open Channel Flow.
Diss. Georgia Institute of Technology, 1971
- /21/ McLaughlin, R.T., : Unsteady Flow in Reservoirs Operated for Peak Power.
Kim, C., : MIT, Cambridge, Mass. Hydrodynamics Laboratory, Rep. Nr. 101, 1966
Dailey, J.E.
- /22/ Preissmann, A. : Numerische Verfahren zur Berechnung instationärer Gerinneströmungen.
Elektron. Berechnung von Rohr- und Gerinneströmungen, Zielke, W. Hrsg., Erich Schmidt Verlag, 1974

- /23/ Schulze, K.W. : Eine problemorientierte Sprache für die Dynamik offener Gerinne. Diss. TU Hannover, 1972, 144 S.
- /24/ Sevuk, A.S.
Yen, B.C. : Comparison of four Approaches in Routing Flood Wave through Junction. IAHR, 15th Congress, Istanbul 1973, Vol. 5, S. 169-172
- /25/ Strelkoff, Th. : Numerical Solution of St. Venant Equations. Proc. ESCE, 96 (1970) HY 1, S. 223-252, 30 Qu
- /26/ Thurnau, D.H. : Algorithm 195 - Bandsolve in: Collected Algorithms from CACM (Communications of the Assoc. for Computing Machinery), 1963
- /27/ Wasser- und Schiff- : Messung des Fließgefälles im fahrtsdirektion Seitenkanal Ladenburg (Neckar)
Stuttgart : am 07.06.1970.
Unveröffentlicht
- /28/ Elektrizitäts Actien- : Schwallversuche an der Moselstau-
Gesellschaft (EAG) stufe Koblenz Oktober 1957, durch-
vorm. W. Lahmeyer&Co., geführt im Auftrag der RWE Essen-
Frankfurt : Frankfurt/Main 15.02.1958.
Unveröffentlicht