Abteilung II — Seeschiffahrt

Mitteilung 1

Ursprung und Wirkung der langperiodischen Wellen in den Häfen Sicherheitsmaßnahmen zum Schutze der Schiffe Möglichkeiten, die Wirkung abzuschwächen — Modellversuche

Von Dr. Walter Hansen,
Oberregierungsrat beim Deutschen Hydrographischen Institut, Hamburg

Thema: „Über ein Verfahren zur numerischen Ermittlung von Schwingungen mit langer Periode."

Zusammenfassung:

Ausgehend von den hydrodynamischen Differentialgleichungen wird ein Verfahren entwickelt, das es gestattet, Schwingungsvorgänge in ein- und zweidimensionalen Meeresgebieten wie Rand- und Nebenmeeren, Buchten, Kanälen, Flußmündungen und Hafenanlagen numerisch zu ermitteln. Im einzelnen wird dabei so verfahren, daß zunächst aus den hydrodynamischen Differentialgleichungen ein System von Differenzengleichungen abgeleitet wird, das numerische Werte der horizontalen und vertikalen Bewegungen liefert. Da die durchzuführenden Rechnungen sehr umfangreich sind, ist es zweckmäßig, diese Arbeiten mit Hilfe schnellrechnender Elektronenrechenmaschinen zu erledigen. Für winderzeugte Wasserstandsänderungen und Gezeiten hat sich das Verfahren bewährt.

Im folgenden soll ein Problem behandelt werden, das — besonders im Hinblick auf die Arbeiten der Technik — von gewissem Interesse ist. Es ergibt sich z. B. die Frage, in welcher Art und Weise und bis zu welchem Ausmaß Schwingungen, bestimmt durch Amplitude und Phase, von wasserbaulichen Maßnahmen beeinflußt werden, wenn derartige Bauten die natürlichen und geometrischen Proportionen des Meeres oder Flußgebietes verändern.

Zur Beantwortung aller dieser Fragen ist es zweckmäßig, mit Hilfe der hydrodynamischen Gleichungen numerische Verfahren zu entwickeln, die quantitative Lösungen liefern. Die Ermittlung dieser Lösungen erfordert aber derart umfangreiche Berechnungen, daß eine elektronische Rechenmaschine benutzt werden sollte.

Ausgehend von den hydrodynamischen Gleichungen, wird im folgenden ein System von Differentialgleichungen entwickelt, das dazu verwendet werden kann, Schwingungsvorgänge von Wassermassen in Buchten, Kanälen, Flüssen und Hafenbecken numerisch zu ermitteln. Das System läßt sowohl eine zwei- wie eindimensionale Behandlungsweise zu. Die numerischen Lösungen werden aus Differenzengleichungen erhalten, die aus den Differentialgleichungen abgeleitet werden.

Die hydrodynamischen Gleichungen

Die hydrodynamischen Gleichungen werden in folgender Form geschrieben:

$$\frac{\partial u}{dt} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} - fv - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \nu^*\Delta u + g\frac{\partial \zeta}{\partial x} = K_1$$

$$\frac{\partial v}{dt} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} + fu - \nu\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \nu^*\Delta v + g\frac{\partial \zeta}{\partial y} = K_2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Das Koordinatensystem wird mit x, y, z bezeichnet; t ist die Zeit-Koordinate; die Komponenten der Geschwindigkeit sind u, v, w, der Coriolisfaktor ist f; K_1 und K_2 sind Komponenten der äußeren Kräfte. g ist die Erdbeschleunigung und ζ die Höhe des gestörten Wasserspiegels. Die Gesamttiefe ist $H = \zeta + h$, d. h. $z = 0$ ist die mittlere Oberfläche und $z = -h$ ist der Meeresboden. ζ ist eine Funktion von t, x, y und h ist nur eine Funktion von x und y. Zunächst werden die allgemeinen Gleichungen in z-Richtung vom Meeresboden zur Oberfläche integriert. Dadurch wird die Anzahl der Unbekannten reduziert, gleichzeitig wird dabei auf die Aussage von Änderungen der Geschwindigkeit mit der Tiefe verzichtet.

Die Integration in z-Richtung liefert:

$$\int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial u}{\partial t} dz = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{-h}^{\zeta} u dz\right) - u_{ob} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

$$\int_{-h}^{\zeta} \left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) dz = w_{ob}u_{ob} - w_B u_B + \int_{-h}^{\zeta} \left[\frac{\partial}{\partial x}(u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(uv)\right] dz$$

Indizes ob, B beziehen sich auf die Funktionswerte an der Oberfläche und auf dem Boden resp.

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{-h}^{\zeta} u^2 dz = \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial u^2}{\partial x} dz + u_{ob}^2 \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} + u_B^2 \cdot \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_{-h}^{\zeta} uv dz = \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial uv}{\partial y} dz + u_{ob}v_{ob} \cdot \frac{d\zeta}{dy} + u_B v_B \cdot \frac{\partial h}{\partial y}$$

An der Meeresoberfläche gilt folgendes:

$$w_{ob} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u_{ob} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v_{ob} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial y}$$

und auf dem Meeresgrund

$$w_B = u_B \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + v_B \cdot \frac{\partial h}{\partial y}$$

Wenn die oben angeführten Relationen angewandt werden, erhält man:

$$\int_{-h}^{\zeta} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) dz = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{-h}^{\zeta} u dz\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_{-h}^{\zeta} u^2 dz\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{-h}^{\zeta} uv dz\right)$$

Zur Verkürzung und Vereinfachung wird eingeführt:

$$\int_{-h}^{\zeta} u dz = H \cdot U \quad ; \quad \int_{-h}^{\zeta} v dz = H \cdot V$$

Andererseits benutzen wir die Störungsausdrücke u', v' in folgender Art und Weise:

$$u = U(1 + u') \quad , \quad v = V(1 + v')$$

Das Ergebnis ist dann

$$\int_{-h}^{\zeta} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) dz = \frac{\partial}{\partial t}(H \cdot U) + \frac{\partial}{\partial x}\left(U^2\left(H + \int_{-h}^{\zeta} u'^2 dz\right)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(UV\left(H + \int_{-h}^{\zeta} u'v' dz\right)\right)$$

Eine ähnliche Gleichung erhält man für die y-Richtung:

$$\int_{-h}^{\zeta}\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)dz=\frac{\partial}{\partial t}(H\cdot V)+\frac{\partial}{\partial x}\left(UV(H+\int_{h}^{\zeta}u'v'dz)\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(V^2(H+\int_{-h}^{\zeta}v'^2dz)\right)$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen erhalten wir endlich

$$\frac{\partial}{\partial t}(HU)+\frac{\partial}{\partial x}\left(U^2(H+\int_{-h}^{\zeta}u'^2dz)\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(UV(H+\int_{-h}^{\zeta}u'v'dz)\right)+fHV-\nu u_{zob}+\nu u_{zB}+$$

$$+gH\frac{\partial\zeta}{\partial x}-\nu^*H\Delta U-\nu^*\int_{-h}^{\zeta}\Delta(Uu')dz=H\cdot K_1$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(HV)+\frac{\partial}{\partial x}\left(UV(H+\int_{-h}^{\zeta}u'v'dz)\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(V^2(H+\int_{-h}^{\zeta}v'^2dz)\right)+fHU-\nu v_{zob}+\nu v_{zB}+$$

$$+gH\frac{\partial\zeta}{\partial y}-\nu^*H\Delta V-\nu^*\int_{-h}^{\zeta}\Delta(Vv')dz=H\cdot K_2$$

Die Kontinuitätsgleichung lautet:

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(HU)+\frac{\partial}{\partial y}(HV)=0$$

In diesen Gleichungen sind U, V, ζ und u', v' unbekannte Funktionen. U, V und ζ hängen nur von x, y, t ab; bevor diese Funktionen ausgewertet werden, ist es notwendig, u' und v' zu eliminieren. Das bedeutet, daß für diese Funktionen zusätzliche Annahmen gemacht werden müssen. Handelt es sich um die Ermittlung von Schwingungen mit relativ langer Periode, dann weisen die Geschwindigkeiten mit der Tiefe nur geringe Änderungen auf und es können Potenz- oder logarithmische Gesetze verwendet werden. Sind dagegen die Wellen recht kurz, dann kann sich die Geschwindigkeit mit der Tiefe exponentiell ändern.

Zur Behandlung des ersten Falles sei eingeführt:

$$u=U(\alpha+1)\left(\frac{z+h}{H}\right)^{\alpha}$$

damit wird erhalten:

$$\int_{-h}^{\zeta}u'^2dz=\frac{\alpha^2H}{2\alpha+1}$$

Im Meer variiert α zwischen 1/5 und 1/7. Das Ergebnis ist dann, daß diese Störungsglieder die Tiefe H bis zu 3 % verändern können, so daß diese Beiträge normalerweise unwesentlich sind. Um einen höheren Genauigkeitsgrad zu erreichen, können wir einen Faktor einführen, mit dem die Tiefe H zu multiplizieren ist. In ähnlicher Weise erhalten wir die entsprechenden Werte für v'.

Es ist möglich, andere Voraussetzungen im Hinblick auf die vertikale Verteilung der Geschwindigkeit einzuführen, aber innerhalb dieser Mitteilung soll dieses Problem nicht weiter behandelt werden und wir beschränken uns auf die langperiodischen Bewegungen, für die die obigen Ansätze verwendbar sind.

Nunmehr fassen wir alle Ausdrücke der ersten Gleichung zusammen, die das u' oder v' enthalten und vereinigen diese mit dem Ausdruck für die Bodenreibung νu_{zB} und nennen dies $R^{(x)}$; dasselbe geschieht mit der zweiten Gleichung. Dabei erhalten wir:

$$\frac{\partial}{\partial t}(HU) + \frac{\partial}{\partial x}(HU^2) + \frac{\partial}{\partial y}(HUV) - fHV + R^{(x)} + gH\frac{\partial \zeta}{\partial x} = H \cdot K_1 + \nu u_{zob}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(HV) + \frac{\partial}{\partial x}(HUV) + \frac{\partial}{\partial y}(HV^2) + fHU + R^{(y)} + gH\frac{\partial \zeta}{\partial y} = H \cdot K_2 + \nu v_{zob}$$

Hier sind νu_{zob}, νv_{zob} die Komponenten für den Tangentialschub auf die Wasseroberfläche, der etwa durch den Wind verursacht sein kann. Dieses System von Differentialgleichungen erlaubt es, die Änderung des Wasserspiegels und die Bewegung der Wassermassen zu berechnen, die durch äußere Einwirkungen entstehen: durch Windschub oder durch Ein- und Ausströmen über die Grenzlinie in ein Meeresgebiet, in eine Flußmündung oder dergleichen.

Wie oben schon erwähnt, kann ebenso wie die Tiefe z auch die Breite y durch Integration eliminiert werden. Zunächst müssen einige Abkürzungen erklärt werden. Die mittlere Stromlinie liegt in $y = 0$, die Breite ist daher $b_1 + b_2 = B$ und hängt von der Zeit t und x ab. Der Querschnitt ist:

$$\int_{-b_2}^{b_1} H dy = Q \quad , \quad \text{der Durchfluß} \quad \int_{-b_2}^{b_1} HU dy = D$$

Aus der ersten Gleichung folgt:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \int_{-b_2}^{b_1} \frac{\partial H}{\partial t} dy + H_1 \frac{\partial b_1}{\partial t} + H_2 \frac{\partial b_2}{\partial t}$$

H_1 und H_2 bedeuten die Tiefe in $y = b_1$ bzw. $y = -b_2$. $H_1 \frac{\partial b_1}{\partial t}$ und $H_2 \frac{\partial b_2}{\partial t}$ sind immer 0, gleichgültig ob ein rechteckiges Becken oder allgemein gestalteter Querschnitt betrachtet wird.

Da $H = h + \zeta$ ergibt sich $\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$ und schließlich erhalten wir

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \int_{-b_2}^{b_1} \frac{\partial \zeta}{\partial t} dy = \frac{\partial Q}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial \overline{\zeta}}{\partial t} = B \cdot \frac{\partial \overline{\zeta}}{\partial t}$$

Eine andere Abkürzung ist

$$U = \overline{u}(1 + u'') \quad , \quad V = \overline{v}(1 + v'')$$

$\overline{u}$ und $\overline{v}$ sind nur Funktionen von x und t.

$$D = Q\overline{u} = \int_{-b_2}^{b_1} HU dy \quad \text{sowie} \quad \int_{-b_2}^{b_1} Hu'' dy = 0$$

$$\int_{-b_2}^{b_1} HU^2 dy = (Q + \int_{-b_2}^{b_1} Hu''^2 dy)\overline{u}^2$$

Mit Hilfe dieser Formeln erhalten wir nach Integration in y-Richtung

$$-b_2 \leqq y \leqq b_1$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(Q\overline{u}) + \frac{\partial}{\partial x}(Q\overline{u}^2) - fQ\overline{v} + \int_{-b_2}^{b_1} R^{(x)} dy + gQ\frac{\partial \zeta}{\partial x} = K_1 Q + \int_{-b_2}^{b_1} \nu u_{zob}\, dy$$

$$B\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Q\overline{u}) = 0$$

Nach Subtraktion der Kontinuitätsgleichung wird die erste Gleichung, wenn noch durch Q dividiert wird:

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \overline{u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + g\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{1}{Q}\int_{-b_2}^{b_1} R^{(x)} dy = K_1 + \frac{1}{Q}\int_{-b_2}^{b_1} \nu u_{zob}\, dy$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial x}(Q\overline{u}) = 0$$

Bei dieser Formel setzen wir voraus, daß $\overline{v}$ verschwindet.

Ausdrücke auf der rechten Seite der ersten Gleichung sind gegebene Funktionen, in unserem besonderen Falle durch Gezeiten und ähnliche lange Wellen bedingte Schwingungen in einem Flußmündungsgebiet. Danach bleibt nur ein unbekannter Ausdruck, nämlich: $\frac{1}{Q}\int_{-b_2}^{b_1} R^{(x)} dy$

In Übereinstimmung mit hydro- und aerodynamischen Untersuchungen scheint es möglich zu sein, diesen Widerstand durch die Formel

$$\frac{1}{Q}\int_{-b_2}^{b_1} R^{(x)} dy = \frac{r\overline{u}\,|\overline{u}|\,B}{Q} = \frac{r\overline{u}\,|\overline{u}|}{\overline{H}}$$

auszudrücken, wobei $\overline{H} = \frac{Q}{B}$.

Diese Gleichung besagt, daß der Widerstand proportional der zweiten Potenz der mittleren Geschwindigkeit ist. Von Beobachtungen her wissen wir, daß r, ein dimensionsloser Faktor, gleich $2{\cdot}4{\cdot}10^{-3}$ ist. In jenen Teilen des Mündungsgebietes, die seicht sind und wo der Boden mit Riffeln bedeckt ist, kann dieser Faktor zunehmen. Aber normalerweise ist der Einfluß auf den Wasserspiegel oder die Ströme durch wechselndes r relativ gering. Die endgültigen Gleichungen sind:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + g\frac{\partial \zeta}{\partial x} + r\frac{u\,|u|}{\overline{H}} = 0$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(Qu) = 0$$

wo die Querstriche weggelassen sind. Da diese Gleichungen nicht linear und Q und B vorgegebene Funktionen sind, ist es ziemlich schwierig, eine Lösung in geschlossener analytischer Form zu erhalten. Aus diesen Gründen sehen wir von der Entwicklung einer solchen analytischen Lösung ab und ziehen es vor, auf direktem Wege zu einer numerischen Lösung zu kommen. Der erste Schritt dazu ist die Umformung des Systems der Differentialgleichungen in ein System von Differenzengleichungen. Die Umwandlung in finite Differenzen erfolgt unter Benutzung der Beziehungen:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{F\big((\nu+1)x\big) - F\big((\nu-1)x\big)}{2x}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{F\big((\nu+1)t\big) - F\big((\nu-1)t\big)}{2t}$$

Es werden die x- und die t-Achse in Abschnitte geteilt, wobei sich die unteren Indizes auf die x-, die oberen auf die t-Achse beziehen.

Die Gleichungen haben dann folgende Form:

$$u'_{2\nu+1} = a_{2\nu+1}\, u_{2\nu+1} - b_{2\nu+1}\,(\zeta'_{2\nu+2} - \zeta'_{2\nu})$$

$$\zeta''_{2\nu+2} = \zeta'_{2\nu+2} - c_{2\nu+2}\, u'_{2\nu+3} + d_{2\nu+2}\, u'_{2\nu+1})$$

Zur Abkürzung schreiben wir:

$$a_{2\nu+1} = \frac{1 - \dfrac{\Delta t}{H_{2\nu+1}} \cdot r_{2\nu+1}\,|u_{2\nu+1}| - \dfrac{\Delta t}{4 l}\,\lambda_{2\nu+1}\,(u_{2\nu+3} - u_{2\nu-1})}{1 + \dfrac{\Delta t}{H_{2\nu+1}} \cdot r_{2\nu+1}\,|u_{2\nu+1}| + \dfrac{\Delta t}{4 l}\,\lambda_{2\nu+1}\,(u_{2\nu+3} - u_{2\nu-1})}$$

$$b_{2\nu+1} = \frac{g\Delta t}{l} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{\Delta t}{H_{2\nu+1}} \cdot r_{2\nu+1}\,|u_{2\nu+1}| + \dfrac{\Delta t}{4 l}\,\lambda_{2\nu+1}\,(u_{2\nu+3} - u_{2\nu-1})}$$

$$c_{2\nu+2} = \frac{\Delta t}{l} \cdot \frac{Q_{2\nu+3}}{B_{2\nu+2}} \quad , \quad d_{2\nu+2} = \frac{\Delta t}{l} \cdot \frac{Q_{2\nu+1}}{B_{2\nu+2}}$$

Ausführlicher geschrieben nimmt obige Gleichung diese Form an:

$$\begin{array}{rcl}
u'_1 & = & a_1 u_1 - b_1 \zeta'_2 \\
-d_2 u'_1 + \zeta''_2 + c_2 u'_3 & = & \zeta'_2 \\
u'_3 & = & b_3 \zeta'_2 + a_3 u_3 \quad b_3 \zeta'_4 \\
-d_4 u'_3 + \zeta''_4 + c_4 u'_5 & = & \zeta_4 \\
u'_5 & = & b_5 \zeta'_4 + a_5 u_5 - b_5 \zeta'_6 \\
\cdots\cdots & & \cdots\cdots \\
-d_{2N} u'_{2N-1} + \zeta_{2N} & = & \zeta'_{2N} - \cdot\cdot\cdot - c_{2N} u'_{2N+1}
\end{array}$$

ζ_0 und u_{2N+1} gehen in die erste und letzte Gleichung als Randwerte ein. Diese „Schritt-für-Schritt-Methode" gilt nur, wenn der Betrag der Eigenwerte dieses Systems kleiner als 1 ist. Die entsprechende Determinante ist:

$$\begin{vmatrix}
\lambda - a, & b & & & & \\
-\lambda c & , \lambda - 1 & , \lambda c & & & \\
& -b & , \lambda - a, & b & & \\
& & -\lambda c & , \lambda - 1 & , \lambda c & \\
& & & -b & , \lambda - a, & b \\
& & & & -\lambda c & , \lambda - 1
\end{vmatrix} = D_{2N}$$

Hier wird angenommen, daß a, b, c, d Konstanten sind, wie es in den folgenden Relationen aufgezeigt wird. Um ein System von linearen Gleichungen zur Bestimmung der Eigenwerte zu erhalten, ist es notwendig, diese Vereinfachungen einzuführen.

Folgende Relationen werden benutzt:

$$a = \frac{1 - k\Delta t}{1 + k\Delta t}, \quad b = \frac{g\Delta t}{l(1 + k\Delta t)}, \quad c = d = \frac{\Delta t}{l} \cdot H$$

Normalerweise ist $k > 0$. Die Aufgabe besteht darin, durch Wahl von Δt zu erreichen, daß die Beträge der Eigenwerte kleiner als 1 sind. Das geschieht in folgender Weise: Zwischen den oben erwähnten Determinanten besteht eine Beziehung, nämlich

$$D_{2u} = (1 - \lambda) D_{2u-1} + \lambda bc D_{2u-2}$$

$$D_{2u-1} = (a \quad \lambda) D_{2u-2} + \lambda bc D_{2u-3}$$

Nach Elimination aller Ausdrücke mit ungeraden Indizes erhalten wir:

$$D_{2u} = \left((a - \lambda)(1 - \lambda) + 2\lambda bc\right) D_{2u-2} - \lambda^2 b^2 c^2 D_{2u-4} = A^{2u} \cos 2u\,\Theta$$

und daraus ergibt sich schließlich:

$$\lambda^2 + 2\lambda \left[bc(1 - \cos 2\Theta_\nu) + \frac{1 + a}{2} \right] = -a$$

$$\text{mit } \Theta_\nu^* = \frac{(\nu + 1/2)\pi}{2N}, \quad \nu = 0, 1, 2, \cdots$$

Es kann gezeigt werden, daß, wenn $o < a < 1$, was normalerweise der Fall ist, $|\lambda| < 1$ für alle Werte mit

$$\Delta t < \frac{1}{\sqrt{gH}} \sqrt{\frac{2}{1 - \cos 2\Theta_\nu}} \text{ gilt.}$$

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, sind wir sicher, daß die endgültigen Werte unseres Problems nicht von den Ausgangswerten abhängen. Andererseits werden sich kleine Rechenfehler nicht verstärken, sondern im Gegenteil abklingen. Danach ist es möglich, z. B. Gezeiten und Gezeitenströme und entsprechend Wellen in Mündungsgebieten und Häfen zu berechnen. Wenn diese Berechnungen ohne elektronische Rechenmaschinen durchgeführt werden, muß die Zahl der Gitternetzpunkte klein sein.

Das geschilderte Verfahren ist bisher zur Ermittlung der Gezeiten und Gezeitenströme verwendet worden und hat praktisch brauchbare Ergebnisse geliefert. Daß ähnliche Wellen mit langer Periode behandelt werden können, scheint sicher. Für kürzer periodische Schwingungen muß die Tiefenabhängigkeit, wie oben angedeutet, berücksichtigt werden.